АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том I 1955 Вып. 3

ИЗЛУЧЕНИЕ ЗВУКА КОЛЕБЛЮЩИМИСЯ ГРАНЯМИ ПРОИЗВОЛЬНОГО КЛИНА

ЧАСТЬ II

Г. Д. Малюжинец

При помощи полученного в первой части работы точного решения для звукового давления, вызываемого колебанием граней клина, показано, что наличие ребра клина совсем не влияет на излучаемую звуковую мощность, которая определяется правилами геометрической акустики точно. Краевой эффект сводится только к реактивной (упругой или инерциальной) поправке к сопротивлению излучения.

6.* Влияние ребра клина на излучаемую звуковую мощность

Ниже будет показано, что наличие ребра совершенно не влияет на излучаемую мощность. Чтобы пояснить это утверждение, приведем такой пример. Пусть имеется бесконечная пластина, колеблющаяся с одинаковой всюду амплитудой. Тогда излучаемая мощность не изменится, если мы согнем колеблющуюся пластину вдоль прямой линии под любым углом, сохранив прежней амплитуду нормальной скорости. При этом возникает лишь реактивная поправка к сопротивлению излучения, которая может иметь или инерциальный, или упругий характер.

Обратимся к вычислению звуковой мощности, излучаемой колеблющимися гранями в область $-\Phi < \varphi < \Phi$. Будем считать при этом, что амплитуды скоростей v_1 и v_2 комплексны. Если бы отсутствовали дифракционные явления вблизи ребра клина, полное излучение обуславливалось бы только плоскими волнами, излучаемыми каждой гранью в нормальном направлении. Амплитуды звуковых давлений, обуславливаемых этими волнами, равны:

на первой грани $p_1 = \rho c v_1$,

на второй грани $p_2 = \rho c v_2$.

Мощность, приходящаяся на единицу длины клина, определялась бы по формуле

$$W_0(r_1) = \frac{1}{2}\int_0^{r_1} (v_1^* p_1 + v_2^* p_2)\, dr = \frac{\rho c}{2}(|v_1|^2 + |v_2|^2)\, r_1.$$

Естественно, что полная мощность $W_0(\infty) = \infty$.

Чтобы вычислить мощность с учетом краевого эффекта, нужно подставить в интеграл вместо p_1 и p_2 истинные звуковые давления $p(r, \Phi)$ и $p(r, -\Phi)$, определяемые выражением (30):

$$p(r, \varphi) = \frac{\rho c}{2\pi i}\int_\gamma e^{-ikr\cos(\varphi - z)}\,[v_1 \eta_\Phi(z + \Phi) + v_2 \eta_\Phi(z - \Phi)]\, dz.$$

---

* Нумерация разделов, формул и фигур начата в I ч. статьи автора, напечатанной в предыдущем выпуске журнала.

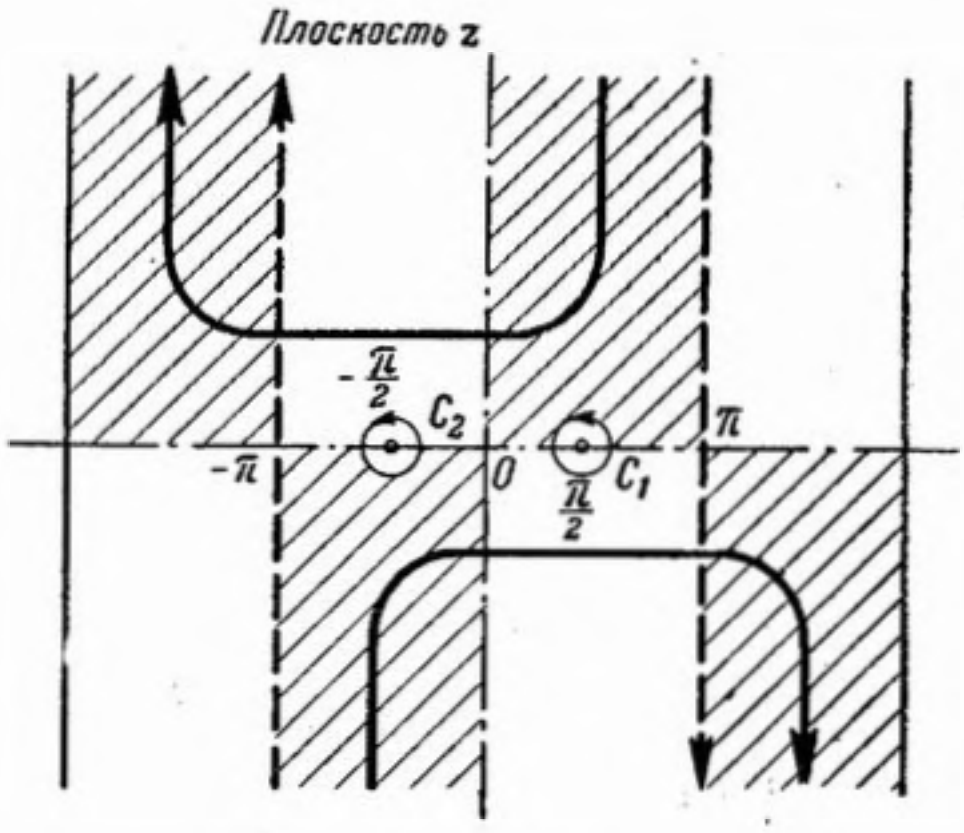
Однако при этом интеграл

$$W(r_1) = \frac{1}{2}\int_0^{r_1} [\dot{v}_1 p(r, \Phi) + \dot{v}_2 p(r, -\Phi)]\, dr$$

будет иметь вещественную и мнимую части. Вещественная часть равна средней (по времени) излучаемой мощности. Мнимая же определяет реактивную компоненту сопротивления излучения.

Проще всего выполнить интеграцию в пределах от нуля до бесконечности. Но непосредственно этого сделать нельзя, так как выражение $W(r_1)$ должно содержать член, обращающийся в бесконечность при $r_1 \to \infty$. Однако если выделить только краевой эффект, рассматривая разность $W_1(r_1) = W(r_1) - W_0(r_1)$, то можно перейти к пределу $r_1 = \infty$. Таким образом, рассмотрим добавочную (комплексную) мощность, обуславливаемую краевым эффектом:

$$W_1(\infty) = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \Big\{\dot{v}_1 [p(r, \Phi) - \rho c v_1] + \dot{v}_2 [p(r, -\Phi) - \rho c v_2]\Big\}\, dr. \qquad (49)$$



Фиг. 12

Из решения (30), пользуясь заменой переменной интеграции, получаем

$$p(r, \Phi) = \frac{\rho c}{2\pi i}\int_\gamma e^{-ikr\cos z}\left[v_1 \eta_\Phi(z + 2\Phi) + v_2 \eta_\Phi(z)\right] dz$$

и аналогично

$$p(r, -\Phi) = \frac{\rho c}{2\pi i}\int_\gamma e^{-ikr\cos z}\left[v_1 \eta_\Phi(z) + v_2 \eta_\Phi(z - 2\Phi)\right] dz.$$

Поэтому выражение (49) можно переписать так:

$$W_1(\infty) = \frac{\rho c}{2}\int_0^{\infty}\Big\{\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma e^{-ikr\cos z}\Big[|v_1|^2 \eta_\Phi(z + 2\Phi) + (\dot{v}_1 v_2 + v_1 \dot{v}_2)\,\eta_\Phi(z) + |v_2|^2 \eta_\Phi(z - 2\Phi)\Big]\, dz - |v_1|^2 - |v_2|^2\Big\} dz.$$

Для упрощения вычислений предположим сначала, что $\Phi > \frac{\pi}{4}$; в силу аналитичности результат будет верен и в общем случае. При таком предположении выражение, стоящее в квадратных скобках под интегралом, регулярно в полосе $|\operatorname{Re} z| \leqslant \pi$ всюду, кроме простых полюсов в точках $\pm\frac{\pi}{2}$, с вычетами $|v_1|^2$ и $|v_2|^2$.

Если деформировать контур интеграции γ, соединив верхнюю и нижнюю петли так, что образуются два прямолинейных пути интеграции γ_1 и γ_2 (фиг. 12), то указанные вычеты компенсируют члены $-|v_1|^2$ и

$-|v_2|^2$ в фигурных скобках. Тогда получаем

$$W_1(\infty)=\frac{\rho c}{4\pi i}\int\limits_0^\infty dr\int\limits_{\gamma_1+\gamma_2} e^{-ikr\cos z}\left[|v_1|^2\eta_\Phi(z+2\Phi)+(v_1^*\cdot v_2+v_1v_2^*)\eta_\Phi(z)+\right.$$
$$\left.+|v_2|^2\eta_\Phi(z-2\Phi)\right]dz.$$

Теперь можно выполнить интегрирование по r под знаком интеграла. Требуемая для этого сходимость интеграла обеспечивается возможностью в силу принципа погашаемости считать $0<\arg k<\pi$.

Произведя интегрирование, получаем

$$W_1(\infty)=-\frac{\rho c}{4\pi k}\int\limits_{\gamma_1+\gamma_2}\left[|v_1|^2\eta_\Phi(z+2\Phi)+(v_1^*v_2+v_1v_2^*)\eta_\Phi(z)+\right.$$
$$\left.+|v_2|^2\eta_\Phi(z-2\Phi)\right]\frac{dz}{\cos z}.$$

Последний интеграл сводится к вычетам в полюсах $\pm\frac{\pi}{2}$:

$$W_1(\infty)=\frac{\rho c}{4\pi k}\int\limits_{C_1+C_2}\left[|v_1|^2\eta_\Phi(z+2\Phi)+(v_1^*v_2+v_1v_2^*)\eta_\Phi(z)+\right.$$
$$\left.+|v_2|^2\eta_\Phi(z-2\Phi)\right]\frac{dz}{\cos z}=$$
$$=\frac{\rho c}{4\pi k}\int\limits_C\left\{|v_1|^2\left[\eta_\Phi\left(z+2\Phi-\frac{\pi}{2}\right)-\eta_\Phi\left(z+2\Phi+\frac{\pi}{2}\right)\right]+(v_1^*v_2+v_1v_2^*)\left[\eta_\Phi\left(z-\frac{\pi}{2}\right)-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\eta_\Phi\left(z+\frac{\pi}{2}\right)\right]+|v_2|^2\left[\eta_\Phi\left(z-2\Phi-\frac{\pi}{2}\right)-\eta_\Phi\left(z-2\Phi+\frac{\pi}{2}\right)\right]\right\}\frac{dz}{\sin z},$$

где C — замкнутый контур, охватывающий начало координат. Воспользуемся тождеством *

$$\eta_\Phi\left(z+\frac{\pi}{2}\right)+\eta_\Phi\left(z-\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\pi}{4\Phi}\operatorname{tg}\frac{\pi z}{4\Phi}.$$

Тогда

$$\eta_\Phi\left(z\pm2\Phi+\frac{\pi}{2}\right)+\eta_\Phi\left(z\pm2\Phi-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{4\Phi}\operatorname{ctg}\frac{\pi z}{4\Phi}.$$

Поэтому

$$W_1(\infty)=\frac{\rho c}{2\pi k}\int\limits_C\left\{|v_1|^2\eta_\Phi\left(z+2\Phi-\frac{\pi}{2}\right)-(v_1^*v_2+v_1v_2^*)\eta_\Phi\left(z+\frac{\pi}{2}\right)-\right.$$
$$-|v_2|^2\eta_\Phi\left(z-2\Phi+\frac{\pi}{2}\right)-(|v_1|^2-|v_2|^2)\frac{\pi}{8\Phi}\operatorname{ctg}\frac{\pi z}{4\Phi}+$$
$$\left.+\frac{\pi}{8\Phi}(v_1^*v_2+v_1v_2^*)\operatorname{tg}\frac{\pi z}{4\Phi}\right\}\frac{dz}{\sin z}.$$

Выражение, стоящее в квадратных скобках под интегралом, регулярно в точке $z=0$. Для членов с $\operatorname{ctg}\frac{\pi z}{4\Phi}$ и $\operatorname{tg}\frac{\pi z}{4\Phi}$ вычеты равны нулю. Поэтому

$$W_1(\infty)=\frac{i\rho c}{k}\left[|v_1|^2\eta_\Phi\left(2\Phi-\frac{\pi}{2}\right)-|v_2|^2\eta_\Phi\left(\frac{\pi}{2}-2\Phi\right)-\right.$$
$$\left.-(v_1^*v_2+v_1v_2^*)\eta_\Phi\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

* См. приложение.

или, пользуясь нечетностью функции $\eta_\Phi(z)$*:

$$W_1(\infty) = \frac{i\rho c}{k}\left[\left(|v_1|^2 + |v_2|^2\right)\eta_\Phi\left(2\Phi - \frac{\pi}{2}\right) - \left(v_1^* v_2 + v_1 v_2^*\right)\eta_\Phi\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]. \quad (50)$$

В частном случае $\Phi = \frac{\pi}{2}$:

$$W_1(\infty) = \frac{i\rho c}{k}\left[|v_1|^2 + |v_2|^2 - \left(v_1^* v_2 + v_1 v_2^*\right)\right]\eta_{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{i\rho c}{k}\left|v_1 - v_2\right|^2 \eta_{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2}\right). \quad (51)$$

Если при этом $v_1 = v_2$, то $W_1(\infty) = 0$.

Другой частный случай: $v_1 = v_2 = v$.

Таблица

2Φ, градусов	$2\eta_\Phi\left(\frac{\pi}{2}\right)$	$2\eta_\Phi\left(2\Phi - \frac{\pi}{2}\right)$
0	$-\infty$	—
15	−12,6264	7,3095
18	−9,9443	5,5055
22,5	—	3,8284
30	−5,0000	2,3095
45	−2,8284	1,0000
90	−1,0000	0,0000
180	−0,3183	−0,3183
270	−0,1547	−0,3846
360	−0,0909	−0,4092

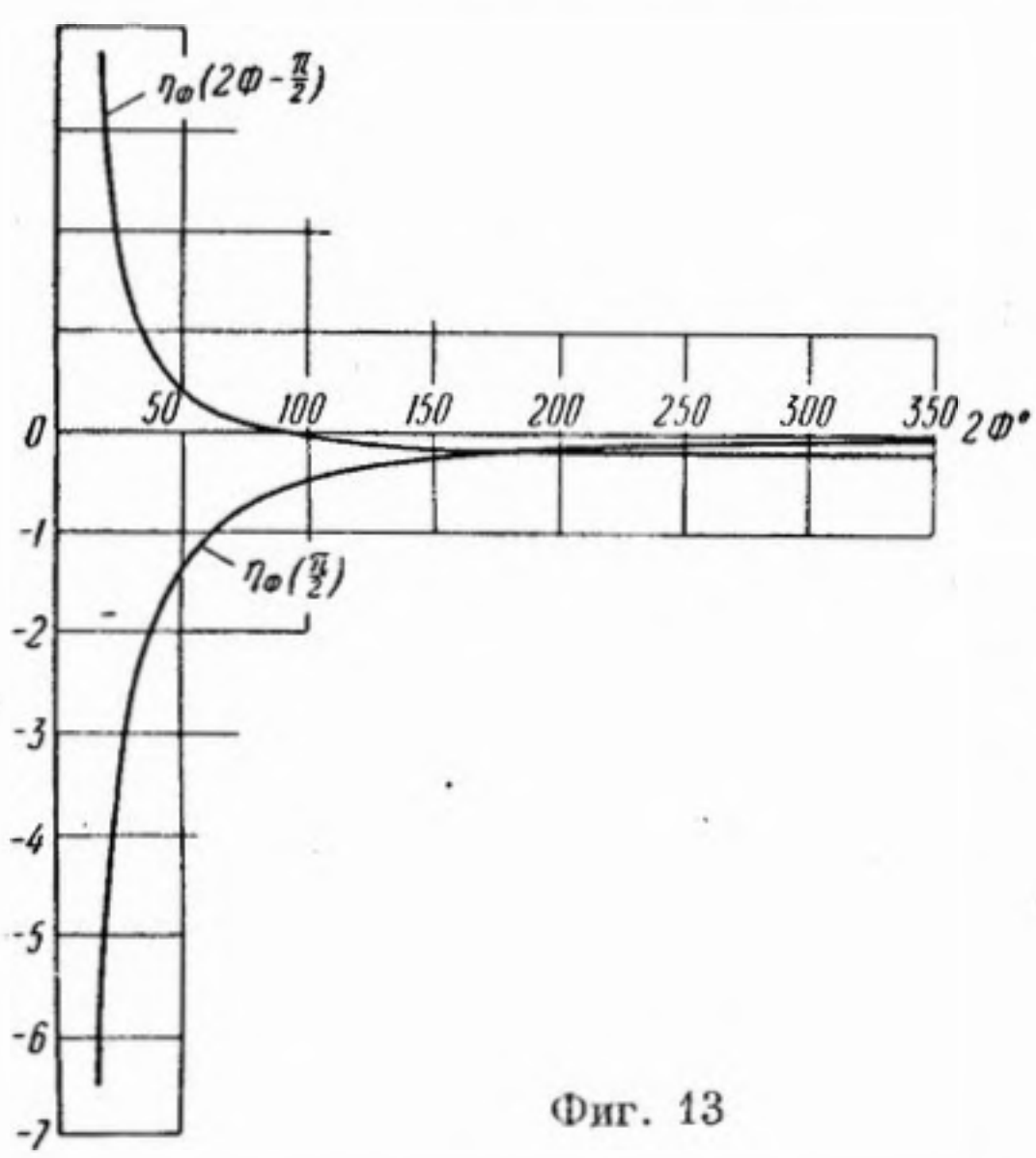
$$W_1(\infty) = \frac{2i\rho c\,|v|^2}{k}\left[\eta_\Phi\left(2\Phi - \frac{\pi}{2}\right) - \eta_\Phi\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] = \frac{i\rho c\,|v|^2}{k} \times$$

$$\times \int_0^\infty \left(\operatorname{th}\frac{w\pi}{2}\operatorname{cth} w\Phi - 1\right) dw. \quad (52)$$

При вещественном аргументе функция $\eta_\Phi(z)$* вещественна. Следовательно, величина $W_1(\infty)$ чисто мнима. Таким образом, диффракционные эффекты не влияют на среднюю активную мощность, излучаемую клином, которая при достаточно больших r_1 дается выражением

$$W_0(r_1) = \frac{\rho c}{2}\left(|v_1|^2 + |v_2|^2\right) r_1.$$

Значения функций $\eta_\Phi\left(\frac{\pi}{2}\right)$ и $\eta_\Phi\left(2\Phi - \frac{\pi}{2}\right)$, вычисленные с точностью четырех знаков, даны в таблице. При помощи этой таблицы можно вычислять реактивную поправку к сопротивлению излучения, обуславливаемую наличием ребра клина, на основании формул (50), (51), (52). Графики функций изображены на фиг. 13.



Фиг. 13

7. Обобщение на случай неравномерного распределения скорости по граням

В разделах 1, 2 получено точное решение задачи для звукового давления в клиновидной области $-\Phi < \varphi < \Phi$, если заданы амплитуды нормальных скоростей v_1 и v_2 на гранях клина, постоянные вдоль каждой грани.

* См. приложение к первой части статьи.

Совершенно аналогичным методом можно получить решение для случая, когда эти амплитуды изменяются вдоль граней по экспоненциальному закону, т. е. когда вместо постоянных v_1 и v_2 на гранях заданы выражения $v_1 e^{-i(m_1 r + n_1 z)}$ и $v_2 e^{-i(m_2 r + n_2 z)}$, где z — координата вдоль ребра клина, m_1, m_2, n_1, n_2 — любые вещественные или комплексные постоянные.

Краевые условия для звукового давления при этом получают вид:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{ik\rho cr}\frac{\partial p}{\partial \varphi} &= v_1 e^{-i(m_1 r + n_1 z)} \quad \text{при } \varphi = \Phi, \\ \frac{1}{ik\rho cr}\frac{\partial p}{\partial \varphi} &= v_2 e^{-i(m_2 r + n_2 z)} \quad \text{при } \varphi = -\Phi. \end{aligned} \tag{53}$$

При $m_1 = m_2 = n_1 = n_2 = 0$ они переходят в краевые условия раздела 1. Так же как и раньше, решение задачи, удовлетворяющее этим условиям, уравнению $\Delta p + k^2 p = 0$ и принципу погашаемости, можно представить суммой решений, соответствующих заданному колебанию только одной грани, при другой неподвижной:

$$p = p_1 + p_2,$$

где p_1 удовлетворяет краевым условиям

$$-\frac{1}{ik\rho cr}\frac{\partial p_1}{\partial \varphi} = \begin{cases} v_1 e^{-i(m_1 r + n_1 z)} & \varphi = \Phi, \\ 0 & \varphi = -\Phi \end{cases}$$

и p_2 — условиям

$$\frac{1}{ik\rho c}\frac{\partial p_2}{\partial \varphi} = \begin{cases} 0 & \varphi = \Phi, \\ v_2 e^{-i(m_2 r + n_2 z)} & \varphi = -\Phi. \end{cases}$$

Для дальнейшего удобно ввести обозначения постоянных m_1, n_1, m_2, n_2 через углы

$$\begin{aligned} n_1 &= k\cos\theta_1, \qquad m_1 = k\sin\theta_1\cos\alpha_1, \\ n_2 &= k\cos\theta_2, \qquad m_2 = k\sin\theta_2\cos\alpha_2, \end{aligned} \tag{54}$$

так что краевые условия для p_1 и p_2 переходят в

$$-\frac{1}{ik\rho cr}\frac{\partial p_1}{\partial \varphi} = \begin{cases} v_1 e^{-ik(r\sin\theta_1\cos\alpha_1 + z\cos\theta_1)} & \varphi = \Phi, \\ 0 & \varphi = -\Phi, \end{cases}$$

$$\frac{1}{ik\rho cr}\frac{\partial p_2}{\partial \varphi} = \begin{cases} 0 & \varphi = \Phi, \\ v_2 e^{-ik(r\sin\theta_2\cos\alpha_2 + z\cos\theta_2)} & \varphi = -\Phi. \end{cases}$$

Если ввести вместо звуковых давлений p_1 и p_2 новые функции S_1 и S_2 так, что

$$p_1 = \frac{\rho c v_1}{\sin\theta_1} S_1 e^{-ikz\cos\theta_1}, \qquad p_2 = \frac{\rho c v_2}{\sin\theta_2} S_2 e^{-ikr\cos\theta_2},$$

то для S_1 и S_2, удовлетворяющих уравнениям

$$\Delta S_1 + (k\sin\theta_1)^2 S_1 = 0, \qquad \Delta S_2 + (k\sin\theta_2)^2 S_2 = 0,$$

получаем краевые условия

$$-\frac{1}{i(k\sin\theta_1)r}\frac{\partial S_1}{\partial \varphi} = \begin{cases} e^{-i(k\sin\theta_1)r\cos\alpha_1} & \varphi = \Phi, \\ 0 & \varphi = -\Phi, \end{cases}$$

$$\frac{1}{i(k\sin\theta_2)r}\frac{\partial S_2}{\partial \varphi} = \begin{cases} 0 & \varphi = \Phi, \\ e^{-i(k\sin\theta_2)r\cos\alpha_2} & \varphi = -\Phi. \end{cases}$$

Таким образом, трехмерные задачи о полях, создаваемых колебаниями только верхней или нижней грани, свелись к плоским задачам, не зависящим от координаты z вдоль ребра клина. Но теперь в задачи для S_1 и S_2 вместо волнового числа k входят величины $(k \sin \theta_1)$ и $(k \sin \theta_2)$.

Решения для S_1 и S_2 в виде интегралов Зоммерфельда

$$\begin{aligned} S_1(r, \varphi) &= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} e^{-i(k \sin \theta_1) r \cos(\varphi - z)} \eta_{\Phi}^{*}(z + \Phi, a_1)\, dz, \\ S_2(r, -\varphi) &= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} e^{-i(k \sin \theta_2) r \cos(\varphi - z)} \eta_{\Phi}^{*}(z + \Phi, \alpha_2)\, dz \end{aligned} \tag{55}$$

находятся методом, совершенно аналогичным использованному в разделах 1, 2.

Для функции $\eta_{\Phi}^{*}(z, \alpha)$ получаем функциональные уравнения

$$\eta_{\Phi}^{*}(z, \alpha) + \eta_{\Phi}^{*}(-z, \alpha) = 0,$$

$$\eta_{\Phi}^{*}(z - 2\Phi, \alpha) - \eta_{\Phi}^{*}(z + 2\Phi, \alpha) = \frac{1}{\cos z - \cos \alpha},$$

приводящие к выражению $\eta_{\Phi}^{*}(z, \alpha)$ в виде интеграла

$$\eta_{\Phi}^{*}(z, \alpha) = -\frac{1}{4 \sin(\pi - \alpha)} \left\{ \int\limits_{-\varepsilon - i\infty}^{-\varepsilon + i\infty} + \int\limits_{\varepsilon - i\infty}^{\varepsilon + i\infty} \right\} \frac{\sin w(\pi - \alpha) e^{-iwz}}{\sin w\pi \cdot \sin 2w\Phi}\, dw. \tag{56}$$

При $\alpha = \frac{\pi}{2}$ функция $\eta_{\Phi}^{*}(z, \alpha)$ обращается в ранее рассмотренную функцию $\eta_{\Phi}(z)$:

$$\eta_{\Phi}^{*}\left(z, \frac{\pi}{2}\right) = \eta_{\Phi}(z).$$

При помощи интеграла (56) легко убедиться, что $\eta_{\Phi}^{*}(z_1 \alpha)$ удовлетворяет еще функциональному соотношению

$$\eta_{\Phi}^{*}(z - \pi, \alpha) - \eta_{\Phi}^{*}(z + \pi, \alpha) = \frac{\pi}{2\Phi \sin(\pi - \alpha)} \frac{\sin \frac{\pi}{2\Phi}(\pi - \alpha)}{\cos \frac{\pi z}{2\Phi} + \cos \frac{\pi}{2\Phi}(\pi - \alpha)}.$$

Для ряда частных значений Φ и α интеграл (56) берется в конечном виде, например, для $2\Phi = \pi$ (клин развернут на плоскость) имеем

$$\eta_{\frac{\pi}{2}}^{*}(z, \alpha) = \frac{1}{2\pi(\cos z + \cos \alpha)} \left(z - \frac{(\pi - \alpha) \sin z}{\sin \alpha} \right).$$

Полное решение задачи о звуковом поле, излучаемом гранями клина с распределением амплитуд скоростей согласно (53), (54), дается формулой

$$p(r, \varphi, z) = \frac{\rho c v_1}{\sin \theta_1} e^{-ikz \cos \theta_1} S_1(r, \varphi) + \frac{\rho c v_2}{\sin \theta_2} e^{-ikz \cos \theta_2} S_2(r, \varphi), \tag{57}$$

где S_1 и S_2 определяются выражениями (55), (56).

Исследование полученного решения может быть проведено подобно тому, как это сделано для простейшего случая в разделах 3, 4, 5, 6. Заметим, что поскольку решение (57) пригодно для любого экспоненциального распределения скорости, то посредством суперпозиции при помощи интеграла Фурье легко получить решение для произвольного распределения скоростей на гранях клина. Разумеется, к такому же

результату можно придти совершенно другим способом, используя решение Зоммельфельда для диффракции сферической волны на идеально жестком клине в качестве функции Грина.

ПРИЛОЖЕНИЕ

В разделе 2 для получения функциональных уравнений, которым должна удовлетворять функция углового распределения амплитуд в интеграле Зоммерфельда, мы воспользовались следующей теоремой.

Теорема

Если аналитическая функция $S(z)$ регулярна при $|\operatorname{Im} z| \geqslant a$, то для соблюдения тождества $(r > 0)$

$$R(r) = \int_{\gamma} e^{-ikr\cos z} S(z)\, dz \equiv 0 \quad (\gamma = \gamma_1 + \gamma_2)$$

(фиг. 14) необходимо и достаточно, чтобы функция $S(z)$ была четной, т. е. $S(z) = S(-z)$.

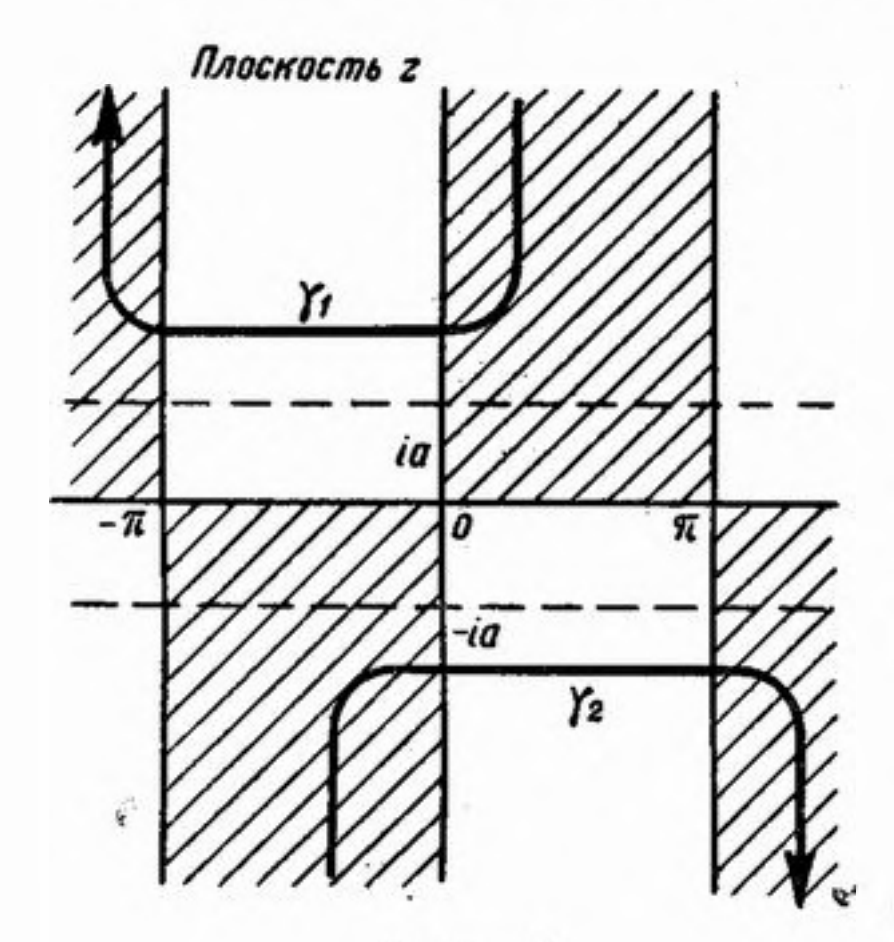
Доказательство

Предположим, что $S(z)$ — произвольная аналитическая функция, регулярная при $|\operatorname{Im} z| \geqslant a$. Можно единственным образом представить эту функцию суммой четной $f_1(z)$ и нечетной $f_2(z)$ составляющих. Действительно,

$$S(z) = \frac{1}{2}[S(z) + S(-z)] + \frac{1}{2}[S(z) - S(-z)] = f_1(z) + f_2(z).$$

Доказательство сводится к доказательству необходимости и достаточности условия $f_2(z) \equiv 0$ для выполнения тождества $R(r) \equiv 0$.

Разобьем интеграл $R(r)$ на два соответственно слагаемым f_1 и f_2:



Фиг. 14

$$R(r) = R_1(r) + R_2(r).$$

Первый интеграл

$$R_1(r) = \int_{\gamma} e^{-ikr\cos z} f_1(z)\, dz$$

обращается в нуль тождественно. Для доказательства этого заменим переменную интеграции z через $-z$. Тогда, пользуясь симметрией контура γ и четностью функции $f_1(z)$, имеем

$$R_1(r) = -\int_{\gamma} e^{-ikr\cos(-z)} f_1(-z)\, dz =$$

$$= -\int_{\gamma} e^{-ikr\cos z} f_1(z)\, dz = -R_1(r),$$

откуда $R_1(r) \equiv 0$.

Поэтому для справедливости тождества $R(r) \equiv 0$ необходимо и достаточно, чтобы

$$R_2(r) = \int_{\gamma} e^{-ikr\cos z} f_2(z)\, dz \equiv 0.$$

Разбивая в свою очередь этот интеграл на два соответственно петлям γ_1 и γ_2 контура γ и убеждаясь, что в силу нечетности $f_2(z)$, $\int_{\gamma_2} = \int_{\gamma_1}$, пе-

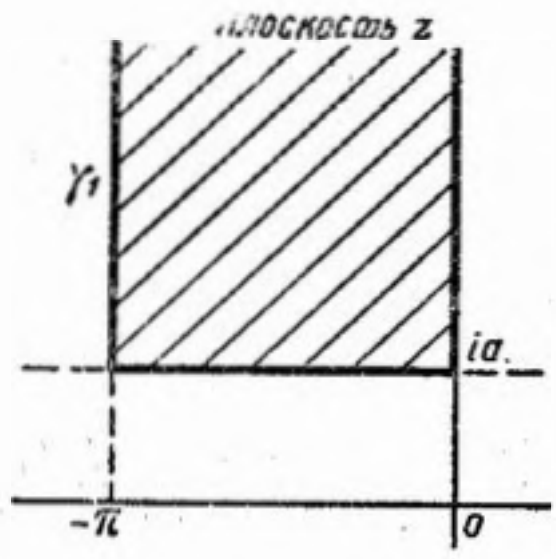
решишем последнее тождество так:

$$R_2(r) = 2\int\limits_{\gamma_1} e^{-ikr\cos z} f_2(z)\,dz \equiv 0.$$

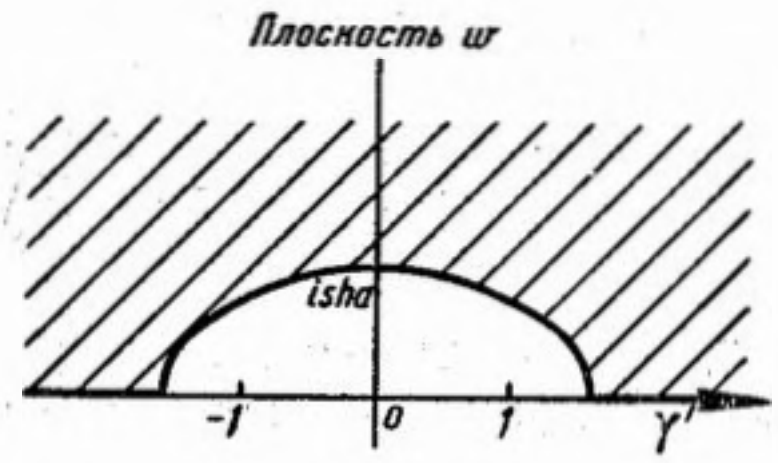
Считая $r > 0$, введем замену переменного, положив $\cos z = w$, $z = \arccos w$. При этом получаем

$$R_2(r) = 2\int\limits_{\gamma_1} \frac{e^{-ikrw} f_2(\arccos w)}{\sqrt{1-w^2}}\,dw \equiv 0.$$

Соответствующие друг другу контуры интеграции γ_1 и γ' показаны на фиг. 15 и 16.



Фиг. 15



Фиг. 16

Заштрихованные части плоскостей соответствуют друг другу. В них функция f_2 регулярна.

Умножая обе части равенства на $e^{ikr\nu}$, где ν — произвольное число такое, что $\operatorname{Im}\nu > \operatorname{sh} a$, и интегрируя в пределах от $c > 0$ до бесконечности, имеем

$$0 = 2\int\limits_c^\infty dr \int\limits_{\gamma'} e^{ikr(\nu-w)} \frac{f_2(\arccos w)}{\sqrt{1-w^2}}\,dw = \frac{2}{ik}\int\limits_{\gamma'} \frac{e^{ikc(\nu-w)} f_2(\arccos w)}{(w-\nu)\sqrt{1-w^2}}\,dw.$$

Теперь можно устремить $c \to 0$ так, что

$$\int\limits_{\gamma'} \frac{f_2(\arccos w)}{\sqrt{1-w^2}} \frac{dw}{w-\nu} = 0.$$

Ввиду достаточно быстрого убывания подинтегрального выражения с ростом w в верхней полуплоскости можно дополнить контур γ' полуокружностью бесконечно большого радиуса.

Тогда интеграл сводится к вычету в точке $w = \nu$ и мы получаем $\frac{f_2(\arccos \nu)}{\sqrt{1-\nu^2}} = 0$.

Следовательно, $f_2(p) \equiv 0$ и теорема полностью доказана.

Заметим, кстати, что попутно можно доказать при некоторых предположениях относительно вида функций $\varphi(\nu)$ следующую теорему единственности для разложения функций по бесселевым функциям различных вещественных порядков.

Если $\int\limits_0^\infty J_\nu(kr)\varphi(\nu)\,d\nu = 0$, то $\varphi(\nu) \equiv 0$.

Для доказательства рассмотрим

$$R_2(r) = 2\int\limits_{\gamma_1} e^{-ikr\cos z} f_2(z)\,dz.$$

Относительно аналитической функции $f_2(z)$ (необязательно нечетной) предполагаем только, что при $\operatorname{Im} z > 0$ $f_2(z)$ регулярна и достаточно быстро обращается в нуль при $|\operatorname{Re} z| \to \infty$.

Тогда существует интеграл

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{ic-\infty}^{ic+\infty} f_2(z)\, e^{-i\nu z}\, dz = \begin{cases} F(\nu) & \nu > 0, \\ 0 & \nu < 0, \end{cases}$$

следовательно, функция $f_2(z)$ может быть представлена интегралом Фурье

$$f_2(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^\infty F(\nu)\, e^{i\nu r} d\nu.$$

Подставляя это выражение в интеграл $R_2(z)$ и меняя последовательность интегрирования, найдем

$$R_2(r) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^\infty J_\nu(kr)\, F(\nu)\, e^{-\frac{i\nu\pi}{2}}\, d\nu.$$

В силу предыдущего рассмотрения при $R_2(r) \equiv 0$ имеем $f_2(z) \equiv 0$, но тогда и $F(\nu) \equiv 0$. Отсюда следует указанная выше теорема. Ограничения, накладываемые на класс функций $\varphi(\nu) = F(\nu)\, e^{-\frac{i\nu\pi}{2}}$, следуют из ограничений, накладываемых на $f_2(z)$.

Акустический институт АН СССР
Москва

Поступила в редакцию
1 марта 1955 г.