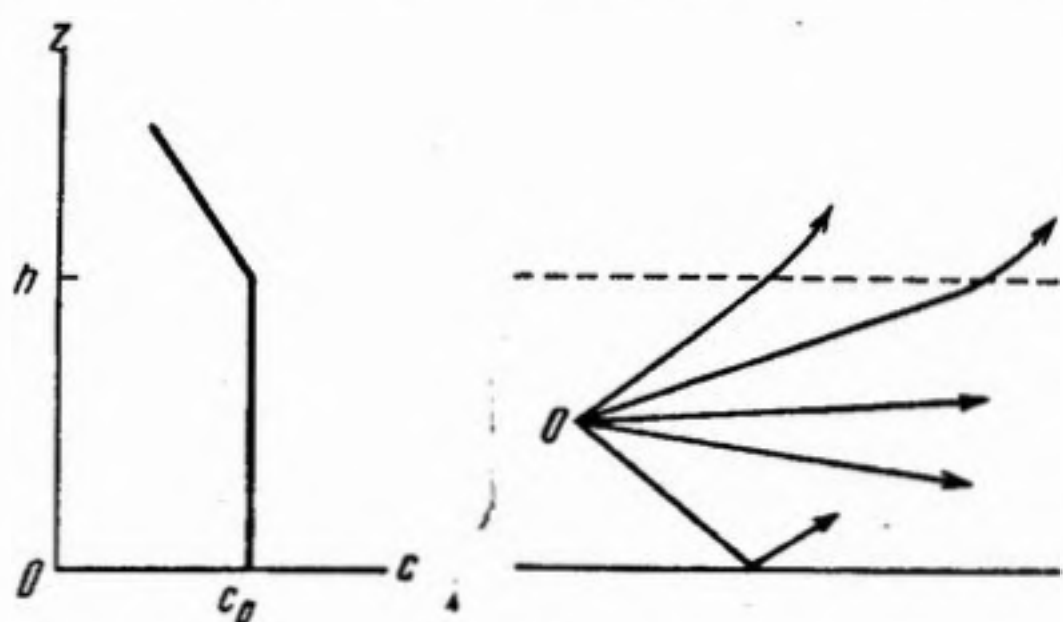


ОБ ОДНОМ ОСОБОМ ВИДЕ ЗАТУХАНИЯ ПРИ РАСПРОСТРАНЕНИИ ВОЛН В СЛОИСТО-НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ

Л. М. Брежовских и И. Д. Иванов

Рассмотрено распространение волн в слое, граничащем с одной стороны с неоднородной средой, скорость распространения волн в которой при удалении от границы слоя убывает. Показано, что в этих условиях распространение волн связано с дополнительным ослаблением, обусловленным «отсосом» энергии волн неоднородной средой. Дана полная теория вопроса и определена величина затухания.

Представим себе однородный слой толщины h , к которому сверху примыкает среда с непрерывно убывающей при удалении от слоя скоростью распространения волн c ; в однородном слое $c = c_0$. На фиг. 1 схематично изображена зависимость скорости распространения волн от координаты z , а также картина лучей при расположении источника волн в однородном слое в точке O . В плоскостях $z = \text{const}$ свойства среды предполагаются постоянными. Нижняя граница слоя $z = 0$ для простоты предполагается абсолютно отражающей.



Фиг. 1

Согласно геометрической оптике луч, вышедший из O , горизонтально распространяется как угодно далеко, ослабляясь из-за сферического расхождения волны и из-за поглощения энергии средой. Однако в действительности картина будет значительно сложнее. Вследствие диффракции луч будет расплываться. На расстоянии $r \sim \frac{h^2}{\lambda}$ луч будет представлять собой волновое образование, занимающее собой по толщине уже весь слой. С этого момента начнется «отсос» энергии луча неоднородной средой. Этот отсос можно представить себе следующим образом. Вследствие наличия в неоднородной среде рефракции, вызывающей отклонение лучей от слоя, энергия волн от верхней границы слоя быстро уходит в неоднородную среду. При этом участки слоя, близкие к верхней границе, в энергетическом отношении обедняются. Это обеднение при помощи механизма, называемого иногда «поперечной диффузией», компенсируется притоком энергии из других частей слоя, что вызывает дополнительное затухание распространяющихся по слою волн, которое и будет исследовано ниже.

Общее решение

Нам необходимо получить и исследовать точное решение задачи о распространении волн в указанных выше условиях. Мы ограничимся скалярной задачей и будем для определенности говорить об отыскании

потенциала звукового поля ψ , в то время как излучатель O будем представлять себе в виде пульсирующей сферы бесконечно малого радиуса. В общем виде решение такой задачи было дано в [1]. Там было показано, что решение в интегральном виде можно записать следующим образом.

а) Потенциал поля в однородном слое ($z < h$)

$$\psi_0(r, z) = \int_{\Gamma} \Phi_0(z, \alpha) H_0^{(1)}(k_0 r \cos \alpha) \cos \alpha d\alpha, \quad (1)$$

где α — угол скольжения плоской волны, k_0 — волновое число для однородного слоя, $H_0^{(1)}$ — функция Ганкеля первого рода нулевого порядка.

Далее

$$\Phi_0(z, \alpha) = -\frac{ik_0}{2} \frac{\Phi_{01}(z, \alpha)}{\Phi_{02}(\alpha)}, \quad (2)$$

причем

$$\Phi_{01}(z, \alpha) = [\exp\{-ik_0 z \sin \alpha\} + V_1 \exp\{ik_0 z \sin \alpha\}] [\exp\{ik_0 z_0 \sin \alpha\} + V \exp\{ik_0 (2h - z_0) \sin \alpha\}], \quad (3)$$

$$\Phi_{02}(\alpha) = 1 - V_1 V \exp\{2ik_0 h \sin \alpha\}. \quad (4)$$

Здесь z_0 — координата излучателя, V_1 и V — коэффициенты отражения плоской волны соответственно от нижней и верхней границ слоя.

Выражение (3) для функции Φ_{01} справедливо в случае $z < z_0$. Если $z > z_0$, то Φ_{01} получается из (3) переменной мест z и z_0 . Через Γ обозначен контур интегрирования в плоскости комплексного переменного α , идущий от $\pi - i_\infty$ по прямой до π , затем по вещественной оси до нуля и далее по положительной мнимой полуоси до i_∞ .

б) Потенциал поля в неоднородной среде ($z > h$)

$$\psi(r, z) = \int_{\Gamma} \Phi(\alpha) \varphi(z, \alpha) H_0^{(1)}(k_0 r \cos \alpha) \cos \alpha d\alpha, \quad (5)$$

где $\varphi(z, \alpha)$ — потенциал поля в неоднородной среде, соответствующий плоской волне единичной амплитуды, падающей из однородного слоя на неоднородную среду. Далее

$$\Phi(\alpha) = -\frac{ik_0}{2} \frac{\Phi_1(\alpha)}{\Phi_2(\alpha)}, \quad (6)$$

где

$$\Phi_1(\alpha) = \exp\{ik_0 (h - z_0) \sin \alpha\} + V_1 \exp\{ik_0 (h + z) \sin \alpha\}, \quad (7)$$

$$\Phi_2(\alpha) = 1 - V_1 V \exp\{2ik_0 h \sin \alpha\} = \Phi_{02}. \quad (8)$$

Во всех формулах для краткости записи опущен множитель $e^{-i\omega t}$.

Коэффициент отражения плоской волны от неоднородной среды

Для дальнейшей конкретизации задачи нам необходимо задаться определенным законом распределения скорости в неоднородной среде (при $z > h$) и найти коэффициент отражения плоской волны $V = V(\alpha)$.

Предположим, что скорость c зависит от координаты z следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} c &= c_0, & \text{при } 0 \leq z \leq h, \\ c &= \frac{c_0}{V\sqrt{1+2a(z-h)}}, & \text{при } z \geq h. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Так как в практических случаях величину a можно считать достаточно малой, то выбранная зависимость c от z по существу эквивалентна

линейной зависимости

$$c = c_0 [1 - a(z - h)]. \quad (10)$$

Пусть на слоисто-неоднородную среду такого вида падает плоская волна под углом скольжения α . Удобно ввести новую переменную $z_1 = z - h$, у которой в дальнейшем индекс будет всюду опускаться. Тогда поле в однородной среде, состоящее из падающей и отраженной волн, запишется в следующем виде:

$$\varphi_0(z, \alpha) = [\exp \{ik_0 z \sin \alpha\} + V \exp \{-ik_0 z \sin \alpha\}] \exp \{ikx \cos \alpha\}. \quad (11)$$

Соответствующее поле в неоднородной среде $\varphi(z, \alpha)$, являющееся решением волнового уравнения, как показано в [1], имеет вид:

$$\varphi = C \omega^{1/3} H_{1/3}^{(1)}(\omega), \quad (12)$$

где C — произвольная постоянная, $H_{1/3}^{(1)}$ — функция Ганкеля,

$$\omega = \frac{k_0}{3a} (\sin^2 \alpha + 2az)^{3/2}. \quad (13)$$

Чтобы функция $H_{1/3}^{(1)}(\omega)$ при больших ω описывала уходящую волну, перед корнем $\sqrt{\sin^2 \alpha + 2az}$ выбирается знак «плюс», так что при вещественных α имеем $\arg \omega = 0$.

Условия непрерывности звукового давления и нормальной составляющей скорости на границе $z = 0$ записываются

$$\left. \begin{aligned} \varphi_0 &= \varphi \\ \frac{\partial \varphi_0}{\partial z} &= \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{aligned} \right\} z = 0.$$

Отсюда находим V и C . Подставив найденное значение C в (12), получим

$$\varphi = 2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^{1/3} \frac{H_{1/3}^{(1)}(\omega)}{H_{1/3}^{(1)}(\omega_0) - iH_{-2/3}^{(1)}(\omega_0)}, \quad (14)$$

где

$$\omega_0 = \omega_{z=0} = \frac{k_0}{3a} \sin^3 \alpha. \quad (15)$$

При этом выражение для V имеет вид:

$$V = -e^{i\eta}, \quad (16)$$

где

$$\eta = -2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{H_{1/3}^{(1)}(\omega_0)}{H_{-2/3}^{(1)}(\omega_0)}. \quad (17)$$

Для коэффициента отражения от нижней границы примем $V_1 = 1$, что в случае радиоволн соответствует отражению горизонтально поляризованных волн от абсолютно проводящей границы. В акустике случай $V_1 = 1$ реализуется при отражении звуковых волн от границы вода — воздух.

Решение в виде ряда

Как показано в [2], деформируя контур интегрирования Γ , интегралы (1) и (5) можно представить в виде суммы вычетов по полюсам, расположенным в области $\operatorname{Im} \alpha \leq 0$; $0 \leq \operatorname{Re} \alpha \leq \frac{\pi}{2}$, и интегралов по берегам раз-

резов, если при деформировании контура Γ приходится обходить точки разветвления. В данном случае точки разветвления $\pm \text{Ar sh} \sqrt{2az}$ при деформировании пути интегрирования не затрагиваются. Следовательно, потенциал поля представляется только в виде суммы вычетов или, по терминологии П. Е. Краснушкина, суммой «нормальных волн»:

$$\psi_0 = 2\pi i \sum_l \text{Res} [\Phi_0(z, \alpha) H_0^{(1)}(k_0 r \cos \alpha) \cos \alpha]_{\alpha=\alpha_l}, \quad (18)$$

$$\psi = 2\pi i \sum_l \text{Res} [\Phi(\alpha) \varphi(z, \alpha) H_0^{(1)}(k_0 r \cos \alpha) \cos \alpha]_{\alpha=\alpha_l}, \quad (19)$$

где α_l — нули функции (8). Поскольку $V = -e^{i\eta}$ и $V_1 = -1$, то уравнение для полюсов α_l может быть записано в виде

$$\eta(\alpha) + 2k_0 h \sin \alpha = 2\pi l, \quad (20)$$

где l — целое число.

Вычислим значения вычетов в выражениях (18) и (19). Для этого нужно, как известно, знаменатель подинтегральных функций в (1) и (5), т. е. функцию $\Phi_2(\alpha)$, заменить на $\frac{d\Phi_2}{d\alpha}$ и затем α заменить всюду на α_l . Предполагая, что $k_0 r \cos \alpha_l \gg 1$, функцию $H_0^{(1)}(k_0 r \cos \alpha)$ заменим ее асимптотическим выражением. В результате получаем

$$\psi_0 = \sqrt{\frac{2\pi k_0}{r}} \exp\left\{-i\frac{\pi}{4}\right\} \sum_l A_0(z, \alpha_l) \exp\{ik_0 r \cos \alpha_l\}, \quad (21)$$

где

$$A_0(z, \alpha) = \frac{V \cos \alpha}{\eta' + 2k_0 h \cos \alpha} [\exp\{-ik_0 z \sin \alpha\} - \exp\{ik_0 z \sin \alpha\}] \times \\ \times [\exp\{ik_0 z_0 \sin \alpha\} - \exp\{i\eta + ik_0(2h - z_0) \sin \alpha\}], \quad (22)$$

$$\eta' \equiv \frac{d\eta}{d\alpha};$$

$$\psi = \sqrt{\frac{2\pi k_0}{r}} \exp\left\{-i\frac{\pi}{4}\right\} \sum_l A(z, \alpha_l) \exp\{ik_0 r \cos \alpha_l\}, \quad (23)$$

где

$$A(z, \alpha) = \frac{V \cos \alpha}{\eta' + 2k_0 h \cos \alpha} [\exp\{ik_0(h - z_0)\} - \exp\{ik_0(h + z_0) \sin \alpha\}] \varphi(z, \alpha). \quad (24)$$

Относительно функций Ганкеля, содержащихся в $\varphi(z, \alpha)$ и $\eta(\alpha)$, сделаем следующее замечание. В (21) и (23) функции φ и η берутся при значениях $\alpha = \alpha_l$. Полюсы α_l расположены в четвертой четверти, т. е. $-\frac{\pi}{2} \leq \arg \alpha_l \leq 0$; следовательно, согласно (13) $-\frac{3\pi}{2} \leq \arg w \leq 0$. Функции Ганкеля $H_{\nu}^{(1)}(w)$ и $H_{\nu}^{(2)}(w)$ при $|\arg w| > \pi$ определяются при помощи соотношений обхода. В данном случае для $H_{\frac{1}{2}}^{(1)}(w)$ и $H_{-\frac{1}{2}}^{(1)}(w)$, входящих в φ и η , соотношения обхода записываются в виде

$$H_{\frac{1}{2}}^{(1)}(w) = H_{\frac{1}{2}}^{(1)}(we^{i\pi}) + e^{-i\frac{\pi}{3}} H_{\frac{1}{2}}^{(2)}(we^{i\pi}), \quad (25)$$

$$H_{-\frac{1}{2}}^{(1)}(w) = -H_{-\frac{1}{2}}^{(1)}(we^{i\pi}) - e^{-i\frac{\pi}{3}} H_{-\frac{1}{2}}^{(2)}(we^{i\pi}), \quad (26)$$

где

$$-\pi < \arg (we^{i\pi}) \leq \pi. \quad (27)$$

В результате выражения (14) и (17) запишутся в виде

$$\varphi = 2 \left(\frac{w}{w_0} \right)^{1/2} \frac{H_{1/3}^{(1)}(w_0 e^{i\pi}) + e^{-i\pi/3} H_{2/3}^{(2)}(we^{i\pi})}{[H_{1/3}^{(1)}(w_0 e^{i\pi}) + e^{-i\pi/3} H_{1/3}^{(2)}(w_0)] + i [H_{-2/3}^{(1)}(w_0 e^{i\pi}) + e^{-i\pi/3} H_{-2/3}^{(2)}(we^{i\pi})]}, \quad (28)$$

$$\eta = 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{H_{1/3}^{(1)}(w_0 e^{i\pi}) + e^{-i\pi/3} H_{1/3}^{(2)}(w_0 e^{i\pi})}{H_{-2/3}^{(1)}(w_0 e^{i\pi}) + e^{-i\pi/3} H_{-2/3}^{(2)}(w_0 e^{i\pi})}. \quad (29)$$

В дальнейшем мы будем пользоваться приближенными выражениями функций φ и η , полученными в результате разложения их в ряды.

При малых w_0 и w , выражая функции Ганкеля через функции Бесселя, представляя последние в виде ряда и отбрасывая члены высших порядков, получаем

$$\varphi = \frac{2e^{-i\pi/6} \gamma w_0^{1/3}}{1 + e^{-i\pi/6} \gamma w_0^{1/3}} \left[1 - \frac{3}{2\gamma} e^{-i\pi/3} w^{2/3} \right], \quad (30)$$

$$\left. \begin{aligned} \eta &= i \sqrt{3} \left[\gamma w_0^{1/3} + (\gamma w_0^{1/3} - 2\gamma_1 w_0) \right] \\ \gamma &= \frac{1}{2^{1/3}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} \\ \gamma_1 &= \frac{3}{2} - \frac{1}{3} \gamma^3 \end{aligned} \right\}. \quad (31)$$

При больших значениях w_0 и w воспользуемся асимптотическим разложением функций Ганкеля:

$$H_\nu^{(1)}(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi u}} \exp \left\{ i \left(u - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right\} \left[1 + \frac{4\nu^2 - 1}{-8iu} + \dots \right], \quad (32)$$

$$-\pi < \arg u < 2\pi$$

$$H_\nu^{(2)}(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi u}} \exp \left\{ -i \left(u - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right\} \left[1 + \frac{4\nu^2 - 1}{8iu} + \dots \right]. \quad (33)$$

$$-2\pi < \arg u < \pi.$$

Используя (32) и (33), получаем из (28) и (29)

$$\varphi = \exp \{ i(w - w_0) \} + \exp \left\{ -i(w + w_0) - i \frac{\pi}{2} \right\}, \quad (34)$$

$$\eta = -2 \left(w_0 - \frac{\pi}{4} \right). \quad (35)$$

Поскольку разложение функции Ганкеля второго рода от аргумента $we^{i\pi}$ согласно (33) справедливо при $\arg (we^{i\pi}) < \pi$, то выражения (34) и (35) также справедливы только при этом условии, т. е. при $\arg w < 0$. Если $\arg w = 0$ (что при $\operatorname{Im} k_0 = 0$ соответствует вещественному углу скольжения), то нужно исходить из выражений (14) и (17).

В этом случае имеем

$$\varphi = \exp \{ i(w - w_0) \}. \quad (36)$$

$$V = 0 \quad (37)$$

Таким образом, коэффициент отражения плоской волны от неоднородной среды рассматриваемого вида при больших $w_0 = \frac{k_0}{3a} \sin^2 \alpha$, т. е. при достаточно больших углах скольжения, в первом приближении равен нулю. Если, однако, примем во внимание вторые члены разложений (32) и (33), то получим

$$\eta = i \ln(12w_0) - \frac{\pi}{2}. \quad (38)$$

При малом w_0 , но большом w , что возможно при малых углах скольжения и при большом удалении от однородного слоя (az достаточно велико), функции Ганкеля от аргумента w_0 надо разлагать в ряд в окрестности нуля, а функции от аргумента w представлять в асимптотическом виде. В результате получаем выражение для φ :

$$\varphi = 2^{-1/6} \sqrt{\frac{3}{\pi}} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \frac{(w_0^2/w)^{1/6}}{1 + \exp\{-i\pi/6\} \gamma w_0^{1/2}} \exp\left\{i\left(w - \frac{5}{12}\pi\right)\right\}. \quad (39)$$

Функция η при этом имеет вид (31).

Полюсы подынтегральных функций

Полюсы подынтегральных функций в (1) и (5) определяются корнями уравнения (20). Нахождение точных решений этого уравнения является трудной задачей. Мы воспользуемся приближенными выражениями для $\eta(\alpha)$, полученными выше. Функция η зависит от α только через w_0 . Рассмотрим уравнение (20) при больших значениях w_0 .

Подставляя (35) в (20), получаем уравнение для полюсов при больших w_0 :

$$x^3 - 3Sx + \left(l - \frac{1}{4}\right)\pi = 0, \quad (40)$$

где

$$x = \left(\frac{k_0}{3a}\right)^{1/2} \sin \alpha, \quad (41)$$

$$S = \frac{1}{3} k_0 h \left(\frac{3a}{k_0}\right)^{1/2}. \quad (42)$$

Поскольку (35) справедливо при $\arg w_0 < 0$, т. е. x не может быть положительным вещественным числом, то в выражении (40) надо брать $l > 0$. Кроме того, наименьшее l должно быть выбрано таким, чтобы соответствующий этому значению l полюс не лежал вблизи вещественной оси. Чтобы найти полюсы, расположенные вблизи вещественной оси, надо воспользоваться приближенным выражением (38). Подставляя (38) в (20), получаем

$$\frac{3i}{2} \ln x + 3Sx + \frac{i}{2} \ln 12 - \left(l - \frac{1}{2}\right)\pi = 0. \quad (43)$$

При больших S это уравнение можно решать методом последовательных приближений.

Подставляя (31) в (20), получаем уравнение для полюсов при малых w_0 :

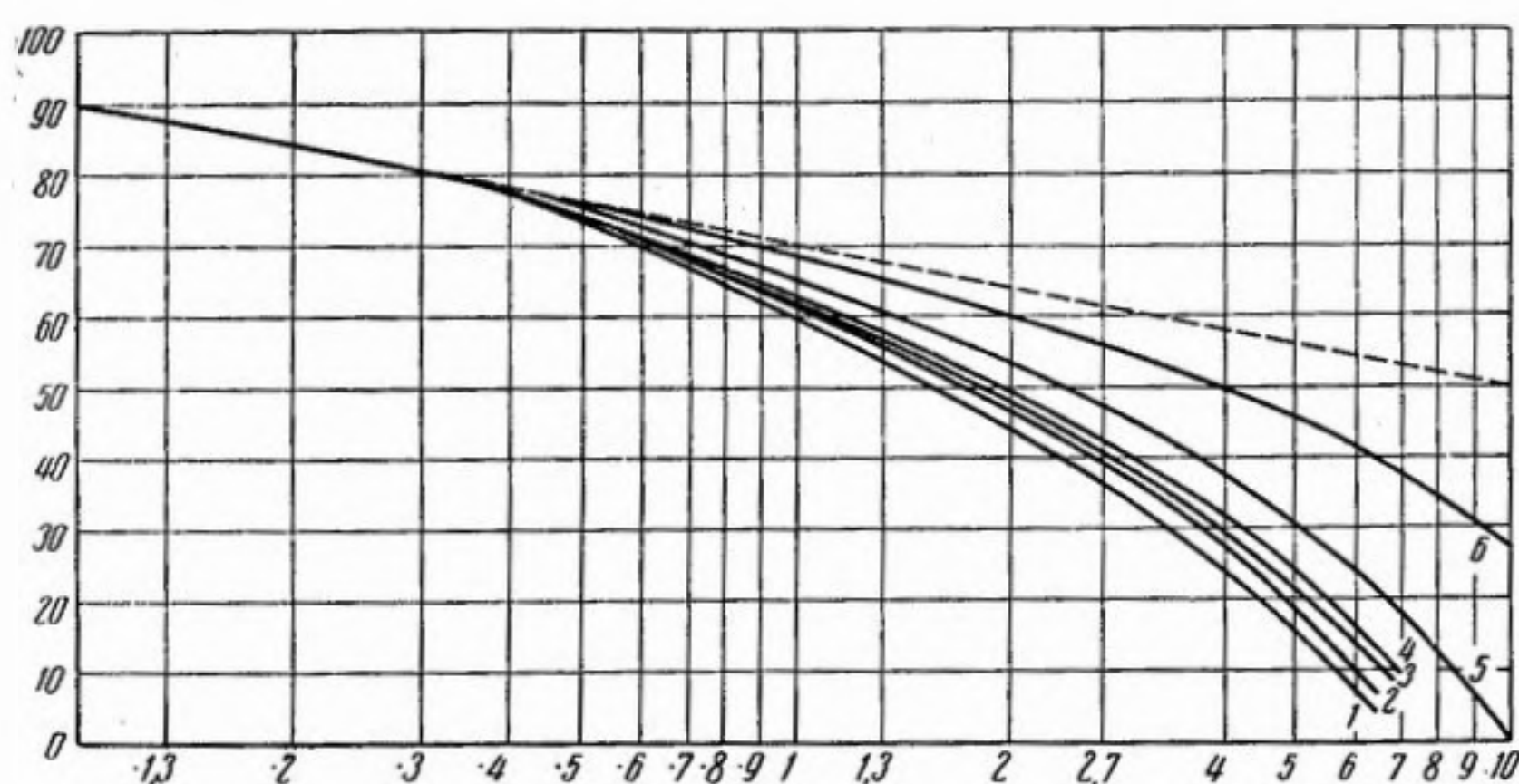
$$x^3 - \frac{1}{\gamma_1} \left(3S + \frac{1}{2} \gamma + i \frac{\sqrt{3}}{2} \gamma\right) x + \frac{\pi}{\gamma_1} l = 0. \quad (44)$$

Расположение полюсов определяется величиной S . При $S < 1$ полюсы находятся из уравнения (40) и расположены в области, соответствующей $|w_0| \gtrsim 1$ вдали от вещественной оси. При больших S первые полюсы

находятся из уравнения (44); эти полюсы расположены в области, соответствующей $|w_0| \leq 1$, вблизи вещественной оси. Уравнение (44) при больших S приближенно можно записать в виде $-3Sx + \pi l \approx 0$, откуда $x \sim \frac{l}{S}$. Поскольку x не должен превышать единицы, то число полюсов, определяемых из уравнения (44), порядка S . Полюсы более высоких номеров находятся из уравнений (43) и (40).

Оценка суммы вычетов

Зная полюсы α_l , можно произвести оценку сумм в выражениях (21) и (23). Из-за наличия множителя $\exp\{-k_0 r \operatorname{Im} \cos \alpha_l\}$ члены этих сумм убывают при увеличении r , причем тем быстрее, чем больше номер нормальной волны. Однако на достаточно близких расстояниях этот



Фиг. 2. Зависимость силы звука от безразмерной величины

$$qr = k_0 r \left(\frac{3a}{k_0} \right)^{2/3} :$$

1 — $n=0,2, m=0,2, S=0,2$; 2 — $n=1, m=0,2, S=0,2$; 3 — $n=0,2, m=0,4, S=0,4$; 4 — $n=1, m=0,4, S=0,5$; 5 — $n=0,4, m=0,2, S=0,8$; 6 — $n=0,4, m=0,2, S=1$. Пунктирная прямая изображает квадратичный закон спада

убывающий множитель для нормальных волн, соседних по номеру, мало различается. При этом играет роль достаточно большое число нормальных волн. В пределах однородного слоя амплитуды возбуждения ряда первых нормальных волн мало отличаются друг от друга. Поэтому расстояние, при котором еще играет роль большое число нормальных волн, должно определяться из условия

$$k_0 r \operatorname{Im} \cos \alpha \ll 1. \quad (45)$$

Если применить это неравенство к $\alpha_{l=1}$ и воспользоваться уравнением (44) для отыскания x_1 , то (45) может быть записано в виде

$$r \ll \frac{h^2}{\lambda} S. \quad (46)$$

При r , удовлетворяющих условию (46), сумму нормальных волн можно заменить интегралом. Последний даст нам значение поля в приближении лучевой теории. На доказательстве этого положения, так же как и на вычислении поля лучевыми методами, мы позволим себе не останавливаться.

Для нас существенный интерес представляет область сравнительно далеких расстояний, когда условие (46) не выполняется. Поле при этом

следует вычислять суммированием нормальных волн. Это вычисление не представляет больших трудностей, поскольку при больших r ряды быстро сходятся.

На фиг. 2 графически изображен закон спадаения силы звука в однородном слое с расстоянием для значений S , равных 0,2; 0,4; 0,8 и 1. По оси ординат откладывается $10 \lg |\psi_0|^2$, т. е. по существу сила звука в децибелах. Нуль отсчета децибел выбран произвольно, что соответствует определению ψ_0 с точностью до постоянного множителя.

Параметры m , n определяют соответственно глубину расположения излучателя и приемника и равны $m = z_0/h$, $n = z/h$.

Из фиг. 2 видно, что положение приемника в пределах однородного слоя не сказывается сколько-нибудь существенно на законе спадаения и что сила звука спадает с расстоянием тем быстрее, чем меньше S . На малых расстояниях закон спадаения близок к $1/r^2$, отмеченному на фигуре пунктирной линией. Чем больше значения S , тем на большие расстояния простирается квадратичный закон спадаения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. М. Бреховских. О поле точечного излучателя в слоисто-неоднородной среде. Известия АН СССР, серия физ., 1949, 8, № 5.
2. Л. М. Бреховских. Об одном случае распространения звука в неоднородной среде. ДАН, 1952, 87, № 5.

Акустический институт АН СССР
Москва

Поступила в редакцию
15 ноября 1954 г.