

НАПРАВЛЕННЫЕ СВОЙСТВА ЗВУКОВЫХ  
РАССЕИВАЮЩИХ ЛИНЗ

Л. Н. Бондарева и М. И. Карновский

Рассчитываются угловые распределения звукового давления, создаваемого плоско-эллиптическими и плоско-гиперболическими звуковыми линзами при различных значениях показателя преломления, угла раскрытия и расстояния от мнимого фокуса линзы.

В [1] была приведена методика расчета распределения давления  $P(\varphi)$  и скорости  $V(\varphi)$  на контрольной сферической поверхности звуковых рассеивающих линз. Было показано, что для сферических плоско-эллиптических рассеивающих линз при значениях  $kr_0$ , больших нескольких единиц:

$$\frac{P(\varphi)}{P(0)} \approx \frac{V(\varphi)}{V(0)} \approx \sqrt{\frac{I(\varphi)}{I(0)}}, \tag{1}$$

где  $I(\varphi)$  — сила звука на контрольной поверхности под углом  $\varphi$ ,  $r_0$  — радиус контрольной сферы, равный фокусному расстоянию  $f$  [1, 2, 3],  $k = \omega/c$ .

Распределение  $I(\varphi)$  было получено Л. Д. Розенбергом [2,3].

При значениях  $kr_0$ , меньших нескольких единиц, соотношение (1) становится недействительным, и в этом случае распределения давления и скорости на контрольной поверхности и на конечном расстоянии от линзы не совпадают друг с другом и с распределением  $\sqrt{I(\varphi)}$ .

В настоящей работе приводятся характеристики направленности сферических плоско-эллиптических и плоско-гиперболических рассеивающих линз при различных значениях показателя преломления  $m$ , угла раскрытия  $\varphi_m$ , частоты  $\omega$  и расстояния  $r$  от центра контрольной сферы. Как и в [1], под характеристикой направленности мы понимаем угловое распределение давления или скорости при любом значении  $r > r_0$ .

Если распределение комплексной амплитуды давления на контрольной поверхности  $\bar{P}_m(\varphi)$  представляется [1, 4] в виде ряда

$$\bar{P}_m(\varphi) = \sum_n C_n P_n(\cos \varphi) \bar{z}_n = \sum_n C'_n P_n(\cos \varphi), \tag{2}$$

то на расстоянии  $r$  от центра контрольной сферы

$$\bar{P}_{rm}(\varphi) = \bar{A} \sum_n C'_n P_n(\cos \varphi) \frac{f_n(jkr)}{f_n(jkr_0)}, \tag{3}$$

где  $P_n(\cos \varphi)$  — полином Лежандра (зональная шаровая функция)  $n$ -го порядка,  $f_n(jkr)$  — полином Стокса  $n$ -го порядка,  $\bar{A} = \frac{r_0}{r} \exp[-jk(r - r_0)]$ .

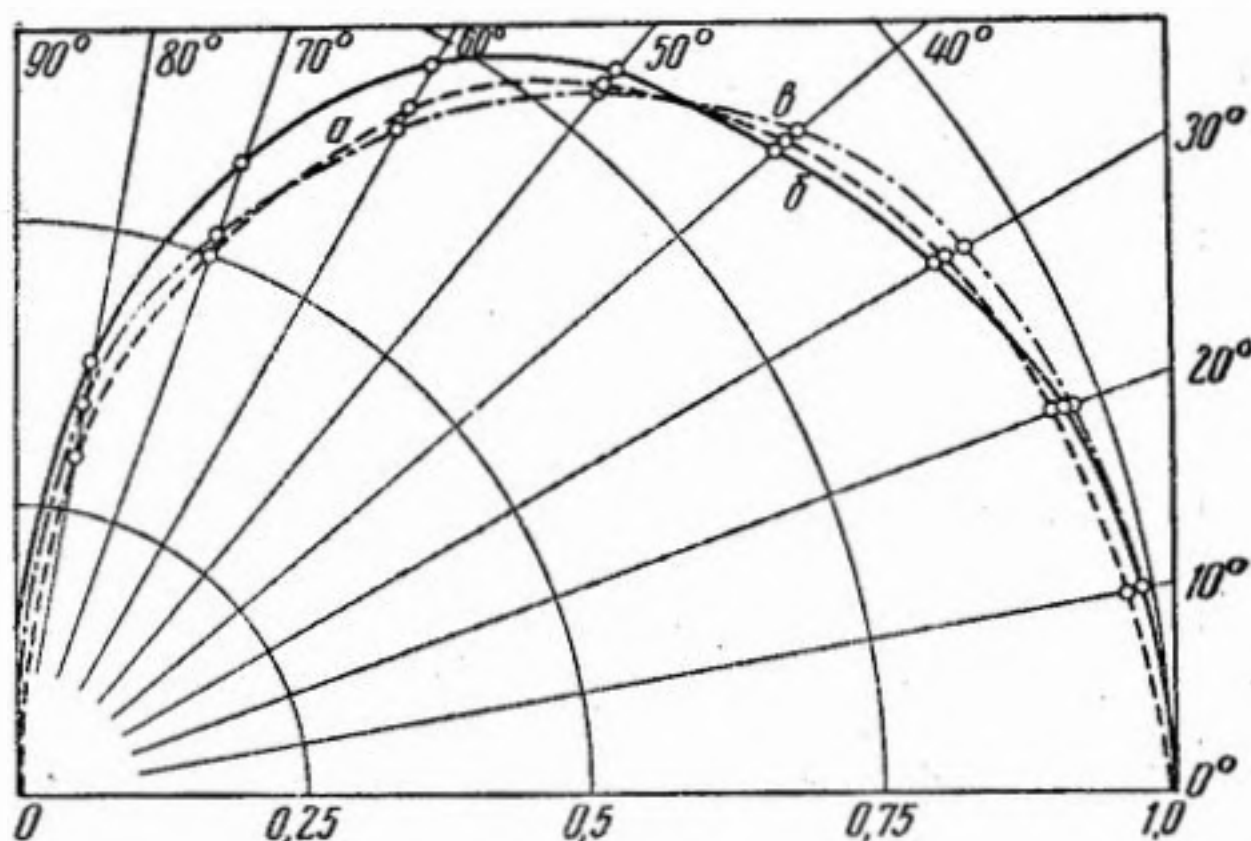
Так как  $f_n(jkr) \approx 1$  при достаточно больших  $kr$ , то вдали от линзы

$$\bar{P}_{\infty m}(\varphi) = \bar{A} \sum_n \frac{C'_n P_n(\cos \varphi)}{f_n(jkr_0)}. \tag{4}$$

Характеристика направленности по давлению определяется угловым распределением эффективного значения давления

$$P_r(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2}} |\bar{P}_{rm}(\varphi)|. \quad (5)$$

Как было показано в 1940 г. одним из авторов данной статьи [4], если разложение (2) содержит шаровые функции только близких порядков, то, начиная со значений  $kr_0$  порядка нескольких единиц, нормированная характеристика направленности практически не зависит от  $kr$  и приближается к угловому распределению давления на поверхности  $r = r_0$ . Если же (2) содержит составляющие сильно различающихся порядков, то указанная стабильность характеристик направленности практически наступает при значительно больших значениях  $kr_0$ .



Фиг. 1

*a* — распределение давления на контрольной сфере по Л. Д. Розенбергу, *b* — то же, по формуле (8) и *c* — характеристика направленности при  $kr = \infty$  для плоско-эллиптической линзы при  $m = 0$  и  $kr_0 = 3$

Для сферических плоско-эллиптических рассеивающих линз при  $kr_0$ , больших нескольких единиц (в работе принято  $kr_0 = 3$ ), распределение давления на контрольной сфере приближается к распределению, полученному Л. Д. Розенбергом [2]:

$$\left. \begin{aligned} \frac{P(\varphi)}{P(0)} &= \frac{(1-m)(\cos \varphi - m)^{1/2}}{(1-m \cos \varphi)^{3/2}} \quad \text{при } \varphi \leq \varphi_m, \\ \frac{P(\varphi)}{P(0)} &= 0. \quad \text{при } \varphi > \varphi_m. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Для не полностью раскрытых линз

$$\varphi_m < \varphi_{пр} = \arccos m,$$

где  $\varphi_{пр}$  — предельный угол раскрытия. Для полностью раскрытых линз  $\varphi_m = \varphi_{пр}$ .

Учитывая (6), получаем

$$C'_n = P(0) \frac{2n+1}{2} \int_{\cos \varphi_m}^1 \frac{(1-m)(\cos \varphi - m)^{1/2}}{(1-m \cos \varphi)^{3/2}} P_n(\cos \varphi) d(\cos \varphi). \quad (7)$$

Интегрирование (7) производилось приближенным методом Симпсона.

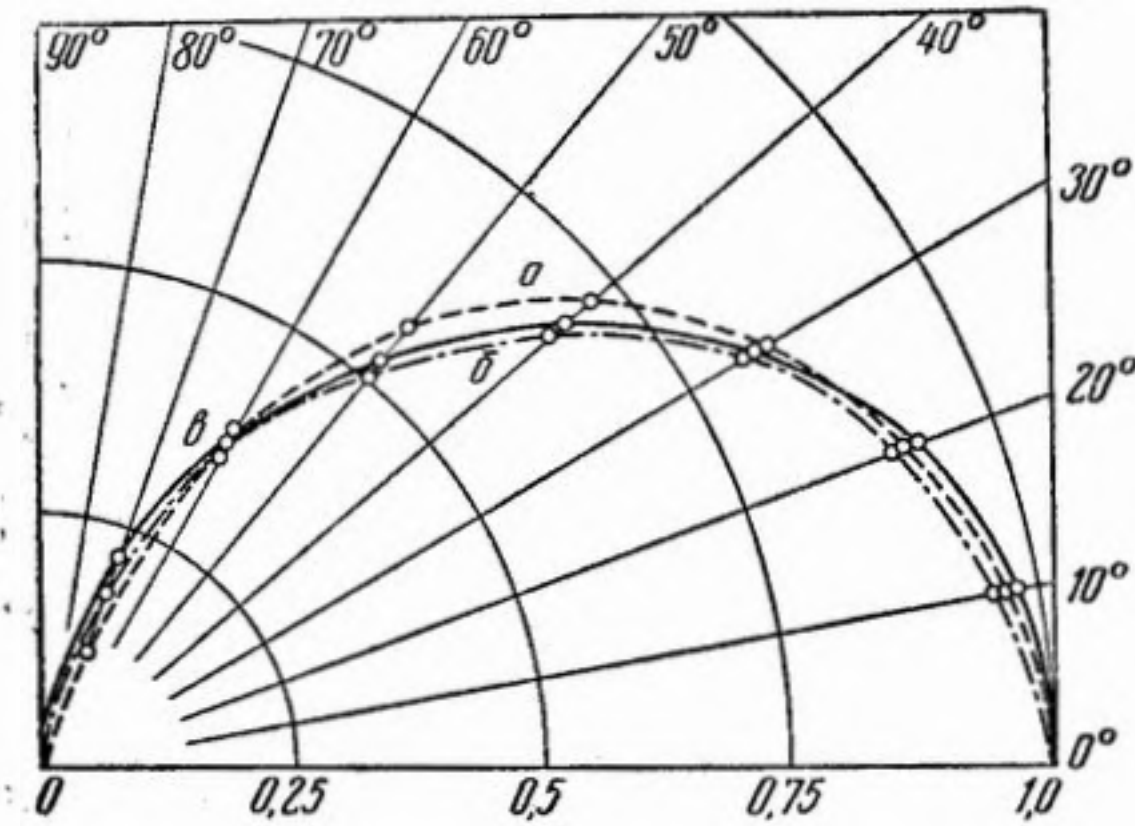
Подсчеты показывают, что хорошая аппроксимация заданного распределения (6) рядом (2) получается при учете полиномов Лежандра до четвертого-седьмого порядка включительно.

Так, для полностью раскрытой плоско-эллиптической линзы с показателем преломления  $m = 0$ , распределение (6) (фиг. 1, *a*) аппроксимирует-

ся рядом (фиг. 1, б), в котором существенны полиномы до четвертого-пятого порядка включительно:

$$\begin{aligned} \frac{P(\varphi)}{P(0)} = & 0,333P_0 + 0,6P_1 + 0,239P_2 - 0,156P_3 - \\ & - 0,119P_4 + 0,093P_5 + 0,08P_6 - 0,06P_7. \end{aligned} \quad (8)$$

При  $m = 0,3$  распределение давления на контрольной сфере (фиг. 2, а) аппроксимируется рядом



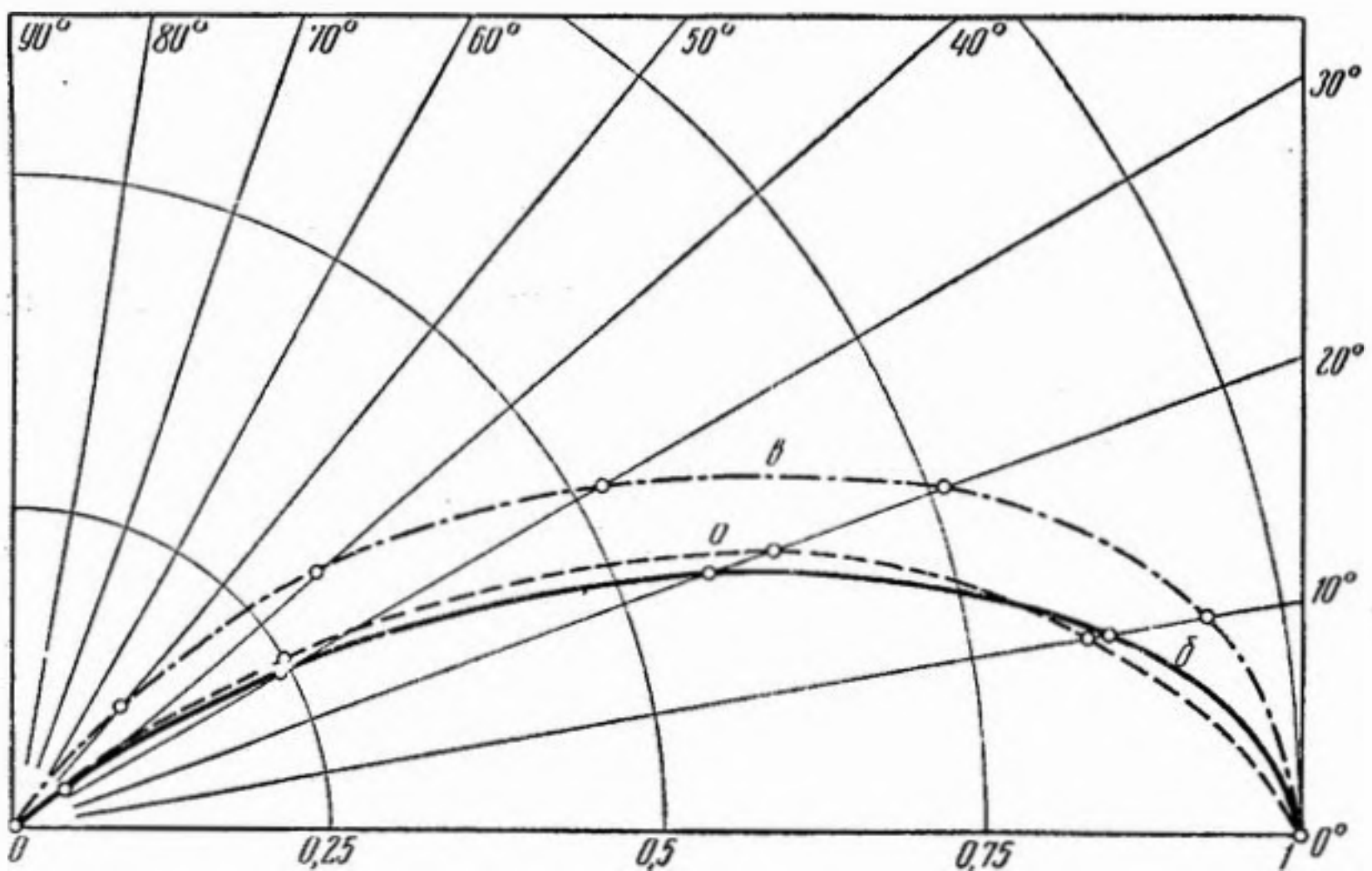
Фиг. 2

а — распределение давления на контрольной сфере по формуле (9) и характеристики направленности при  $kr = 6$  (б) и  $kr = \infty$  (в) для плоско-эллиптической линзы при  $m = 0,3$  и  $kr_0 = 3$

$$\begin{aligned} \frac{P(\varphi)}{P(0)} = & 0,198P_0 + 0,440P_1 + \\ & + 0,364P_2 + 0,102P_3 - \\ & - 0,091P_4 - 0,084P_5 + \\ & + 0,025P_6 + 0,077P_7. \end{aligned} \quad (9)$$

При бóльших значениях  $m$ , когда распределение давления становится более направленным, возрастает удельный вес составляющих более высоких порядков. Так, при  $m = 0,8$  распределение (б) (фиг. 3, а) представляется рядом (фиг. 3, б)

$$\begin{aligned} \frac{P(\varphi)}{P(0)} = & 0,046P_0 + 0,128P_1 + 0,185P_2 + 0,206P_3 + 0,194P_4 + 0,153P_5 + \\ & + 0,096P_6 + 0,041P_7. \end{aligned} \quad (10)$$



Фиг. 3

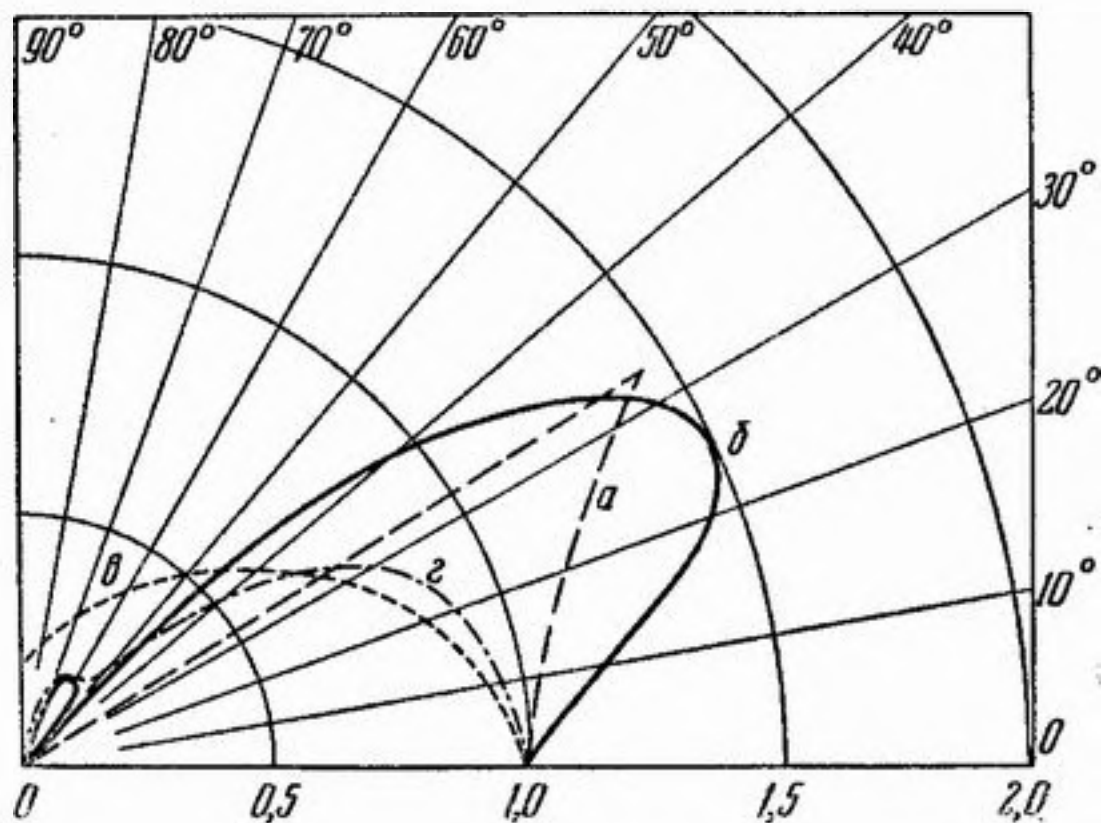
а — распределение давления на контрольной сфере по Л. Д. Розенбергу, б — то же, по формуле (10) и в — характеристика направленности при  $kr = \infty$  для плоско-эллиптической линзы при  $m = 0,8$  и  $kr_0 = 3$ .

Нормированные характеристики направленности вдали от системы, определенные на основании соотношений (4) и (5), приведены на фиг. 1, 2, 3 (кривые  $\delta$ ). На фиг. 2 приведена также нормированная характеристика направленности при  $kr = 6$ , т. е. на расстоянии  $r = 2r_0$ .

Фиг. 1, 2, 3 иллюстрируют замечательное свойство плоско-эллиптических рассеивающих линз — независимость характеристик направленности  $S_r(\varphi)$  от  $kr$ , начиная со значений  $kr_0$  порядка нескольких единиц; эти характеристики практически совпадают с распределением давления на контрольной сфере. Указанные положения объясняются тем [4], что в разложении (2) существенными оказываются составляющие близких порядков, а также тем, что при значениях  $kr_0$ , больших нескольких единиц, распределение давления (или скорости) на контрольной сфере практически определяется только показателем преломления.

При значениях  $m$ , близких к единице, возрастает количество составляющих ряда (2), существенных для аппроксимации распределения давления на контрольной поверхности; при этом стабильность  $S_r(\varphi)$  достигается при значительно больших значениях  $kr_0$ .

Из этих же соображений следует, что стабильность  $S_r(\varphi)$  неполностью раскрытых линз также должна достигаться при больших значениях  $kr_0$ . Так, при углах раскрытия порядка  $15-20^\circ$  стабильность практически наступает, начиная со значений  $kr_0$  порядка  $20-25$ . При малых значениях  $kr_0$  наблюдается значительное изменение направленности с изменением  $kr$ .



Фиг. 4

$a$  — распределение давления на контрольной сфере по Л. Д. Розенбергу,  $b$  — то же, по формуле (12) и характеристике направленности при  $kr_0 = 3$  ( $c$ ) и  $kr_0 = 20$  ( $d$ ) для плоско-гиперболической линзы при  $m = 3$ ,  $\varphi_m = 33^\circ$  и  $kr = \infty$

Распределение энергии на выходе плоско-гиперболической линзы таково, что угловые распределения давления и скорости на контрольной сфере существенно отличаются друг от друга. Однако для упрощения расчетов  $S_r(\varphi)$  мы принимаем здесь, что  $P(\varphi)$  и  $V(\varphi)$  на контрольной сфере выражаются соотношениями, полученными Л. Д. Розенбергом [3]:

$$\left. \begin{aligned} \frac{P(\varphi)}{P(0)} &= \frac{(m-1)(m-\cos\varphi)^{1/2}}{(m\cos\varphi-1)^{3/2}} && \text{при } \varphi \leq \varphi_m, \\ \frac{P(\varphi)}{P(0)} &= 0 && \text{при } \varphi > \varphi_m, \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

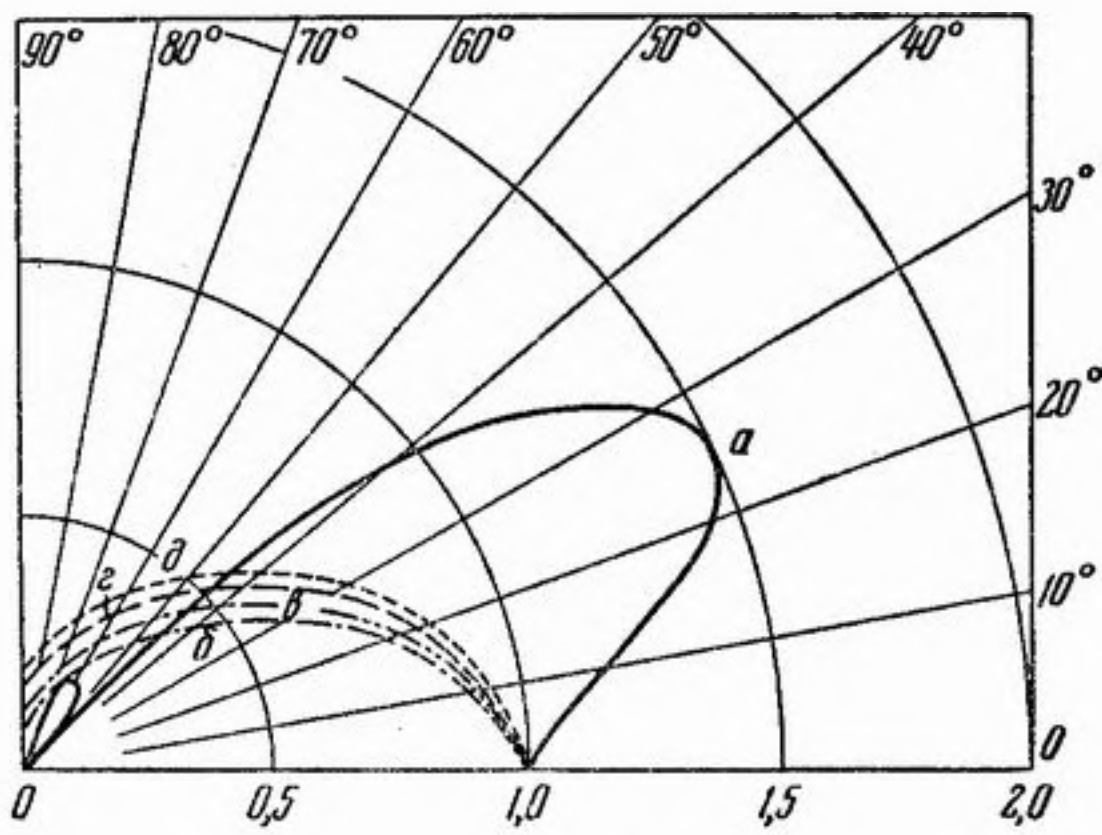
где  $\varphi_m \leq \varphi_{пр} = \arccos(1/m)$ .

Распределение давления (11) при  $m = 3$  и  $\varphi_m = 33^\circ$  приведено на фиг. 4,  $a$ . Хорошая аппроксимация этого распределения рядом (2) может быть получена лишь при большом количестве членов ряда. Так, при сохранении полиномов до седьмого порядка включительно

$$\begin{aligned} \frac{P(\varphi)}{P(0)} &= 0,166P_0 + 0,427P_1 + 0,530P_2 + 0,560P_3 + \\ &+ 0,162P_4 - 0,135P_5 - 0,350P_6 - 0,403P_7 \end{aligned} \quad (12)$$

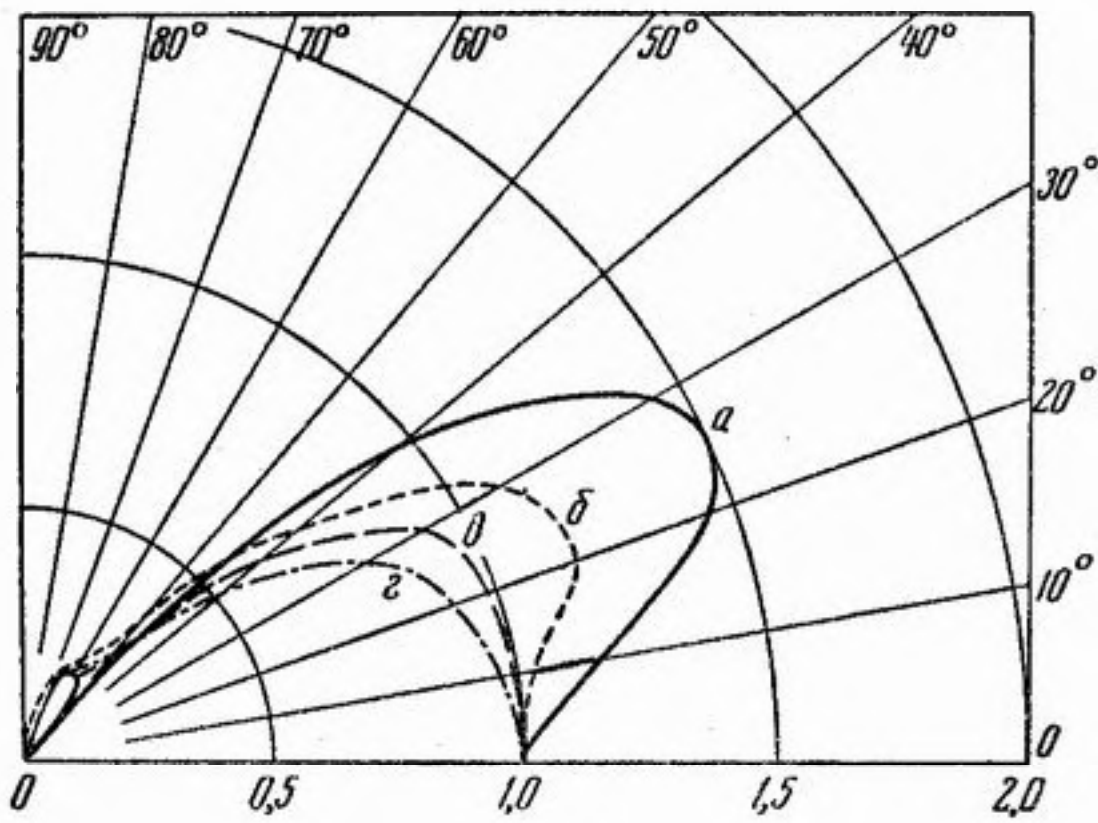
получаем кривую, представленную на фиг. 4,  $b$ .

Следует отметить, что сохранение в разложении (2) полиномов до



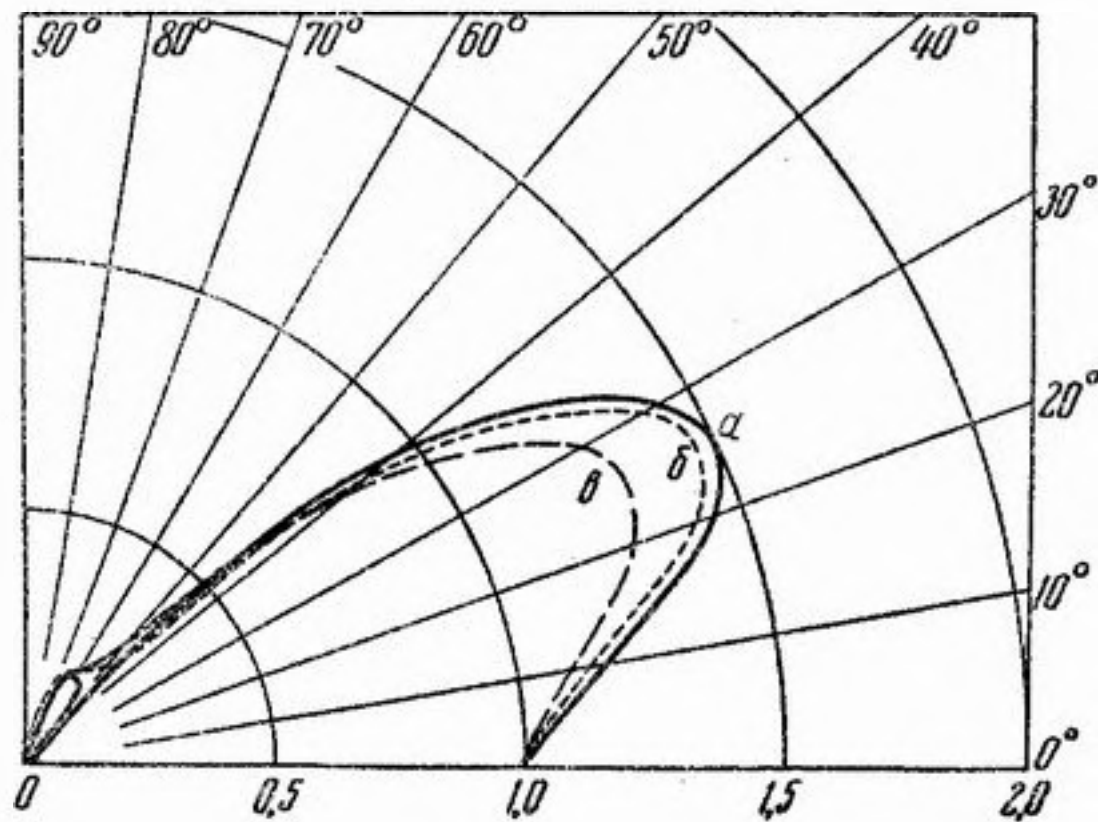
Фиг. 5.

$\alpha$  — распределение давления на контрольной сфере по формуле (12) и характеристики направленности при  $kr = 6$  ( $\beta$ ),  $kr = 9$  ( $\gamma$ ),  $kr = 50$  ( $\delta$ ) и  $kr = \infty$  ( $\theta$ ) для плоско-гиперболической линзы при  $m = 3$ ,  $kr_0 = 3$ ,  $\varphi_m = 33^\circ$



Фиг. 6

$\alpha$  — распределение давления на контрольной сфере по формуле (12) и характеристики направленности при  $kr = 50$  ( $\beta$ ),  $kr = 100$  ( $\gamma$ ),  $kr = \infty$  ( $\delta$ ) для плоско-гиперболической линзы при  $m = 3$ ,  $kr_0 = 20$ ,  $\varphi_m = 33^\circ$



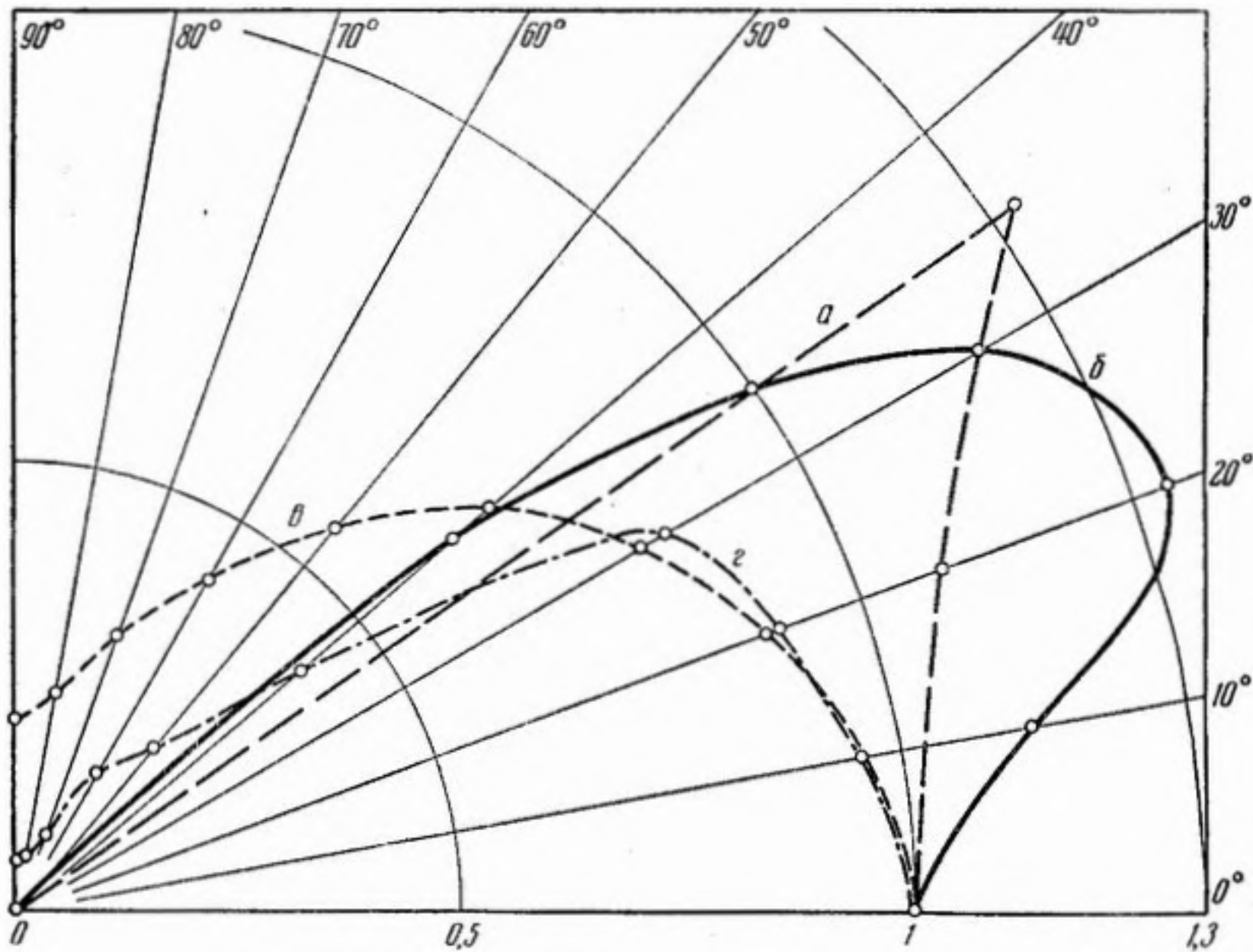
Фиг. 7

$\alpha$  — распределение давления на контрольной сфере по формуле (12) и характеристики направленности при  $kr = 100$  ( $\beta$ ) и  $kr = \infty$  ( $\gamma$ ) для плоско-гиперболической линзы при  $m = 3$ ,  $kr_0 = 50$  ( $\delta$ ) и при  $\varphi_m = 33^\circ$

16-го порядка включительно все еще недостаточно для хорошей аппроксимации (11).

Хотя (12) является лишь весьма приближенной аппроксимацией (11), однако (12) сохраняет характерную особенность плоско-гиперболических рассеивающих линз, заключающуюся в том, что максимум давления сдвинут по отношению к оси на некоторый угол. Анализ направленности при распределении давления (12) позволит нам сделать ряд выводов, характерных для плоско-гиперболических линз.

На фиг. 4 приведены также характеристики направленности вдали от системы в предположении, что (12) задано на контрольной сфере при  $kr_0 = 3$  и  $kr_0 = 20$ . На фиг. 5, 6, 7 приведены  $S_r(\varphi)$  для различных  $kr$



Фиг. 8.

$\alpha$ —распределение давления на контрольной сфере по Л. Д. Розенбергу,  $\beta$ —тоже аппроксимированное рядом (2) и характеристики направленности плоско-гиперболической линзы с показателем преломления  $m = \infty$  и  $\varphi_m = 35^\circ$ , при  $kr_0 = 3$  и  $kr = \infty$  ( $\epsilon$ ) и при  $kr_0 = 20$  и  $kr = \infty$  ( $\zeta$ )

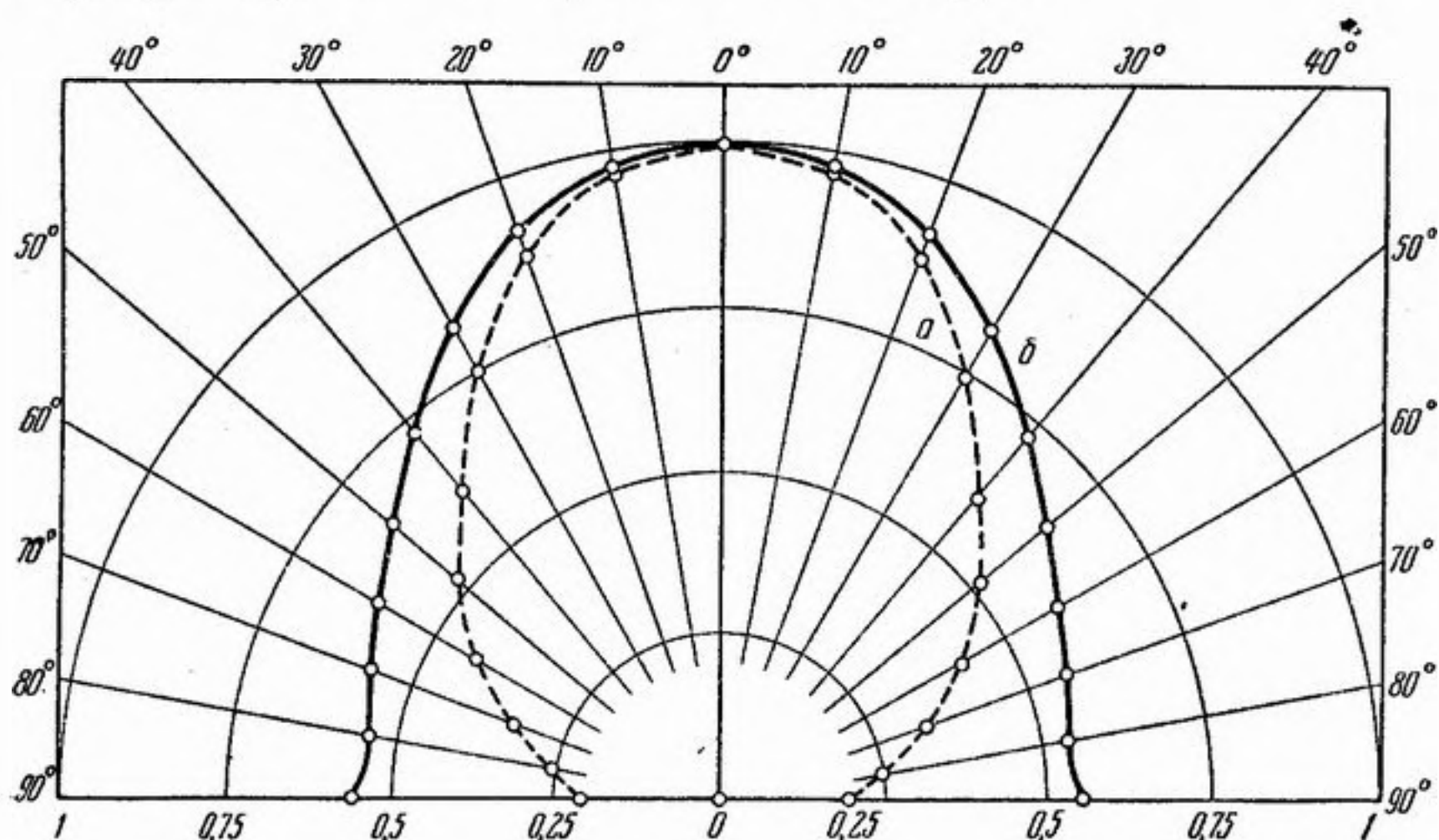
и  $kr_0$ . Аналогичные кривые для линзы с  $m = \infty$  и  $\varphi_m = 35^\circ$  приведены на фиг. 8. Из приведенных фигур следует, что  $S_r(\varphi)$  сферических плоско-гиперболических рассеивающих линз при различных  $kr$  существенно отличаются от принятого распределения давления на контрольной сфере. Это различие тем больше, чем меньше  $kr_0$ . Так, при  $kr_0 = 3$ , даже вблизи линзы ( $kr = 6$ , т. е.  $r = 2r_0$ ) характеристика направленности (фиг. 5, б) резко отличается от (12), но не сильно изменяется при дальнейшем увеличении  $kr$ .

Это обуславливается тем, что при малых  $kr_0$  уменьшение составляющих ряда (3) с увеличением расстояния происходит быстрее для составляющих с большими значениями  $n$ . Так, при  $kr_0 = 3$  и  $kr = 6$  характеристика направленности пропорциональна модулю комплексного ряда, действительная ( $R$ ) и мнимая ( $J$ ) составляющие которого имеют вид:

$$\begin{aligned}
 R &= 0,166P_0 + 0,406P_1 + 0,408P_2 + 0,197P_3 - 0,033P_4 + 0,174P_5 + \\
 &\quad + 0,025P_6 + 0,010P_7, \\
 J &= 0,064P_1 + 0,215P_2 + 0,376P_3 + 0,064P_4 - 0,021P_5 - \\
 &\quad - 0,013P_6 - 0,003P_7.
 \end{aligned}
 \tag{13}$$

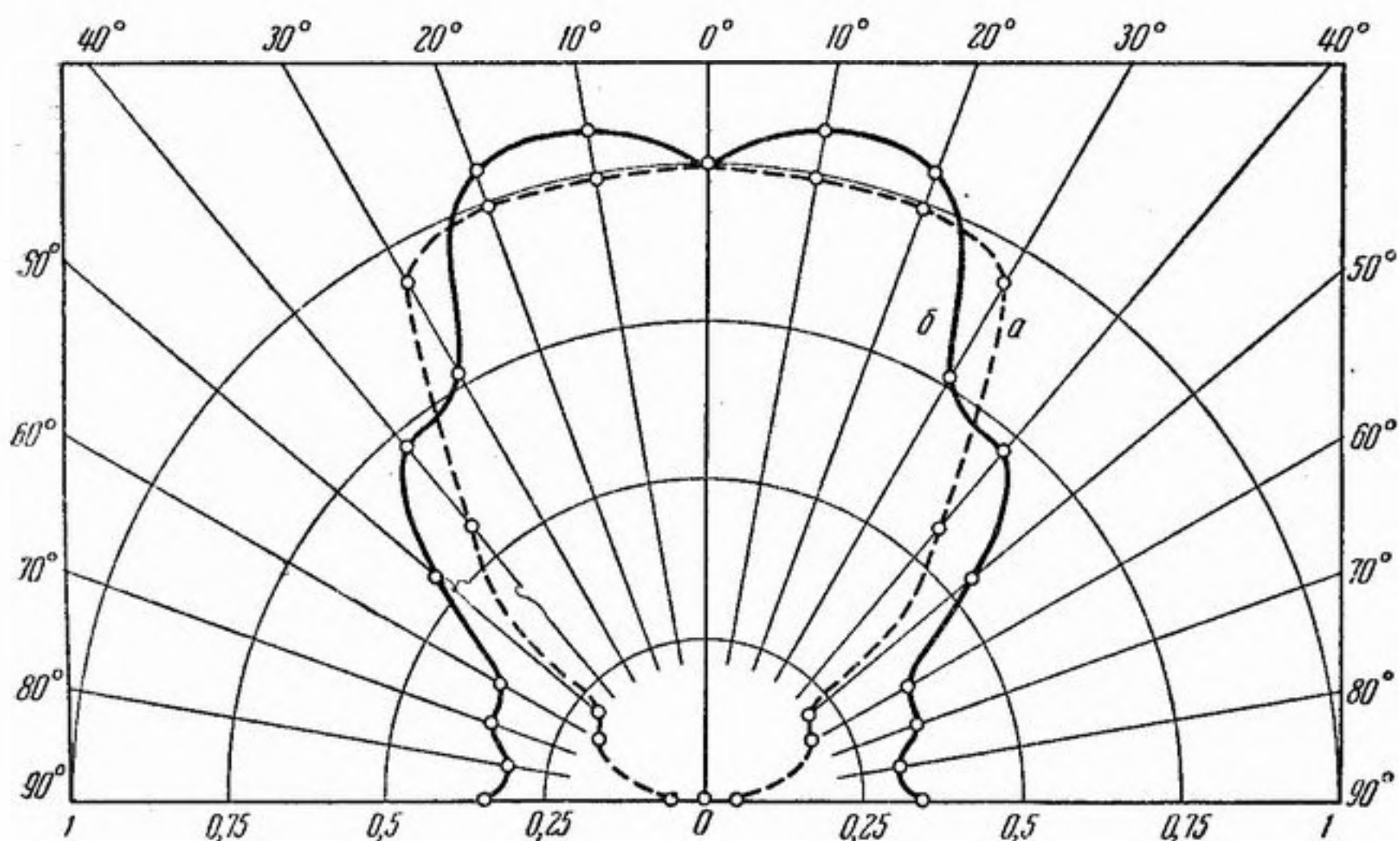
В (13) основное значение имеют полиномы до третьего порядка, тогда как в (12) существенны полиномы и более высоких порядков.

Следует отметить, что характеристики направленности при  $kr > (3 \div 5) kr_0$  и при  $kr \rightarrow \infty$  практически совпадают.



Фиг. 9

Теоретическая (а) и экспериментальная (б) характеристики направленности плоско-гиперболической линзы при  $m = 5$ ,  $\varphi_m = 35^\circ$ ,  $kr_0 = 3$ ,  $kr = 15$



Фиг. 10

Теоретическая (а) и экспериментальная (б) характеристики направленности плоско-гиперболической линзы при  $m = 5$ ,  $\varphi_m = 35^\circ$ ,  $kr_0 = 20$ ,  $kr = 100$

При  $kr_0 = 20$  (фиг. 6)  $S_r(\varphi)$  уже приобретают максимум не по оси и лишь при  $kr_0 = 50$  (фиг. 7) приближаются к принятому распределению давления на контрольной сфере и практически не зависят от  $kr$ .

Следует отметить, что в действительности давление на контрольной сфере выражается рядом с большим количеством полиномов, чем это было принято выше. Поэтому действительные  $S_r(\varphi)$  еще более изменяются с частотой и расстоянием.

На основании произведенных расчетов можно утверждать, что характеристики направленности плоско-гиперболических рассеивающих линз

не зависят от частоты и расстояния и приближаются к распределению давления на контрольной поверхности, начиная со значений  $kr_0$ , не меньших  $50 \div 100$ .

Стабильность характеристик направленности указанных линз уменьшается при

$$m \rightarrow 1, \varphi_m \rightarrow 0 \text{ и } \varphi_m \rightarrow \varphi_{\text{пр}}. \quad (14)$$

На фиг. 9 и 10 сопоставляются теоретические (а) и экспериментальные (б) характеристики направленности сферической плоско-гиперболической рассеивающей линзы с  $m = 5$  и углом открытия  $\varphi_m = 35^\circ$  при  $kr_0 = 3$ ,  $kr = 15$  (фиг. 9) и  $kr_0 = 20$ ,  $kr = 100$  (фиг. 10).

Экспериментальное исследование различных сферических и цилиндрических плоско-гиперболических рассеивающих линз, выполненных из наклонных металлических пластин, показало целесообразность использования таких линз для улучшения направленных свойств громкоговорителей в области высоких частот.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Н. Бондарева и М. И. Карновский. Направленные свойства рассеивающих звуковых линз. I. Тр. Комиссии по акустике, 1955, 8, 114—124.
2. Л. Д. Розенберг. Плоско-эллиптические звуковые линзы. Тр. Комиссии по акустике, 1950, 5, 114—119.
3. Л. Д. Розенберг. Плоско-гиперболические звуковые линзы. Тр. Комиссии по акустике, 1951, 6, 114—124.
4. М. И. Карновский. Направленные свойства сферических излучателей. ЖТФ, 1940, 10, 12, 970—979.

Киевский политехнический  
институт

Поступила в редакцию  
15 ноября 1954 г.