

ИЗЛУЧЕНИЕ ЗВУКА КОЛЕБЛЮЩИМИСЯ ГРАНЯМИ
ПРОИЗВОЛЬНОГО КЛИНА. ЧАСТЬ I

Г. Д. Малюжинец

При помощи интеграла Зоммерфельда получено точное решение для поля звукового давления в клиновидной области, вызываемого колебаниями границ. Подробнее рассматривается случай, когда колебательная скорость на каждой из двух граней постоянна. Указана связь между решениями данной задачи и задачи диффракции на жестком клине.

1. Постановка задачи

Пусть две жесткие полуплоскости образуют границу клиновидной области $-\Phi < \varphi < \Phi$, заполненной средой, где могут распространяться звуковые волны (фиг. 1).

Каждая из граничных полуплоскостей совершает малые синусоидальные колебания в нормальном направлении так, что в область $-\Phi < \varphi < \Phi$ излучаются звуковые волны.

Пусть скорость колебательного движения грани $\varphi = \Phi$ равна $v_1 e^{-i\omega t}$, а для грани $\varphi = -\Phi$ равна $v_2 e^{-i\omega t}$, причем положительным направлением для обеих скоростей считаем направление внутрь области. Амплитуды скоростей v_1 и v_2 будем считать постоянными вдоль каждой грани, хотя применяемый ниже метод решения пригоден также для случая синусоидального распределения скоростей на гранях.

Рассматриваемая задача состоит в том, чтобы найти вынужденное колебание, возбуждаемое в области $-\Phi < \varphi < \Phi$ колебаниями граней.

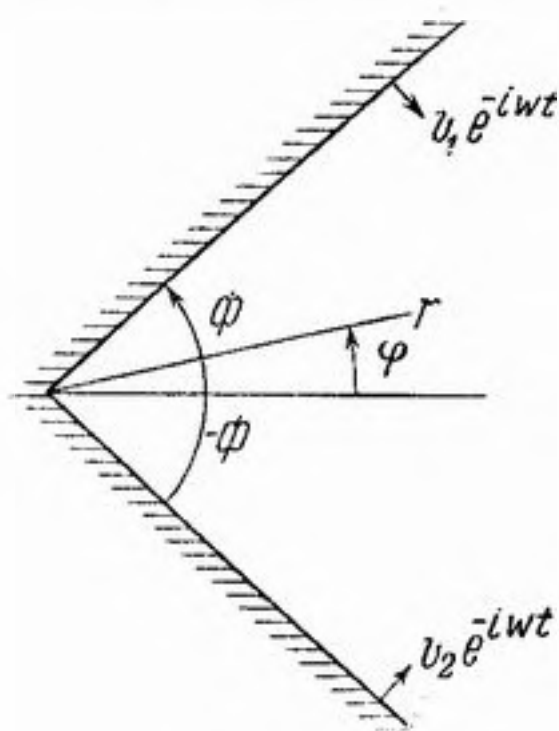
В случае вынужденных колебаний искомое поле звукового давления должно иметь вид: $P = p e^{-i\omega t}$, где p — функция только пространственных координат, так что задача может быть сформулирована непосредственно для комплексной амплитуды p , удовлетворяющей дифференциальному уравнению $\Delta p + k^2 p = 0$ ($\frac{\omega}{c} = k$, c — скорость звука).

В звуковом поле связь между давлением P и скоростью $v = V e^{-i\omega t}$ в направлении n дается основным уравнением акустики

$$\rho \frac{\partial V}{\partial t} = - \frac{\partial P}{\partial n} \quad (\rho \text{ — плотность среды})$$

и, следовательно, поскольку мы приняли зависимость от времени по закону $e^{-i\omega t}$:

$$v = \frac{1}{ik\rho c} \frac{\partial p}{\partial n}$$



Фиг. 1

Считая n внутренней нормалью к границе и заметив, что для верхней грани $\frac{\partial}{\partial n_{(\varphi=\Phi)}} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi}$, для нижней грани $\frac{\partial}{\partial n_{(\varphi=-\Phi)}} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi}$, мы можем написать краевые условия нашей задачи так:

$$-\frac{1}{ikrcr} \frac{\partial p}{\partial \varphi} = v_1, \quad \text{при } \varphi = \Phi,$$

$$\frac{1}{ikrcr} \frac{\partial p}{\partial \varphi} = v_2, \quad \text{при } \varphi = -\Phi.$$

Рассматриваемая задача является частным случаем общей задачи о вынужденных колебаниях в произвольной области, для обеспечения единственности решения которой требуется наложить еще дополнительное условие, состоящее в принципе погашаемости [1], [2].

Согласно этому принципу решение задачи $p(x, y, z; k)$, представляющее собой аналитическую функцию параметра k , должно быть ограничено в области $-\Phi \leq \varphi \leq \Phi$ для какого-либо комплексного значения k (и значений, лежащих в некоторой его окрестности), расположенного в области

$$|k| > 0; \quad 0 < \arg k < \pi^*.$$

Уравнением, краевыми условиями, требованием ограниченности, а также требованием однозначности на границе клина решение поставленной задачи определяется единственным образом.

Вследствие линейности задачи искомое звуковое давление $p(r, \varphi)$ можно представить в виде $p = p_1 + p_2$, где p_1 — давление, обусловливаемое колебаниями только верхней грани $\varphi = \Phi$, а p_2 — нижней $\varphi = -\Phi$. При этом p_1 удовлетворяет краевым условиям

$$-\frac{1}{ikrcr} \frac{\partial p_1}{\partial \varphi} = v_1, \quad \text{при } \varphi = \Phi; \quad \frac{\partial p_1}{\partial \varphi} = 0, \quad \text{при } \varphi = -\Phi,$$

а p_2 — условиям

$$\frac{\partial p_2}{\partial \varphi} = 0, \quad \text{при } \varphi = \Phi; \quad \frac{1}{ikrcr} \frac{\partial p_2}{\partial \varphi} = v_2, \quad \text{при } \varphi = -\Phi.$$

Вместо p_1 и p_2 удобно найти сначала функцию $S(r, \varphi)$, пропорциональную p_1 так, что

$$p_1(r, \varphi) = v_1 r c S(r, \varphi).$$

Функция $S(r, \varphi)$, представляющая собой давление, обусловливаемое колебаниями грани $\varphi = \Phi$ со скоростью, соответствующей единичной амплитуде давления в бегущей плоской волне, удовлетворяет краевым условиям

$$-\frac{1}{ikr} \frac{\partial S}{\partial \varphi} = 1, \quad \text{при } \varphi = \Phi; \quad \frac{\partial S}{\partial \varphi} = 0, \quad \text{при } \varphi = -\Phi. \quad (1)$$

Ввиду симметрии задачи относительно φ функция $S(r, -\varphi)$ пропорциональна функции $p_2(r, \varphi)$, так что

$$p_2(r, \varphi) = v_2 r c S(r, -\varphi).$$

* В случае произвольной области решение могло бы оказаться неограниченным вне области $\frac{\pi}{4} < \arg k < \frac{3\pi}{4}$.

Таким образом, искомое решение $p(r, \varphi)$ выражается формулой

$$p(r, \varphi) = \rho c [v_1 S(r, \varphi) + v_2 S(r, -\varphi)] \quad (2)$$

через функцию $S(r, \varphi)$, удовлетворяющую также уравнению

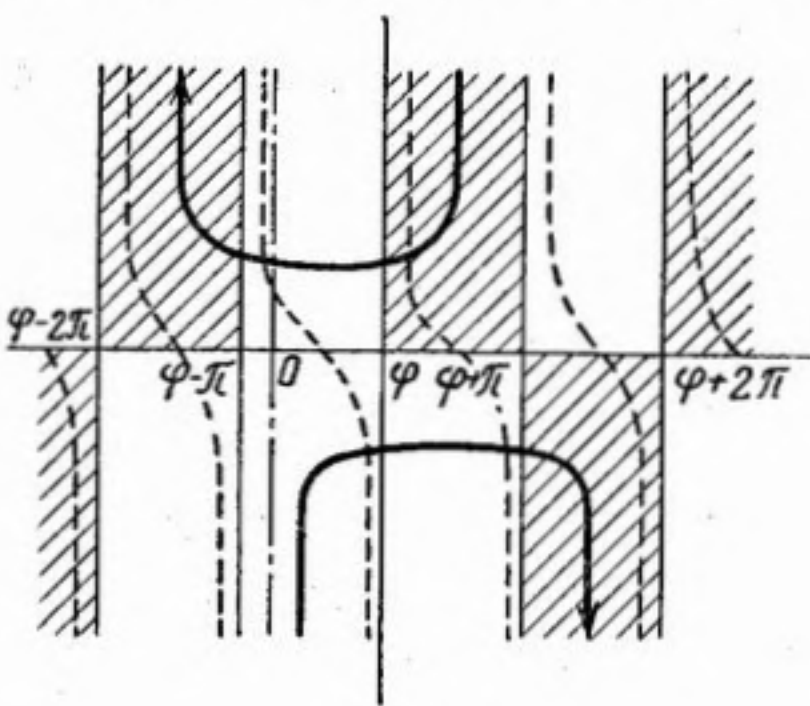
$$\Delta S + k^2 S = 0, \quad (3)$$

условию погашаемости и краевым условиям (1).

Функцию $S(r, \varphi)$ мы будем искать в виде интеграла Зоммерфельда [3]

$$S(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \exp[-ikr \cos(\varphi - z)] s(z) dz, \quad (4)$$

представляющего собой суперпозицию плоских волн $s(z) \exp[-ikr \cos(\varphi - z)] dz$, падающих из бесконечности на ребро клина $r = 0$ под комплексными углами $\varphi = z$. Контур интеграции, состоящий из двух петель, показан на



Фиг. 2

фиг. 2, где заштрихованы области, внутри которых вещественная часть величины $-ik \cos(\varphi - z)$ при вещественном положительном k отрицательна.

Контур γ зависит от φ и перемещается с изменением этой величины. Поэтому следовало бы писать γ_φ вместо γ . Однако для краткости записи мы будем только подразумевать значок φ , не выписывая его явно.

Чтобы решить задачу, требуется подобрать зависимость амплитуды $s(z)$ от угла такой, чтобы интеграл (4) удовлетворял дифференциальному уравнению,

краевым условиям и принципу погашаемости.

Чтобы удовлетворить уравнению (3) и принципу погашаемости, достаточно наложить на функцию $s(z)$ очень простые ограничения, что мы и сделаем в первую очередь. Тогда останется найти такой конкретный вид этой функции, чтобы удовлетворялись краевые условия. Это будет сделано в следующем разделе.

Поскольку плоские волны $\exp[-ikr \cos(\varphi - z)]$, из которых составлен интеграл Зоммерфельда, сами являются решениями уравнения (1), то для того, чтобы интеграл (4) тоже являлся решением, нужно только, чтобы он равномерно сходил для различных значений параметров r и φ .

Пусть амплитуда $s(z)$ представляет собой аналитическую функцию, регулярную в полуплоскостях $|\operatorname{Im} z| > c$, где c — достаточно большое положительное число. Тогда можно считать контур интеграции γ , целиком расположенный в этих полуплоскостях, беспрепятственно смещающимся с изменением φ так, что всегда его усы, уходящие в бесконечность, лежат в заштрихованных полосах, чем обеспечивается равномерная сходимость интеграла в области $r > 0$; $-\infty < \varphi < \infty$. Тогда интеграл (4) является решением уравнения (1).

Теперь обратимся к принципу погашаемости. Сначала убедимся в ограниченности решения при $r = 0$. Поскольку $s(z)$ регулярна при $|\operatorname{Im} z| > c$, то в любой полосе конечной ширины $A < \operatorname{Re} z < B$ функция $s(z)$ стремится к постоянным пределам при стремлении мнимой части z к плюс или минус бесконечности.

Обозначим эти пределы соответственно через $s(i\infty)$ и $s(-i\infty)$. Так как они не зависят от φ , достаточно провести вычисление для $\varphi = 0$.

Рассмотрим интеграл по верхней петле контура, которую проведем так, как показано на фиг. 3. Интеграл на этой петле можно представить в виде суммы трех интегралов:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{\pi}{2} + i\sigma}^{\frac{\pi}{2} + ia} \exp(-ikr \cos z) s(z) dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{\pi}{2} + ia}^{-\frac{3\pi}{2} + ia} \exp(-ikr \cos z) s(z) dz + \\ & + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\frac{3\pi}{2} + ia}^{-\frac{3\pi}{2} + i\infty} \exp(-ikr \cos z) s(z) dz. \end{aligned}$$

При достаточно большом a можно считать $s(z) = s(i\infty)$ и вынести за знак интеграла. После этого первый и третий интегралы благодаря периодичности функции $\exp(-ikr \cos z)$ взаимно уничтожаются. Остающийся же второй интеграл, а следовательно, и весь интеграл по верхней петле при $r = 0$ и $a \rightarrow \infty$ становится равным величине $is(i\infty)$. Таким же способом вычисляем интеграл при $r = 0$ по нижней петле, который равен $-is(-i\infty)$. Поэтому для звукового давления у самого ребра клиновидной области получаем конечное значение

$$S(0, \varphi) = i[s(i\infty) - s(-i\infty)], \quad (5)$$

не зависящее ни от угла φ , ни от волнового числа k . Эта формула понадобится в дальнейшем изложении.

Предположим теперь, что $r > 0$ и рассмотрим комплексные значения $k = |k|e^{i\delta}$. При этом заштрихованные области на фиг. 2, где вещественная часть величины $-ikr \cos(\varphi - z)$ отрицательна, деформируются так,

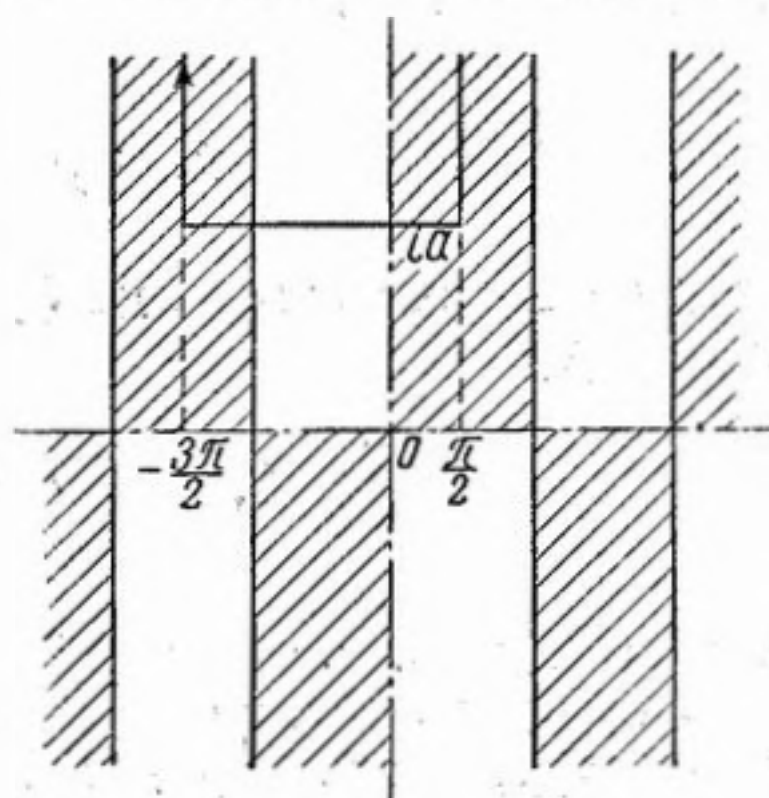
как показано на фиг. 4 (а также на фиг. 2) обыкновенным пунктиром*, и при $\delta = \pi/2$, когда интеграл Зоммерфельда получает вид:

$$S(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi i} \int \exp[|k|r \cos(\varphi - z)] s(z) dz, \quad (6)$$

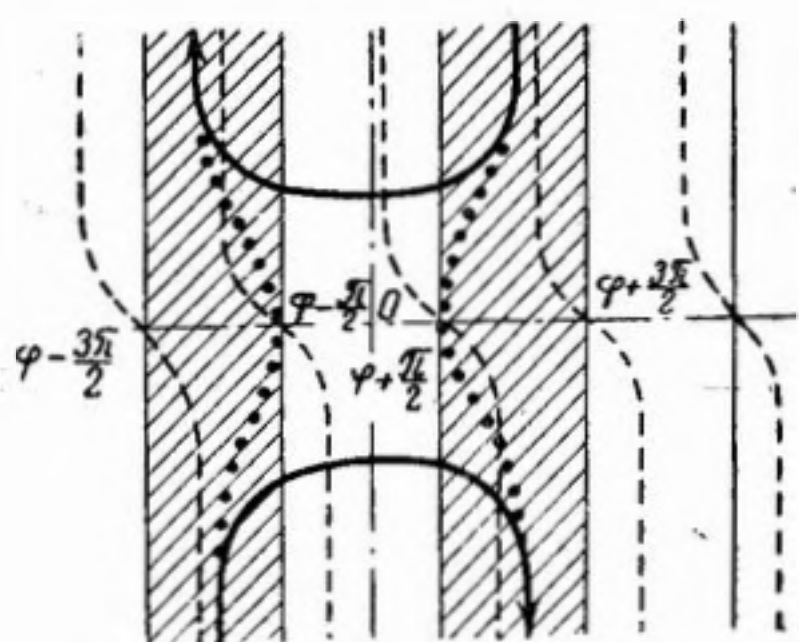
и стремятся к прямым заштрихованным полосам, показанным на этой же фиг. 4.

При конечных значениях r и $|k|$ решение вида (6) остается ограниченным. Однако принцип погашаемости требует ограниченности в области $-\Phi < \varphi < \Phi$ также и при $r \rightarrow \infty$. Для обеспечения этого

потребуем дополнительно, чтобы функция $s(z)$ была регулярной в полосе $-(\Phi + \pi/2 + \epsilon) < \text{Re } z < (\Phi + \pi/2 + \epsilon)$ всюду, кроме, быть может, конечного числа полюсов, расположенных вне полосы $-(\Phi + \pi/2) < \text{Re } z < (\Phi + \pi/2)$. В таком случае можно для всякого угла φ , относящегося к нашей об-



Фиг. 3



Фиг. 4

* Для перехода к случаю зависимости от времени согласно множителю $e^{i\omega t}$ достаточно положить в окончательном решении $\delta = \pi$, учитывая соответствующую деформацию заштрихованных областей.

ласти $-\Phi < \varphi < \Phi$, соединить обе петли контура интеграции γ , не пересекая полюсов так, что путь интеграции почти всюду будет лежать внутри заштрихованных полос (это показано на фиг. 4 точечным пунктиром). Тогда решение (6) будет ограничено и на бесконечных расстояниях $r \rightarrow \infty$. Таким образом, для удовлетворения принципа погашаемости мы наложим дополнительное требование регулярности на функцию $s(z)$.

Заметим кстати, что в задаче диффракции плоской волны на клине соответствующая функция $s(z)$ обязательно обладает полюсами, расположенными в полосе $-(\Phi + \pi/2) < \operatorname{Re} z < (\Phi + \pi/2)$. Эти полюсы соответствуют падающей волне и тем из отраженных, лучи которых падают на центр $r = 0$ под углами, попадающими в интервал $-(\Phi + \pi/2) < \varphi < (\Phi + \pi/2)$.

Если вычесть из полного решения задачи диффракции эти волны, которые легко рассчитываются по правилам геометрического отражения, то к остатку принцип погашаемости применим в такой же форме, как в данной работе.

2. Функциональные уравнения

Для нахождения вида функции $s(z)$ нужно представить краевые условия (1)

$$-\frac{1}{ikr} \frac{\partial S}{\partial \varphi} = 1, \quad \text{при } \varphi = \Phi; \quad \frac{\partial S}{\partial \varphi} = 0, \quad \text{при } \varphi = -\Phi$$

в виде интегралов Зоммерфельда.

Левые части получаются сразу дифференцированием интеграла (4) по параметру, поскольку для любого значения φ

$$\frac{\partial S}{\partial \varphi} = \frac{ikr}{2\pi i} \int_{\gamma} \exp[-ikr \cos(\varphi - z)] \sin(\varphi - z) s(z) dz. \quad (7)$$

Для представления же правой части воспользуемся несколько искусственным, но наглядным приемом. Можно представить себе задачу излучения колеблющейся полуплоскости как задачу отражения некоторой вспомогательной волны от неподвижной и жесткой полуплоскости. Действительно, вообразим, что на полуплоскость $\varphi = \Phi$ и только на нее падает изнутри области плоская волна

$$S^*(r, \varphi) = -\exp\left[-ikr \cos\left(\varphi - \Phi + \frac{\pi}{2}\right)\right]. \quad (8)$$

Теперь краевое условие

$$-\frac{1}{ikr \rho c} \frac{\partial S}{\partial \varphi} + \frac{1}{\rho c} S^*(r, \varphi) = 0, \quad \text{при } \varphi = \Phi, \quad (9)$$

совпадающее формально с первым из краевых условий (1), означает уничтожение результирующей нормальной скорости на жесткой грани.

Но плоскую волну $S^*(r, \varphi)$ можно представить в виде интеграла Зоммерфельда на основании формулы

$$\exp[-ikr \cos(\varphi - \varphi_0)] = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \exp[-ikr \cos(\varphi - \varphi_0 - z)] \frac{i}{1 - e^{-iz}} dz \quad (10)$$

и, следовательно, пользуясь формулами (1), (7), (8), (9) и (10), записать краевые условия в виде

$$\left. \begin{aligned} & -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \exp[-ikr \cos(\Phi - z)] \sin(\Phi - z) s(z) dz - \\ & -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \exp\left[-ikr \cos\left(\frac{\pi}{2} - z\right)\right] \frac{i}{1 - e^{-iz}} dz = 0, \\ & \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \exp[-ikr \cos(-\Phi - z)] \sin(-\Phi - z) s(z) dz = 0. \end{aligned} \right\} (1^*)$$

В таком виде члены в первом краевом условии имеют разные аргументы под знаком косинуса в ядре. Соответственно и контуры интеграции γ смещены относительно друг друга.

Однако, пользуясь тождеством

$$\int_{\gamma} \exp[-ikr \cos(\alpha - z)] s(z) dz = \int_{\gamma} \exp[-ikr \cos z] s(z + \alpha) dz,$$

мы можем привести оба интеграла к одинаковому ядру и одинаковому контуру интеграции. После этого оба члена в краевом условии объединяются в один интеграл и краевые условия получают вид:

$$\left. \begin{aligned} & \int_{\gamma} \exp(-ikr \cos z) \left[\sin z s(z + \Phi) - \frac{i}{1 + ie^{-iz}} \right] dz = 0, \\ & \int_{\gamma} \exp(-ikr \cos z) \sin z s(z - \Phi) dz = 0. \end{aligned} \right\} (1^{**})$$

Справедлива следующая теорема, доказанная автором в диссертации [2].

Теорема 1. Если аналитическая функция $f(z)$, регулярна при $|\operatorname{Im} z| > c$, то для соблюдения тождества

$$\int_{\gamma} \exp(-ikr \cos z) f(z) dz \equiv 0 \quad (z > 0)$$

необходимо и достаточно, чтобы функция $f(z)$ была четной, т. е. чтобы

$$f(z) - f(-z) = 0. \quad (11)$$

Доказательство этой теоремы будет приведено в приложении ко второй части статьи.

На основании равенства (11), взяв в качестве $f(z)$ содержимое скобок под интегралами (1**), получаем два функциональных уравнения:

$$s(z + \Phi) + s(-z + \Phi) = -\frac{1}{\cos z}, \quad (12)$$

$$s(z - \Phi) + s(-z - \Phi) = 0. \quad (13)$$

Решение поставленной задачи в виде интеграла (4) будет найдено, если из этих функциональных уравнений мы определим функцию $s(z)$, регулярную при $|\operatorname{Im} z| > c$ и при $|\operatorname{Re} z| < \Phi + \pi/2$. Такая функция просто выражается через функцию $\eta_{\Phi}(z)$, рассмотренную в приложении по формуле

$$s(z) = \eta_{\Phi}(z + \Phi),$$

так что мы могли бы перейти непосредственно к исследованию точного решения для $S(r, \varphi)$, даваемого формулой (28). Однако для полноты изложения мы приводим здесь непосредственный вывод решения функциональных уравнений (12), (13), который при желании может быть пропущен читателем.

Для решения подобных уравнений удобно пользоваться интегралами Фурье в несколько измененной форме, для которой справедлива следующая теорема.

Теорема 2. Пусть $f(z)$ — аналитическая функция, регулярная в полосе $-a < \operatorname{Re} z < b$, стремящаяся в этой полосе при $\operatorname{Im} z \rightarrow \pm \infty$ к постоянным пределам $f(i\infty)$ и $f(-i\infty)$, так что

$$f(z) = f(i\infty) + O[\exp(-\lambda \operatorname{Im} z)] \quad \text{при } \operatorname{Im} z \rightarrow \infty,$$

$$f(z) = f(-i\infty) + O[\exp(\mu \operatorname{Im} z)] \quad \text{при } \operatorname{Im} z \rightarrow -\infty;$$

где λ и μ — положительные числа.

Тогда функция $f(z)$ в указанной полосе имеет представление

$$f(z) = \frac{1}{2} [f(i\infty) + f(-i\infty)] + \frac{i}{2\sqrt{2\pi}} \left\{ \int_{-\alpha-i\infty}^{-\alpha+i\infty} F(w) \exp(-iwz) dw + \int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty} F(w) \exp(-iwz) dw \right\}, \quad (14)$$

$$(0 < \alpha < \lambda), \quad (0 < \beta < \mu),$$

или

$$f(z) = \frac{1}{2} [f(i\infty) + f(-i\infty)] + \frac{i}{\sqrt{2\pi}} P \int_{-i\infty}^{i\infty} F(w) \exp(-iwz) dw, \quad (15)$$

(символ $P \int$ означает главное значение интеграла), где $F(w)$ — аналитическая функция, представимая в полосе $-\lambda < \operatorname{Re} w < 0$ интегралом

$$F(w) = \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-i\infty}^{i\infty} [f(z) - f(i\infty)] \exp(iwz) dz \quad (16)$$

и в полосе $0 < \operatorname{Re} w < \mu$ интегралом

$$F(w) = \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-i\infty}^{i\infty} [f(z) - f(-i\infty)] \exp(iwz) dz, \quad (17)$$

причем функция $F(w)$ регулярна во всей полосе $-\lambda < \operatorname{Re} w < \mu$ * всюду, кроме полюса в точке $w = 0$, с вычетом

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} [f(-i\infty) - f(i\infty)].$$

* Как частный случай при $f(i\infty) = f(-i\infty) = 0$ получаем пару взаимных преобразований:

$$f(z) = \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-i\infty}^{i\infty} F(w) \exp(-iwz) dz, \quad F(w) = \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-i\infty}^{i\infty} f(z) \exp(iwz) dz.$$

После простой замены переменных эти формулы переходят в обычные интегралы Фурье или при другой замене в формулы двустороннего преобразования Лапласа.

Способ доказательства этой теоремы мало отличается от способа, применяемого для обычных интегралов Фурье [6]. Поэтому мы доказательства не приводим.

Заметим, что, применяя интеграл Фурье в данной форме к какой-либо подходящей функции, мы всегда можем считать предельные значения $f(i\infty)$ и $f(-i\infty)$ равными и противоположными по знаку, т. е.

$$f(-i\infty) = -f(i\infty). \quad (18)$$

Действительно, если бы это было не так, можно было бы рассматривать вместо функции $f(z)$ функцию $f_1(z) = f(z) - \frac{1}{2} [f(i\infty) + f(-i\infty)]$, для которой равенство (18) обязательно соблюдается.

При условии (18) первый член в формулах (14) и (15) теоремы 2 исчезает и представление функции $f(z)$ получает вид:

$$f(z) = \frac{i}{2\sqrt{2\pi}} \left\{ \int_{-\alpha-i\infty}^{-\alpha+i\infty} F(w) \exp(-iwz) dw + \int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty} F(w) \exp(-iwz) dw \right\} \quad (19)$$

или

$$f(z) = \frac{i}{\sqrt{2\pi}} P \int_{-i\infty}^{i\infty} F(w) \exp(-iwz) dw. \quad (20)$$

Обращаясь к решению функциональных уравнений (12) и (13), воспользуемся тем, что искомую функцию $s(z)$ требуется определить с точностью до произвольной аддитивной постоянной.

Действительно, добавление любой постоянной к функции $s(z)$ не изменяет величины интеграла Зоммерфельда, что следует из теоремы 1 и из того, что интеграл $\int_Y \exp(-ikr) \cos(z - \varphi) dz$ не зависит от φ .

В таком случае эта произвольная постоянная всегда может быть выбрана такой, что

$$s(-i\infty) = -s(i\infty), \quad (21)$$

и, следовательно, функция $s(z)$ допускает представление по формуле (19):

$$s(z) = \frac{i}{2\sqrt{2\pi}} \left\{ \int_{-\varepsilon-i\infty}^{-\varepsilon+i\infty} F(w) \exp(-iwz) dw + \int_{\varepsilon-i\infty}^{\varepsilon+i\infty} F(w) \exp(iwz) dw \right\}, \quad (22)$$

где ε — достаточно малая положительная величина. Поскольку функция $s(z)$ регулярна в полосе $|\operatorname{Re} z| < \varphi + \frac{\pi}{2}$, формула (22) в силу теоремы 2 представляет эту функцию во всей этой полосе. Поэтому все члены левых частей функциональных уравнений (12) и (13) при достаточно малых значениях $(\operatorname{Re} z)$ могут быть выражены по этой формуле. Например, член $s(z + \Phi)$ может быть выражен так:

$$s(z + \Phi) = \frac{i}{2\sqrt{2\pi}} \left\{ \int_{-\varepsilon-i\infty}^{-\varepsilon+i\infty} F(w) e^{-iw\Phi} e^{-iwz} dw + \int_{\varepsilon-i\infty}^{\varepsilon+i\infty} F(w) e^{iw\Phi} e^{-iwz} dw \right\}$$

и член $s(-z + \Phi)$ так:

$$\begin{aligned} s(-z + \Phi) &= \frac{i}{2V\sqrt{2\pi}} \left\{ \int_{-\varepsilon-i\infty}^{-\varepsilon+i\infty} F(w) e^{-iw\Phi} e^{iwz} dw + \int_{\varepsilon-i\infty}^{\varepsilon+i\infty} F(w) e^{-iw\Phi} e^{iwz} dw \right\} = \\ &= \frac{i}{2V\sqrt{2\pi}} \left\{ \int_{-\varepsilon-i\infty}^{-\varepsilon+i\infty} F(-w) e^{iw\Phi} e^{-iwz} dw + \int_{\varepsilon-i\infty}^{\varepsilon+i\infty} F(-w) e^{iw\Phi} e^{-iwz} dw \right\}. \end{aligned}$$

Для выражения правых частей функциональных уравнений представим функцию $1/\cos z$ таким же интегралом Фурье:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\cos z} &= \frac{i}{V\sqrt{2\pi}} \int_{-i\infty}^{i\infty} G(w) e^{-iwz} d\omega = \\ &= \frac{i}{2V\sqrt{2\pi}} \left\{ \int_{-\varepsilon-i\infty}^{-\varepsilon+i\infty} G(w) e^{-iwz} dw + \int_{\varepsilon-i\infty}^{\varepsilon+i\infty} G(w) e^{-iwz} dw \right\}, \end{aligned}$$

где

$$G(w) = \frac{i}{V\sqrt{2\pi}} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{e^{iwz}}{\cos z} dz = -\frac{2}{V\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \frac{t^w dt}{1+t^2} = -\frac{V\sqrt{2\pi}}{2 \cos \frac{\pi w}{2}}.$$

Подставляя найденные выражения в первое функциональное уравнение (12), получаем

$$\begin{aligned} &\frac{i}{2V\sqrt{2\pi}} \left\{ \int_{-\varepsilon-i\infty}^{-\varepsilon+i\infty} \left[F(w) e^{-iw\Phi} + F(-w) e^{iw\Phi} - \frac{V\sqrt{2\pi}}{2 \cos \frac{\pi w}{2}} \right] e^{-iwz} dw + \right. \\ &\left. + \int_{\varepsilon-i\infty}^{\varepsilon+i\infty} \left[F(w) e^{-iw\Phi} + F(-w) e^{iw\Phi} - \frac{V\sqrt{2\pi}}{2 \cos \frac{\pi w}{2}} \right] e^{-iwz} d\omega \right\} \equiv 0. \end{aligned}$$

Необходимым условием соблюдения этого тождества является равенство нулю содержимого квадратных скобок под интегралами. Поэтому для функций $F(w)$ и $F(-w)$ получается алгебраическое уравнение

$$F(w) e^{-iw\Phi} + F(-w) e^{iw\Phi} = \frac{V\sqrt{2\pi}}{2 \cos \frac{\pi w}{2}}.$$

Поступая аналогичным образом со вторым функциональным уравнением (13), получаем уравнение

$$F(w) e^{iw\Phi} + F(-w) e^{-iw\Phi} = 0.$$

Из этих двух уравнений находим

$$F(w) = \frac{i V\sqrt{2\pi}}{4} \frac{e^{-iw\Phi}}{\cos \frac{\pi w}{2} \sin 2\Phi w}, \quad (23)$$

откуда по формуле (22)

$$s(z) = -\frac{1}{8} \left\{ \int_{-\varepsilon-i\infty}^{-\varepsilon+i\infty} + \int_{\varepsilon-i\infty}^{\varepsilon+i\infty} \right\} \frac{e^{-iw(z+\Phi)}}{\cos \frac{\pi w}{2} \sin 2\omega\Phi} d\omega. \quad (24)$$

Подстановка этого выражения в интеграл Зоммерфельда (4)

$$S(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \exp[-ikr \cos(\varphi - z)] s(z) dz$$

дает искомую функцию $S(r, \varphi)$.

Полученное выражение (24) для $s(z)$ требует некоторой обработки. Однако прежде чем заняться ею, рассмотрим простейшую задачу: определение звукового давления на ребре ($r = 0$) клиновидной области.

Как было показано в разделе 1, это давление (точнее, его амплитуда) равно (5):

$$S(0, \varphi) = i[s(i\infty) - s(-i\infty)],$$

но в силу теоремы 2 величина $-\frac{1}{V\sqrt{2\pi}} [(s(i\infty) - s(-i\infty))]$ равна вычету функции $F(w)$ в точке $w = 0$. Вычет же этот, как видно из выражения (23), равен $\frac{i\sqrt{2\pi}}{8\Phi}$, следовательно,

$$S(0, \varphi) = \frac{\pi}{4\Phi}. \quad (25)$$

Чтобы найти давление на ребре при заданных скоростях v_1 и v_2 колебания граней, достаточно воспользоваться формулой (2)

$$p(r, \varphi) = \rho c [v_1 S(r, \varphi) + v_2 S(r, -\varphi)].$$

Согласно (25) получаем

$$p(0, \varphi) = \frac{\pi \rho c}{4\Phi} (v_1 + v_2). \quad (26)$$

Естественно, что правая часть не зависит от φ , так как не может быть различных давлений в одной и той же точке.

Рассмотрим теперь функцию $s(z)$, даваемую выражением (24). Эта функция связана формулой

$$s(z) = \eta_{\Phi}(z + \Phi) \quad (27)$$

с функцией $\eta_{\Phi}(z)$ от двух переменных, исследованной автором в диссертации при решении задачи диффракции на поглощающем клине [2]. Основные свойства функции $\eta_{\Phi}(z)$ приведены в приложении.

Используя (27) в (24), получаем выражение функции $S(r, \varphi)$ через $\eta_{\Phi}(z)$:

$$S(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \exp[-ikr \cos(\varphi - z)] \eta_{\Phi}(z + \Phi) dz. \quad (28)$$

Этой формулой мы будем пользоваться для дальнейшего исследования, но сначала, чтобы подчеркнуть смысл функции $\eta_{\Phi}(z)$, перепишем выражение (28) в виде

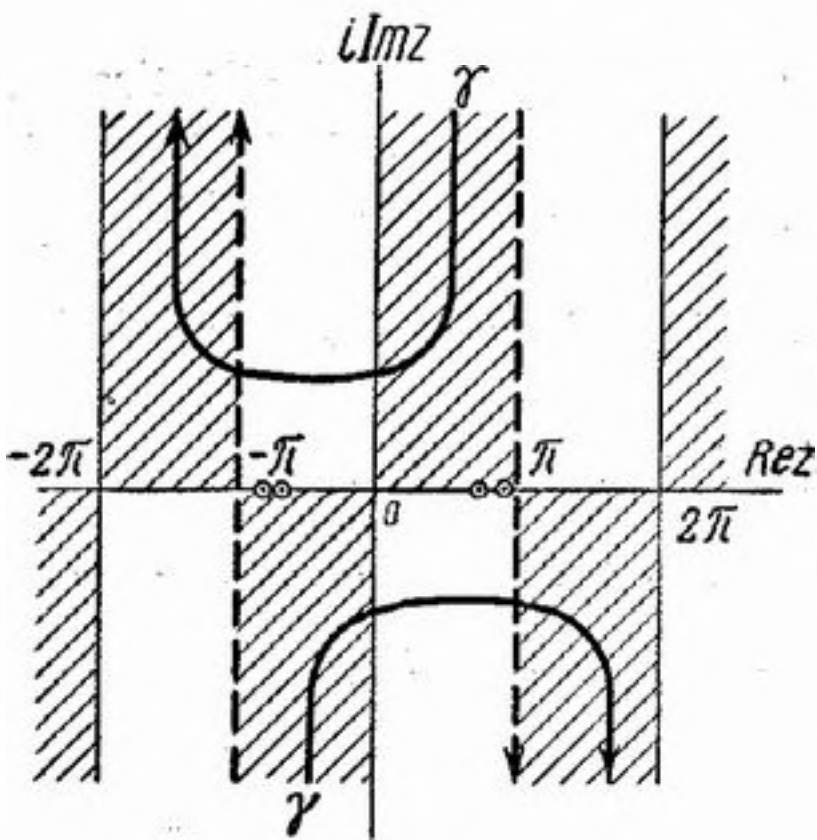
$$S(r, \varphi_1 - \Phi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \exp[-ikr \cos(\varphi_1 - \alpha)] \eta_{\Phi}(\alpha) d\alpha, \quad (29)$$

легко получаемом заменой переменной интегриации $z + \Phi = \alpha$.

Величина $\varphi_1 = \varphi + \Phi$ есть угол, отсчитываемый от нижней неподвижной грани $\varphi = -\Phi$ угловой области. Таким образом, $\eta_{\Phi}(z)$ есть функция углового распределения амплитуд плоских волн в интеграле Зоммерфельда, определяющем вынужденные колебания звукового давления в клиновидной области $0 < \varphi_1 < 2\varphi$, $r > 0$, если при неподвижной грани $\varphi_1 = 0$ грань $\varphi_1 = 2\Phi$ совершает колебания с амплитудой ско-

рости, равной единице давления, поделенной на волновое сопротивление среды ρc , т. е. с амплитудой скорости, соответствующей единичной амплитуде давления в бегущей плоской волне.

При этом положительным направлением для скорости считается направление внутренней нормали к грани $\varphi_1 = 2\Phi$. Отсюда видно, что функция $\eta_\Phi(z)$, играющая в других задачах вспомогательную роль в математических выкладках, получает в данной задаче непосредственно наглядный смысл.



Фиг. 5

Поскольку в физической задаче в общем случае отличны от нуля скорости обеих граней клина, то для дальнейшего нам удобнее пользоваться выражением (28) для $S(r, \varphi)$.

При помощи формулы (2)

$$p(r, \varphi) = \rho c [v_1 S(r, \varphi) + v_2 S(r, -\varphi)]$$

простой заменой переменной интегрирования получаем

$$p(r, \varphi) = \frac{\rho c}{2\pi i} \int_{\gamma} \exp[-ikr \cos(\varphi - z)] [v_1 \eta_\Phi(z + \Phi) + v_2 \eta_\Phi(z - \Phi)] dz. \quad (30)$$

Это есть точное решение предложенной задачи в виде интеграла Зоммерфельда.

Вывод приближенных, удобных для вычисления представлений поля для больших и для малых значений kr , мы сделаем также сначала для вспомогательной функции $S(r, \varphi)$, переходя затем к общему случаю при помощи формулы (2).

Чтобы перейти от контурного интеграла (28)

$$S(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \exp[-ikr \cos(\varphi - z)] \eta_\Phi(z + \Phi) dz$$

к простому, поступим следующим образом. Перепишем этот интеграл в виде

$$S(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \exp(-ikr \cos z) \eta_\Phi(z + \varphi + \Phi) dz. \quad (31)$$

Контур интегрирования γ в этом интеграле изображен на фиг. 5 в виде двух петель.

Деформируя этот контур, можно превратить его в две вертикальные прямые $\text{Re } z = \pm \pi$, показанные на этой же фигуре пунктиром. Однако при этом появятся вычеты в тех полосах подинтегрального выражения, которые расположены в интервале $|\text{Re } z| < \pi$.

Функция $\eta_\Phi(z)$ имеет представление*

$$\eta_\Phi(z) = 2z \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^2 - \left[2\Phi(2n-1) + \frac{\pi}{2}(2m-1) \right]^2}.$$

* См. приложение в конце статьи.

Полюсы, лежащие в указанном промежутке, могут принадлежать только первому члену ($m = 1$) внешней суммы, т. е. выражению

$$A_{\Phi}(z) = 2z \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^2 - [2\Phi(2n-1) + \pi/2]^2}.$$

В нашем случае, когда аргументом является не z , а величина $z + \varphi + \Phi$, это выражение может быть переписано так:

$$A_{\Phi}(z + \varphi + \Phi) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{z + \varphi - (-1)^{\nu} [(2\nu + 1)\Phi + \pi/2]}.$$

Вычеты будут получаться лишь в первых $N + 1$ полюсах

$$z_{\nu} = -\varphi + (-1)^{\nu} [(2\nu + 1)\Phi + \pi/2] \quad (\nu = 0, 1, \dots, N)$$

этого выражения, удовлетворяющих условию $|z_{\nu}| < \pi$. Сумма вычетов интеграла (31) в этих полюсах, имеющая вид:

$$S_0(r, \varphi) = \sum_{\nu} \exp\{-ikr \cos[(2\nu + 1)\Phi + \pi/2 - (-1)^{\nu}\varphi]\}, \quad (32)$$

представляет собой совокупность плоских волн, соответствующую геометрико-оптическому решению задачи. Член с номером $\nu = 0$ соответствует плоской волне, непосредственно излучаемой колеблющейся верхней гранью $\varphi = \Phi$. Следующие номера соответствуют геометрически отраженным волнам. В написанном ряде присутствуют только члены, для которых $\nu \leq \frac{\pi}{4\Phi}$, причем члены с наибольшим номером ν , удовлетворяющим этому условию, отличны от нуля только для тех значений угла φ ($|\varphi| \leq \Phi$), для которых $(2\nu + 1)\Phi + \pi/2 - (-1)^{\nu}\varphi < \pi$. В частности, если $\Phi > \pi/4$, то из всей суммы сохраняется только нулевой член $\exp[-ikr \cos(\Phi + \pi/2 - \varphi)]$, причем он отсутствует, если $\varphi < \Phi - \frac{\pi}{2}$.

В результате произведенной деформации контура функция $S(r, \varphi)$ получает вид:

$$S(r, \varphi) = S_0(r, \varphi) + I(r, \varphi), \quad (33)$$

где

$$\begin{aligned} I(r, \varphi) &= \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{-\pi-i\infty}^{-\pi+i\infty} + \int_{\pi+i\infty}^{\pi-i\infty} \right) \exp(-ikr \cos z) \eta_{\Phi}(z + \varphi + \Phi) dz = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \exp(ikr \cos z) [\eta_{\Phi}(z + \varphi + \Phi - \pi) - \eta_{\Phi}(z + \varphi + \Phi + \pi)] dz, \end{aligned}$$

или, поскольку функция $\eta_{\Phi}(z)$ удовлетворяет тождеству *

$$\eta_{\Phi}(z - \pi) - \eta_{\Phi}(z + \pi) = \frac{\pi}{2\Phi} \frac{\sin \frac{\pi^2}{4\Phi}}{\cos \frac{\pi^2}{4\Phi} + \cos \frac{\pi z}{2\Phi}},$$

* См. приложение в конце статьи.

то

$$I(r, \varphi) = \frac{\sin \frac{\pi^2}{4\Phi}}{4\Phi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \exp(ikr \cos z) \frac{dz}{\cos \frac{\pi^2}{4\Phi} - \sin \frac{\pi(z+\varphi)}{2\Phi}}.$$

Заменой переменной получаем

$$I(r, \varphi) = \frac{\sin \frac{\pi^2}{4\Phi}}{4\Phi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(ikr \operatorname{ch} z)}{\cos \frac{\pi^2}{4\Phi} - i \operatorname{sh} \frac{\pi}{2\Phi} (z - i\varphi)} dz. \quad (34)$$

Подстановка этого выражения в (33) дает окончательное выражение для $S(r, \varphi)$ через обыкновенный интеграл:

$$S(r, \varphi) = \sum_{\nu} \exp \left\{ -ikr \cos \left[(2\nu + 1)\Phi + \frac{\pi}{2} - (-1)^{\nu} \varphi \right] \right\} + \\ + \frac{\sin \frac{\pi^2}{4\Phi}}{4\Phi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(ikr \operatorname{ch} z) dz}{\cos \frac{\pi^2}{4\Phi} - i \operatorname{sh} \frac{\pi}{2\Phi} (z - i\varphi)}. \quad (35)$$

Сумма дает приближение геометрической оптики, интеграл — поправку к нему.

3. Приближенные выражения для больших расстояний

Чтобы получить приближенное выражение функции $S(r, \varphi)$ для больших расстояний, можно воспользоваться тем, что S является аналитической функцией волнового числа, и положить $k = i\mu$, считая временно μ вещественным и положительным. Тогда интеграл (34) получает вид:

$$I(r, \varphi) = \frac{\sin \frac{\pi^2}{4\Phi}}{4\Phi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-\mu r \operatorname{ch} z)}{\cos \frac{\pi^2}{4\Phi} - i \operatorname{sh} \frac{\pi}{2\Phi} (z - i\varphi)} dz.$$

После замены переменной $\operatorname{ch} z = 1 + 2t^2$ этот интеграл можно переписать так:

$$I(r, \varphi) = \frac{1}{2\Phi} e^{-\mu r} \sin \frac{\pi^2}{4\Phi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\mu r t^2} f(t) dt,$$

где

$$\frac{1}{f(t)} = \sqrt{1 + t^2} \left\{ \cos \frac{\pi^2}{4\Phi} - i \operatorname{sh} \frac{\pi}{\Phi} \left[\operatorname{Arch}(1 + 2t^2) - \frac{i\varphi}{2} \right] \right\}. \quad (36)$$

Для получения приближенного выражения при больших r заменим функцию $f(t)$ ее разложением в степенной ряд:

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(0) \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(f^{(2n)}(0) \frac{t^{2n}}{(2n)!} + f^{(2n+1)}(0) \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} \right). \quad (36^*)$$

Тогда

$$I(r, \varphi) \sim \frac{e^{-\mu r}}{2\Phi} \sin \frac{\pi^2}{4\Phi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(2n)}(0)}{(2n)!} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\mu r t^2} t^{2n} dt.$$

Нечетные члены ряда не выписаны, так как они при интегрировании исчезают.

Выполняя интегрирование, получаем

$$I(r, \varphi) \sim \frac{\pi}{2\Phi} \sin \frac{\pi^2}{4\Phi} \frac{e^{-\mu r}}{\sqrt{2\pi\mu r}} \left(f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!} \frac{f^{(2n)}(0)}{(4\mu r)^n} \right). \quad (37)$$

Написанный ряд будет расходящимся, поскольку мы воспользовались для его получения рядом (36*), расходящимся уже при $|t| = 1$. Однако ограничиваясь конечным числом членов в ряду, мы получим выражение, асимптотически стремящееся к истинной величине интеграла вместе с ростом r .

Согласно (36)

$$f(0) = \frac{1}{\cos \frac{\pi^2}{4\Phi} - \sin \frac{\pi\varphi}{2\Phi}},$$

$$f''(0) = \frac{1}{\cos \frac{\pi^2}{4\Phi} - \sin \frac{\pi\varphi}{2\Phi}} \left[1 - \left(\frac{\pi}{\Phi} \right)^2 \frac{\sin \frac{\pi\varphi}{2\Phi}}{\cos \frac{\pi^2}{4\Phi} - \sin \frac{\pi\varphi}{2\Phi}} - 2 \left(\frac{\pi}{\Phi} \right)^2 \left(\frac{\cos \frac{\pi\varphi}{2\Phi}}{\cos \frac{\pi^2}{4\Phi} - \sin \frac{\pi\varphi}{2\Phi}} \right)^2 \right]$$

и т. д.

Подставляя эти выражения и заменяя $\mu = -ik$, получаем

$$I(r, \varphi) \sim \frac{\pi}{2\Phi} \frac{\sin \frac{\pi^2}{4\Phi}}{\cos \frac{\pi^2}{4\Phi} - \sin \frac{\pi\varphi}{2\Phi}} \frac{\exp \left[i \left(kr + \frac{\pi}{4} \right) \right]}{\sqrt{2\pi kr}} \left\{ 1 + \frac{i}{4kr} \left[1 - \left(\frac{\pi}{\Phi} \right)^2 \frac{\sin \frac{\pi\varphi}{2\Phi}}{\cos \frac{\pi^2}{4\Phi} - \sin \frac{\pi\varphi}{2\Phi}} - 2 \left(\frac{\pi}{\Phi} \right)^2 \left(\frac{\cos \frac{\pi\varphi}{2\Phi}}{\cos \frac{\pi^2}{4\Phi} - \sin \frac{\pi\varphi}{2\Phi}} \right)^2 + \dots \right] \right\}. \quad (37^*)$$

Нетрудно вычислить следующие члены разложения (37), найдя четвертую, шестую и т. д. производные функции $f(t)$.

Поскольку $S(r, \varphi) = S_0(r, \varphi) + I(r, \varphi)$, по формуле (37*) можно вычислять поправку к геометрико-оптическому решению на больших расстояниях по сравнению с длиной волны. Формула становится непригодной только в некоторой окрестности нулей знаменателя, соответствующих границам тени того или иного геометрического отражения. Чем ближе к границе тени, тем больше требуется расстояние r , чтобы формула была справедлива.

При достаточно больших значениях r получается формула

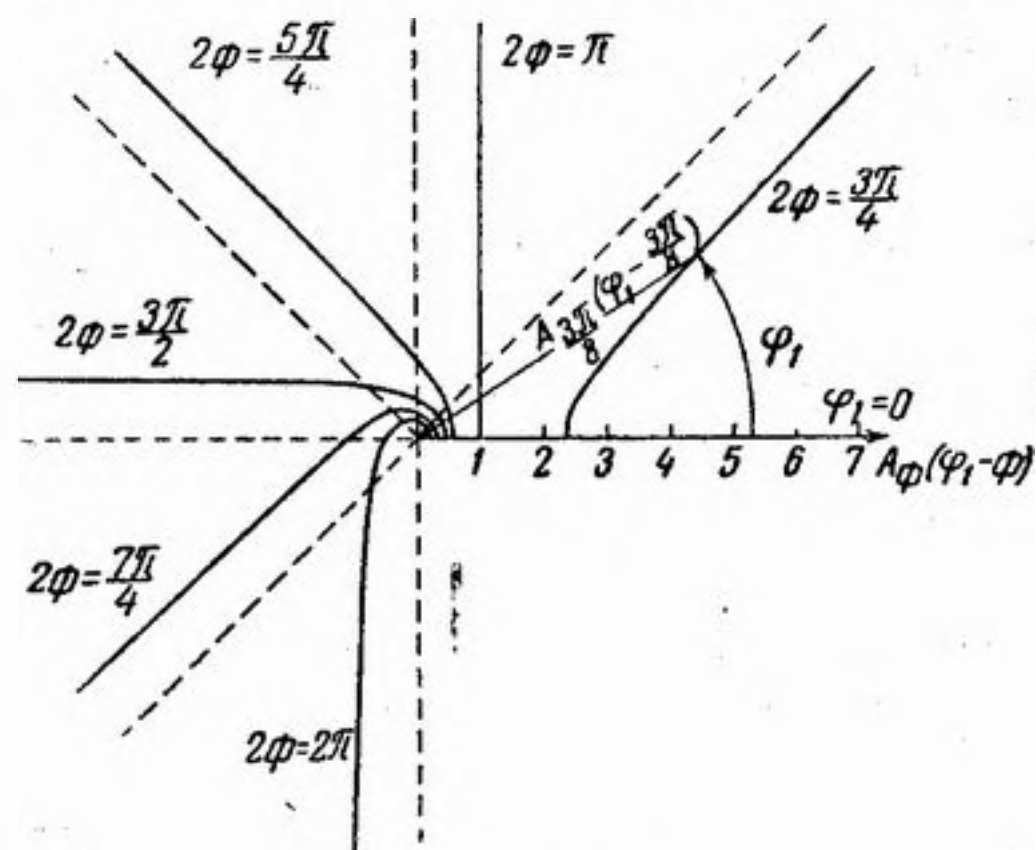
$$I(r, \varphi) \sim A_{\Phi}(\varphi) \frac{\exp \left[i \left(kr + \frac{\pi}{4} \right) \right]}{\sqrt{2\pi kr}}, \quad (38)$$

где

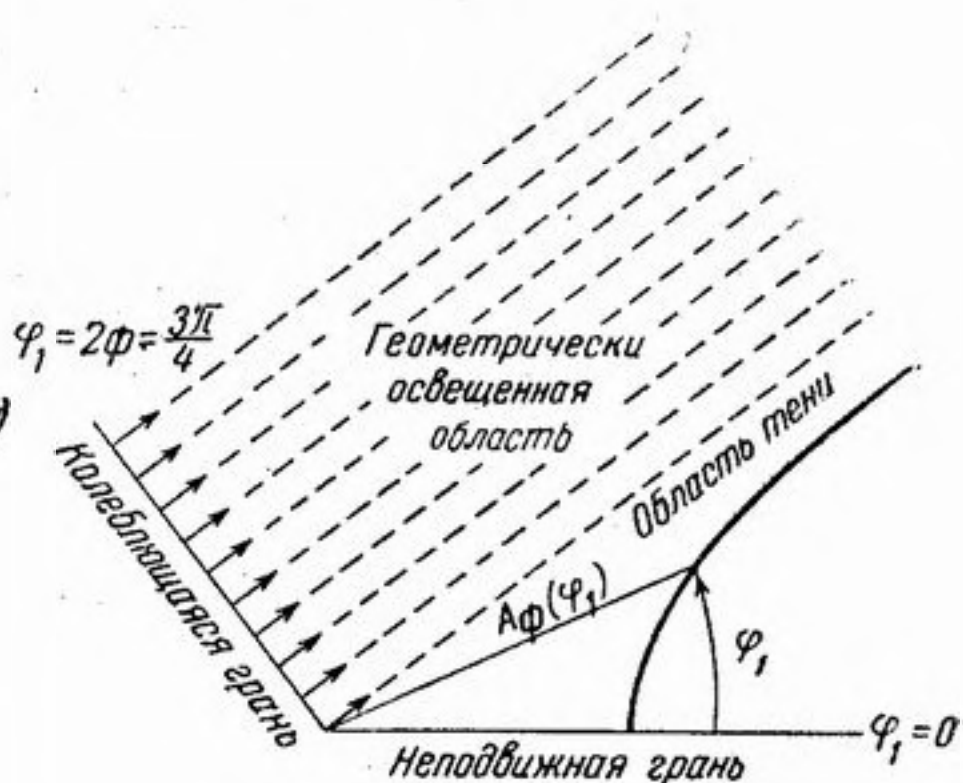
$$A_{\Phi}(\varphi) = \frac{\pi}{2\Phi} \frac{\sin \frac{\pi^2}{4\Phi}}{\cos \frac{\pi^2}{4\Phi} - \sin \frac{\pi\varphi}{2\Phi}}. \quad (39)$$

Критерием справедливости является малость по модулю отброшенного второго члена в квадратных скобках выражения (37*) по сравнению с единицей.

Угловая зависимость поля на больших расстояниях в области геометрической тени для нескольких угловых размеров клина, излучающего одной гранью, построена на фиг. 6, где пунктирными полупрямыми изображены границы тени для соответствующих случаев.



Фиг. 6



Фиг. 7

Для удобства изображения отсчет угла ведется не от середины угловой области $\varphi = 0$, а от неподвижной грани $\varphi_1 = 0$ ($\varphi_1 = \varphi + \Phi$) по формуле

$$A_{\Phi}(\varphi_1 - \Phi) = \frac{\pi}{2\Phi} \frac{\sin \frac{\pi^2}{4\Phi}}{\cos \frac{\pi^2}{4\Phi} + \cos \frac{\pi\varphi_1}{2\Phi}} \quad (39^*)$$

Коллеблющиеся грани $\varphi_1 = 2\Phi$ на фиг. 6 не изображены. Для пояснения на фиг. 7 изображен отдельно случай клиновидной области с раствором $2\Phi = 3\pi/4 = 135^\circ$.

Таблица

Значения $A_{\Phi}(\varphi_1 - \Phi) = \frac{\pi}{2\Phi} \frac{\sin \frac{\pi^2}{4\Phi}}{\cos \frac{\pi^2}{4\Phi} + \cos \frac{\pi\varphi_1}{2\Phi}}$

φ_1	Угловой размер клина 2Φ					
	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
0	2,30	1,00	0,582	0,384	0,275	0,207
$\pi/8$	3,15	1,08	0,608	0,393	0,279	0,209
$\pi/4$		1,42	0,682	0,420	0,292	0,217
$\pi/2$			1,233	0,576	0,358	0,250
$3\pi/4$				1,152	0,528	0,324
π					1,113	0,502
$5\pi/4$						0,990
$3\pi/2$						

Стремление $A_{\Phi}(\varphi)$ к бесконечности вблизи границы геометрической тени вполне естественно ввиду того, что на этой границе цилиндрической волне $I(r, \varphi)$, убывающей с расстоянием, приходится конкурировать с полем неубывающей плоской волны геометрического отражения.

Для вычисления поля на больших расстояниях при заданных скоростях v_1, v_2 можно использовать формулу

$$p(r, \varphi) = \rho c \{v_1 S_0(r, \varphi) + v_2 S_0(r, -\varphi) + \frac{\exp\left[i\left(kr + \frac{\pi}{4}\right)\right]}{\sqrt{2\pi kr}} [v_1 A_\Phi(\varphi) + v_2 A_\Phi(-\varphi)]\}. \quad (40)$$

Легко убедиться, что для случая $2\Phi = \pi, v_2 = v_1$, соответствующего бесконечной излучающей плоскости, величина, заключенная в квадратные скобки, обращается в нуль и остается плоская волна $p(r, \varphi) = \rho c v_1 e^{ikr \cos \varphi}$.

4. Представление решения бесконечным рядом бesselевых функций

Для вычисления поля на малых расстояниях удобно пользоваться представлением функции $S(r, \varphi)$ в виде ряда, содержащего бesselевы функции:

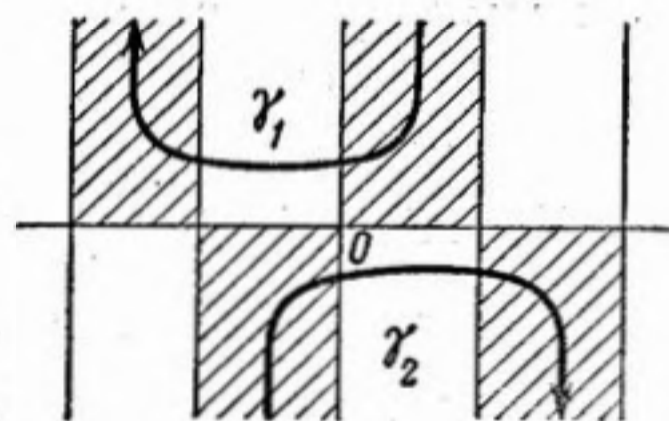
$$S(r, \varphi) = \frac{\pi}{4\Phi} J_0(kr) + \frac{\pi}{2\Phi} \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^s \exp\left(-\frac{is\pi^2}{4\Phi}\right) \frac{\cos \frac{s\pi(\varphi + \Phi)}{2\Phi}}{\cos \frac{s\pi^2}{4\Phi}} J_{\frac{s\pi}{2\Phi}}(kr) + 2 \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^s \exp\left[-\frac{i\pi(2s-1)}{2}\right] \frac{\cos [(2s-1)(\varphi + \Phi)]}{\sin [(2s-1)2\Phi]} J_{2s-1}(kr). \quad (41)$$

Звуковое давление при заданных амплитудах скоростей колебания граней получится отсюда по формуле (2)

$$p(r, \varphi) = \rho c [v_1 S(r, \varphi) + v_2 S(r, -\varphi)].$$

Для получения ряда (41) перепишем (29) в виде:

$$S(r, \varphi_1 - \Phi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \exp(-ikr \cos z) \eta_\Phi(z + \varphi_1) dz, \quad (42)$$



Фиг. 8

где контур интегрирования состоит из двух петель $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$, изображенных на фиг. 8. Но

$$\int_{\gamma_2} \exp(-ikr \cos z) \eta_\Phi(z + \varphi_1) dz = - \int_{\gamma_1} \exp(-ikr \cos z) \eta_\Phi(-z + \varphi_1) dz,$$

и поскольку * $\eta_\Phi(-z) = -\eta_\Phi(z)$, то

$$S(r, \varphi_1 - \Phi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \exp(-ikr \cos z) [\eta_\Phi(z + \varphi_1) + \eta_\Phi(z - \varphi_1)] dz. \quad (43)$$

Пользуясь представлением функции $\eta_\Phi(z)$ в виде интеграла Фурье*

$$\eta_\Phi(z) = -\frac{1}{8} \left(\int_{-z-i\infty}^{-\alpha+i\infty} + \int_{\alpha+i\infty}^{\alpha-i\infty} \right) \frac{e^{-iwz}}{\cos \frac{w\pi}{2} \sin 2w\Phi} dw,$$

* См. приложение в конце статьи.

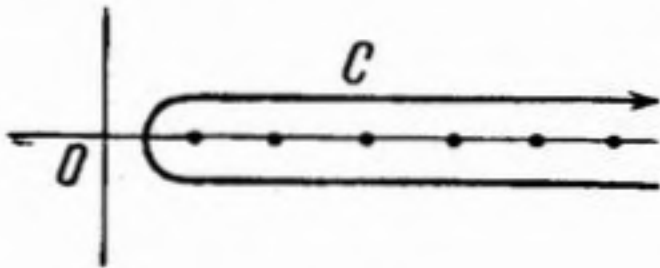
можно написать

$$\begin{aligned} \eta_{\Phi}(z + \varphi_1) + \eta_{\Phi}(z - \varphi_1) &= -\frac{1}{4} \left(\int_{-\alpha-i\infty}^{-\alpha+i\infty} + \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \right) \frac{\cos w\varphi_1 e^{-iwz}}{\cos \frac{w\pi}{2} \sin 2w\Phi} dw = \\ &= \frac{1}{4} \left(\int_{-\alpha-i\infty}^{-\alpha+i\infty} + \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \right) \frac{\cos w\varphi_1}{\cos \frac{w\pi}{2} \sin 2w\Phi} e^{iwz} dw. \end{aligned}$$

Или, перенеся путь интегрирования первого интеграла вправо до совпадения со вторым:

$$\eta_{\Phi}(z + \varphi_1) + \eta_{\Phi}(z - \varphi_1) = \frac{\pi}{4\Phi i} + \frac{1}{2} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \frac{\cos w\varphi_1}{\cos \frac{w\pi}{2} \sin w\Phi} e^{iwz} dw.$$

В написанном виде интеграл представляет рассматриваемую функцию только в полосе сходимости $|\operatorname{Re} z| < \frac{\pi}{2} + 2\Phi - |\varphi_1|$. Однако если деформировать контур интегрирования так, как показано



Фиг. 9

на фиг. 9, то выражение

$$\begin{aligned} \eta_{\Phi}(z + \varphi_1) + \eta_{\Phi}(z - \varphi_1) &= \frac{\pi}{4\Phi i} + \\ &+ \frac{1}{2} \int_C \frac{\cos w\varphi_1}{\cos \frac{w\pi}{2} \sin 2w\Phi} e^{iwz} dw \end{aligned}$$

становится пригодным во всей верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z > \varepsilon$. При этом интеграл сводится к сумме вычетов во всех полюсах подинтегрального выражения.

Если функции $\cos \frac{w\pi}{2}$ и $\sin 2w\Phi$ не имеют общих нулей, что имеет место, например, если $2\Phi = \frac{\pi n}{2m}$, где $\frac{n}{2m}$ — несократимая дробь, то все полюсы знаменателя простые и расположены в точках $w = 2k - 1$ ($k = 1, 2, 3, \dots$) и $w = \frac{s\pi}{2\Phi}$ ($s = 1, 2, 3, \dots$).

При этом

$$\begin{aligned} \eta_{\Phi}(z + \varphi_1) + \eta_{\Phi}(z - \varphi_1) &= \frac{\pi}{4\Phi i} + \frac{\pi}{2\Phi i} \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^s \frac{\cos \frac{s\pi\varphi_1}{2\Phi}}{\cos \frac{s\pi}{4\Phi}} \exp\left(\frac{i\pi s z}{2\Phi}\right) + \\ &+ \frac{2}{i} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\cos (2k-1)\varphi_1}{\sin (2k-1)2\Phi} \exp[i(2k-1)z]. \end{aligned} \quad (44)$$

Это выражение теряет смысл только в том случае, если угол раствора клина $2\Phi = \pi \frac{n}{2m-1}$. При этом под знаками суммирования обращаются в бесконечность члены, соответствующие $s = n(2r-1)$; $2k-1 = (2m-1)(2r-1)$.

В таком случае эти члены под знаком сумм следует опустить, зато к правой части должен быть добавлен член

$$-\frac{4(2m-1)}{n\pi} z \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^{m(r-1)} \cos[(2m-1)(2r-1)] \exp\{i[(2m-1)(2r-1)z]\}. \quad (45)$$

Оставив в стороне этот особый случай, легче рассматриваемый иным способом, воспользуемся рядом (44), который при $\text{Im } z > \varepsilon$ сходится абсолютно и равномерно.

Подставив его в (43) и меняя последовательность суммирования и интегрирования, получаем

$$S(r, \varphi_1 - \Phi) = \frac{\pi}{4\Phi} J_0(kr) + \frac{\pi}{2\Phi} \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^s \exp\left[-\frac{is\pi^2}{4\Phi}\right] \frac{\cos \frac{s\pi\varphi_1}{2\Phi}}{\cos \frac{s\pi^2}{4\Phi}} J_{\frac{s\pi}{2\Phi}}(kr) +$$

$$+ 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \exp\left[-\frac{i(2k-1)\pi}{2}\right] \frac{\cos [(2k-1)\varphi_1]}{\sin [2\Phi(2k-1)]} J_{2k-1}(kr), \quad (46)$$

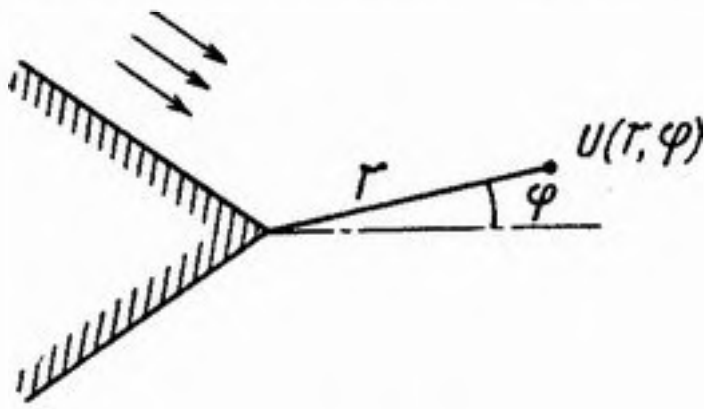
где $J_p(\rho)$ — бесселева функция, выражаемая интегралом Зоммерфельда:

$$J_p(\rho) = -\frac{\exp\left(-\frac{ip\pi}{2}\right)}{2\pi} \int_{\gamma_1} \exp(-ip \cos z) \exp(ipz) dz.$$

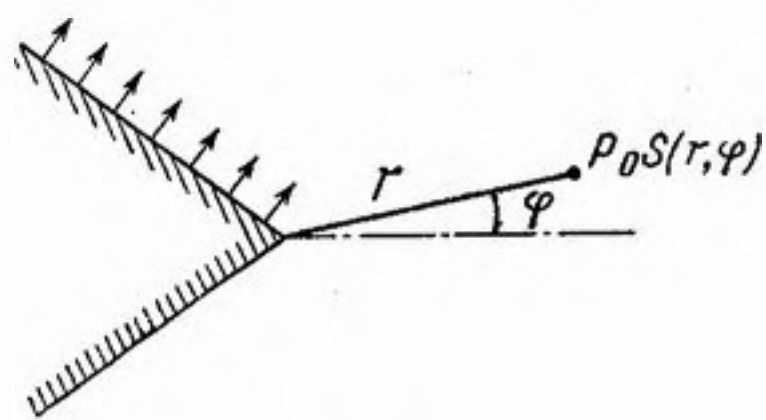
Заменяя в (46) $\varphi_1 = \varphi + \Phi$, получаем искомый ряд (41).

5. Связь между решениями задачи об излучении гранями клина и задачи диффракции на жестком клине

Пусть $u(r, \varphi)$ — поле звукового давления в клиновидной области $|\varphi| < \Phi$, получающееся в результате диффракции плоской волны $u_0(r, \varphi) = p_0 \exp[-ikr \cos(\varphi - \Phi)]$ на жестком клине (фиг. 10). Падающая плоская волна u_0 скользит вдоль грани $\varphi = \Phi$.



Фиг. 10



Фиг. 11

С другой стороны, мы имеем рассмотренное выше поле звукового давления $p_0 S(r, \varphi)$, создаваемое колебаниями грани $\varphi = \Phi$ (фиг. 11) со скоростью $p_0 / \rho c$.

Можно показать, что

$$p_0 S(r, \varphi + \pi/2) + p_0 S(r, \varphi - \pi/2) = \frac{1}{2} u(r, \varphi). \quad (47)$$

То-есть в результате сложения двух сдвинутых по углу решений задачи излучения (аналитически продолженных за грани клина) получается точное решение задачи диффракции.

Действительно, решение Зоммерфельда для рассматриваемой задачи диффракции имеет вид:

$$u(r, \varphi) = \frac{p_0}{4\Phi i} \int_{\gamma} \exp[-ikr \cos(\varphi - z)] \frac{\cos \frac{\pi z}{2\Phi}}{\sin \frac{\pi z}{2\Phi} - 1} dz. \quad (48)$$

С другой стороны, в силу (28)

$$p_0 \left[S \left(r, \varphi + \frac{\pi}{2} \right) + S \left(r, \varphi - \frac{\pi}{2} \right) \right] = \frac{p_0}{2\pi i} \int_{\gamma} \exp[-ikr \cos(\varphi - z)] [\eta_{\Phi}(z + \Phi + \pi/2) + \eta_{\Phi}(z + \Phi - \pi/2)] dz,$$

но*

$$\begin{aligned} \eta_{\Phi}(z + \Phi + \pi/2) + \eta_{\Phi}(z + \Phi - \pi/2) &= -\frac{\pi}{4\Phi} \operatorname{tg} \frac{\pi(z + \Phi)}{4\Phi} = \\ &= \frac{\pi}{4\Phi} \frac{\cos \frac{\pi z}{2\Phi}}{\sin \frac{\pi z}{2\Phi} - 1}. \end{aligned}$$

Подставляя это выражение в предыдущий интеграл, убеждаемся в справедливости (47).

В частном случае $2\Phi = \pi$, когда поле $u(r, \varphi)$ сводится к плоской волне $u = p_0 \exp[-ikr \cos(\varphi - \frac{\pi}{2})] = p_0 \exp(-ikr \sin \varphi)$, из (47) получаем

$$S \left(r, \varphi + \frac{\pi}{2} \right) + S \left(r, \varphi - \frac{\pi}{2} \right) = \frac{1}{2} \exp[-ikr \sin \varphi].$$

ПРИЛОЖЕНИЕ

Свойства функции $\eta_{\Phi}(z)$

Функция $\eta_{\Phi}(z)$ определяет собой угловое распределение амплитуд плоских волн в интеграле Зоммерфельда, выражающем волновое поле в клине углового размера 2Φ с колеблющимися гранями. Приведем основные свойства этой функции, исследованной автором при решении другой задачи.

1) Интегральные представления

$$\eta_{\Phi}(z) = \frac{e^{-iz}}{4i\Phi} \int_0^{\infty} \frac{(t^{\pi/2\Phi} - 1) dt}{(t^{\pi/2\Phi} + 1)(t^2 + e^{-2iz})}, \quad (1)$$

$$\eta_{\Phi}(z) = \frac{1}{8i\Phi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{th} \frac{\pi t}{4\Phi}}{\operatorname{ch}(t + iz)} dt, \quad (2)$$

$$\eta_{\Phi}(z) = -\frac{1}{8} \left\{ \int_{-\varepsilon - i\infty}^{-\varepsilon + i\infty} \frac{e^{-iwz} dw}{\cos \frac{\pi w}{2} \sin 2\Phi w} + \int_{\varepsilon - i\infty}^{\varepsilon + i\infty} \frac{e^{-iwz} dw}{\cos \frac{\pi w}{2} \sin 2\Phi w} \right\}. \quad (3)$$

2) Функциональные соотношения

$$\eta_{\Phi}(z) + \eta_{\Phi}(-z) = 0, \quad (4)$$

$$\eta_{\Phi}(z - 2\Phi) - \eta_{\Phi}(z + 2\Phi) = \frac{1}{\cos z}, \quad (5)$$

$$\eta_{\Phi} \left(z + \frac{\pi}{2} \right) + \eta_{\Phi} \left(z - \frac{\pi}{2} \right) = -\frac{\pi}{4\Phi} \operatorname{tg} \frac{\pi z}{4\Phi}, \quad (6)$$

* См. приложение в конце статьи.

$$\eta_{\Phi}(z - \pi) - \eta_{\Phi}(z + \pi) = \frac{\pi}{2\Phi} \frac{\sin \frac{\pi^2}{4\Phi}}{\cos \frac{\pi^2}{4\Phi} + \cos \frac{\pi z}{2\Phi}}, \quad (7)$$

$$\eta_{\Phi}(z + \Phi) + \eta_{\Phi/2}(z - \Phi) = \eta_{\Phi/2}(z). \quad (8)$$

3) Представление в виде ряда

$$\eta_{\Phi}(z) = 2z \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{l+1}}{z^2 - \left[\frac{\pi}{2}(2l-1) + 2\Phi(2k-1) \right]^2}. \quad (9)$$

4) Частные случаи.

Если $\Phi = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{n}{m}$, где $\frac{n}{m}$ — несократимая рациональная дробь, интеграл (58) берется в конечном виде.

Если n — нечетно, то

$$\eta_{\pi n/4m}(z) = \frac{m}{2n} \sum_{l=1}^n (-1)^l \operatorname{tg} \frac{n}{m} \left[z - \frac{\pi}{2} (2l-1) \right] + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \sec \left[z + \frac{n}{m} \frac{\pi}{2} (2k-1) \right]. \quad (10)$$

Если n — четно, то переменная z входит в выражение функций $\eta_{\Phi}(z)$ не только под знаком тригонометрических функций, но также линейно. Например,

$$\eta_{\pi/2}(z) = \frac{z}{2\pi \cos z} - \frac{\operatorname{tg} z}{4}, \quad (11)$$

$$\eta_{\pi}(z) = \frac{\cos \frac{\pi}{4} \sin \frac{z}{2} - \frac{z}{2\pi}}{2 \cos z} - \frac{\operatorname{tg} z}{8}. \quad (12)$$

5) Другое применение функции $\eta_{\Phi}(z)$.

Через функцию $\eta_{\Phi}(z)$ выражается решение задачи диффракции плоской волны $\exp \{ -ik [z \cos \theta + r \sin \theta \cos (\varphi - \varphi_0)] \}$ в клиновидной области ($|\varphi| < \Phi$, $|z| < \infty$, $0 < r < \infty$) с поглощающими гранями, при краевых условиях

$$\left[\frac{\partial p}{\partial n} + ik g_1 p \right]_{\varphi=\Phi} = 0; \quad \left[\frac{\partial p}{\partial n} + ik g_2 p \right]_{\varphi=-\Phi} = 0. \quad (13)$$

Если адмитанцы граней выразить через вспомогательные углы ϑ_1 и ϑ_2 , положив $g_1 = \sin \theta \sin \vartheta_1$; $g_2 = \sin \theta \sin \vartheta_2$ и обозначить

$$f(t) = \eta_{\Phi} \left(t + \Phi - \frac{\pi}{2} + \vartheta_1 \right) - \eta_{\Phi} \left(t + \Phi - \frac{\pi}{2} - \vartheta_1 \right) + \eta_{\Phi} \left(t - \Phi + \frac{\pi}{2} - \vartheta_2 \right) - \eta_{\Phi} \left(t - \Phi + \frac{\pi}{2} + \vartheta_2 \right), \quad (14)$$

$$s(\alpha) = \frac{\pi}{2\Phi} \frac{\cos \frac{\pi\varphi_0}{2\Phi}}{\sin \frac{\pi\alpha}{2\Phi} - \sin \frac{\pi\varphi_0}{2\Phi}} \times \frac{\sin \frac{\pi}{4\Phi} (\alpha - \Phi - \vartheta_1) \sin \frac{\pi}{4\Phi} (\alpha + \Phi + \vartheta_2)}{\sin \frac{\pi}{4\Phi} (\varphi_0 - \Phi - \vartheta_1) \sin \frac{\pi}{4\Phi} (\varphi_0 + \Phi + \vartheta_2)} \exp \left[\int_{\varphi_0}^{\alpha} f(t) dt \right], \quad (15)$$

то решение задачи, полученное автором в 1949 году [2], дается интегралом Зоммерфельда

$$p(r, \varphi, z) = \frac{e^{-ikz \cos \theta}}{2\pi i} \int_{\gamma} e^{-ikr \sin \theta \cos(\varphi - \alpha)} s(\alpha) d\alpha. \quad (16)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Д. Малюжинец. ДАН, 1948, 60, № 3, 307—311, ДАН 1951, 78, № 3, 439—442, ЖТФ, 1951, № 8.
2. Г. Д. Малюжинец. Диссертация ФИАН, автореферат. Изд. АН СССР, 1950.
3. А. Зоммерфельд. В книге Франк Ф. и Мизес Г. Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики, ОНТИ, 1937.

Акустический институт АН СССР
Москва

Поступила в редакцию
1 марта 1955 г.