АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том I 1955 Вып. 4

ОБ ИНТЕНСИВНОСТИ ГАРМОНИЧЕСКИХ И КОМБИНАЦИОННЫХ СОСТАВЛЯЮЩИХ ПРИ НЕЛИНЕЙНЫХ ИСКАЖЕНИЯХ КОЛЕБАНИЙ СЛОЖНОЙ ФОРМЫ

В. М. Вольф

Приведен метод вычисления интенсивности комбинационных и гармонических составляющих, образующихся при нелинейных искажениях колебаний сложной формы. Вычислена интенсивность комбинационных и гармонических составляющих в случае нелинейных искажений колебаний треугольной, пилообразной и прямоугольной формы. Получены соотношения, которые показывают, что при нелинейных искажениях колебаний сложной формы интенсивность комбинационных составляющих может значительно превышать интенсивность гармонических составляющих. Исходя из этого, дано объяснение некоторых фактов теории слуха.

Восприятие нелинейных искажений сложных созвучий связывается главным образом с появлением комбинационных тонов. Образующимся одновременно гармоникам отводится в данном вопросе второстепенная роль [1]. При рассмотрении причин этого до сих пор не принималось во внимание соотношение интенсивностей возникающих комбинационных частот и гармоник. Вместе с тем вычисления, выполненные согласно предлагаемой ниже методике, показывают, что в случае нелинейных искажений колебаний сложной формы интенсивность комбинационных тонов может настолько превышать интенсивность гармоник, что с этим фактором необходимо считаться для того, чтобы лучше уяснить некоторые опытные данные о слуховом восприятии нелинейных искажений. Показать соотношение между комбинационными и гармоническими составляющими для реального звукового материала в общем виде затруднительно, если не вовсе невозможно. Поэтому исследуем тот случай, когда на нелинейные системы вида

$$i = a_1 u(t) + a_n u^n(t) \tag{1}$$

(где $n > 1$ — целое число) воздействует периодический сигнал

$$u(t) = \sum_{k=1}^{p} C_k \sin(\omega k t + \varphi_k). \tag{2}$$

То обстоятельство, что спектры звуковых колебаний в отличие от уравнения (2) могут содержать компоненты, частоты которых находятся в негармоническом соотношении, не меняет существа дела, поскольку мы будем рассматривать соотношение комбинационных и гармонических составляющих с энергетической точки зрения.

Возведя в n-ю степень каждое из слагаемых правой части уравнения (2) и затем суммируя их, найдем продукт нелинейности гармонического происхождения:

$$i_{rn} = a_n \sum_{k=1}^{p} C_k^n \sin^n(\omega k t + \varphi_k) - \sum_{k=1}^{p} I_{k0}, \tag{3}$$

где I_{k0} — постоянная составляющая, образующаяся при возведении в n-ю степень каждого из слагаемых (2).

Тогда для продукта нелинейности комбинационного происхождения i_{cn} получим

$$i_{cn} = a_n\left[\sum_{k=1}^{p} C_k \sin(\omega kt + \varphi_k)\right]^n - a_n \sum_{k=1}^{p} C_k^n \sin^n(\omega kt + \varphi_k) - \left[I_{\Sigma 0} - \sum_{k=1}^{p} I_{k0}\right], \tag{4}$$

где $I_{\Sigma 0}$ — постоянная составляющая, получающаяся при возведении в n-ю степень всей правой части уравнения (2).

Проделав вычисления согласно уравнениям (3) и (4) и перейдя затем к интенсивности продуктов нелинейности комбинационного P_{cn} и гармонического $P_{\text{г}n}$ происхождения, мы решили бы, таким образом, поставленную задачу. Однако вычисление $\left[\sum_{k=1}^{p} C_k \sin(\omega kt + \varphi_k)\right]^n$ при большом количестве составляющих в спектре сигнала представляет весьма трудоемкую операцию, даже в случае применения специальных методов вычисления [2, 3]. Между тем эти трудности вычислительного характера можно обойти, если продукт нелинейности комбинационного происхождения определять непосредственно из левой части равенства (2), т. е. не прибегая к разложению $u(t)$ в гармонический ряд. Этот прием может быть с успехом использован в тех случаях, когда функция $u(t)$ сравнительно просто может быть выражена аналитически, удовлетворяет условиям Дирихле и интегрирование ее не представляет значительных трудностей.

В соответствии с изложенным запишем интенсивность колебаний на выходе нелинейной системы:

$$P_{\Sigma n} = \frac{1}{T} a_n^2 \int_0^T u^{2n}(t)\, dt. \tag{5}$$

Вычтя из выражения (5) интенсивность постоянной составляющей

$$P_{0n} = \left[\frac{1}{T} a_n \int_0^T u^n(t)\, dt\right]^2, \tag{6}$$

определим интенсивность переменных составляющих продукта нелинейности:

$$P_{\sim n} = P_{\Sigma n} - P_{0n}, \tag{7}$$

который представляет сумму продуктов нелинейности гармонического и комбинационного происхождения.

Согласно выражению (3) интенсивность продукта нелинейности гармонического происхождения $P_{\text{г}n}$ может быть представлена в виде

$$P_{\text{г}n} = \frac{1}{2} a_n^2\, z(n) \sum_{k=1}^{p} C_k^{2n}, \tag{8}$$

где $z(n)$ — некоторая функция характеристики нелинейной системы. В частности, при $n = 2$ $z(n) = 0{,}25$, при $n = 3$ $z(n) = 0{,}625$.

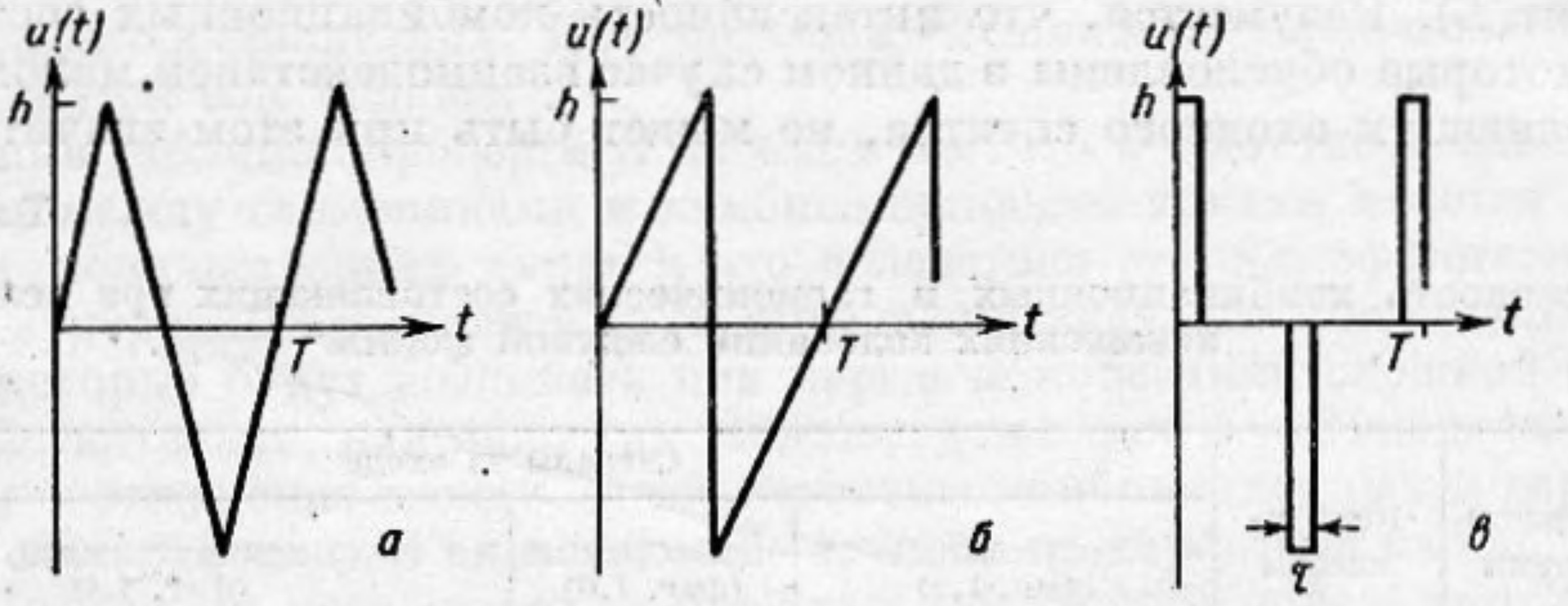
Из выражений (7) и (8) можно определить интенсивность продукта нелинейности комбинационного происхождения:

$$P_{cn} = P_{\sim n} - P_{\text{г}n}. \tag{9}$$

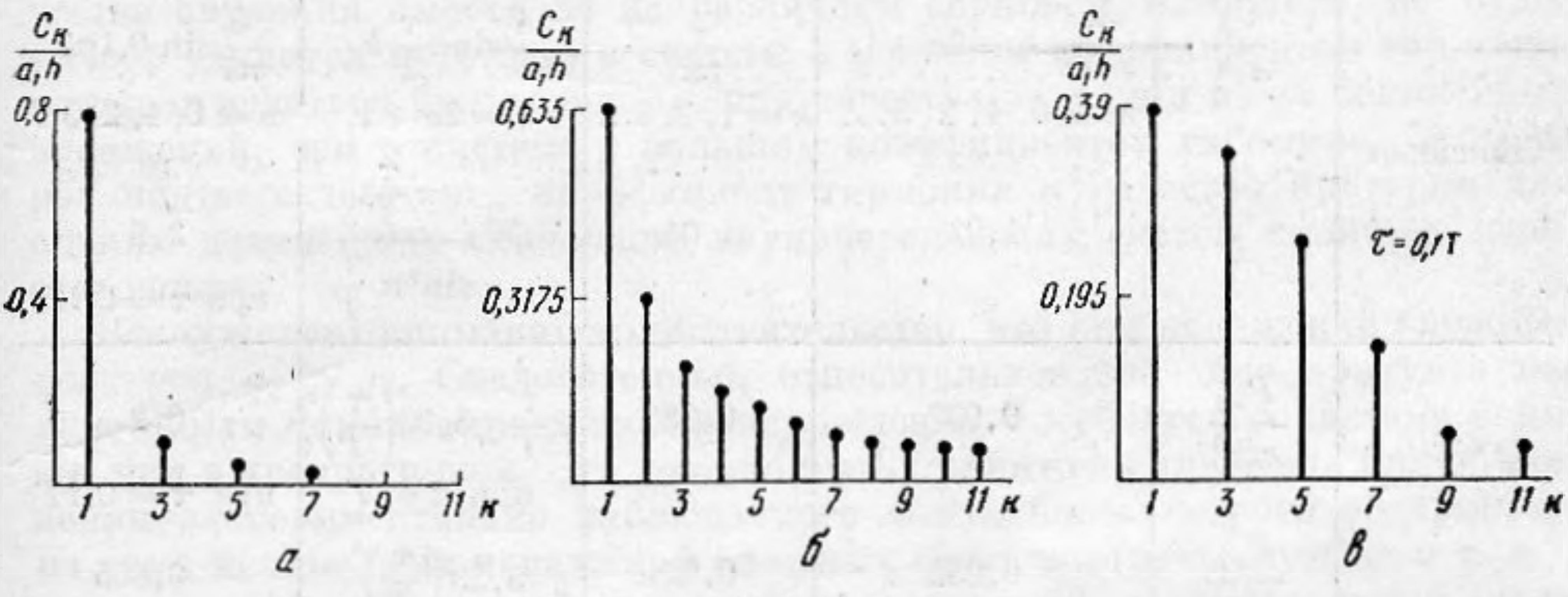
На основании выражений (5) — (9) отношение интенсивности продукта нелинейности комбинационного происхождения к интенсивности продукта нелинейности гармонического происхождения будет

$$q_n = \frac{P_{cn}}{P_{\text{г}n}} = \frac{\frac{1}{T}\int\limits_0^T u^{2n}(t)\,dt - \left[\frac{1}{T}\int\limits_0^T u^n(t)\,dt\right]^2 - \frac{1}{2}\,z(n)\sum\limits_{k=1}^{p} C_k^{2n}}{\frac{1}{2}\,z(n)\sum\limits_{k=1}^{p} C_k^{2n}}. \tag{10}$$

Очевидно, равенство (10) и решает поставленную выше задачу.



Фиг. 1



Фиг. 2

Ниже рассматриваются значения q_n для случая, когда к нелинейным системам вида

$$i = a_1 u(t) + a_2 u^2(t) \tag{11}$$

и

$$i = a_1 u(t) + a_3 u^3(t) \tag{12}$$

подведены периодические колебания треугольной, пилообразной или прямоугольной формы (фиг. 1 *а*, *б*, *в*). Как видно из фиг. 2, на которой приведены соответственно спектры этих колебаний, в треугольном колебании почти вся энергия сосредоточена на частоте первой гармоники. В пилообразном колебании энергия распределена более равномерно по спектру. И, наконец, еще равномернее по спектру энергия распределена в прямоугольном колебании с большой скважностью. Для количественной характеристики распределения энергии по спектру частот введем в рассмотрение коэффициент L, дающий представление о распределении энергии входного сигнала между первой гармоникой и всеми гармониками спектра:

$$L = \frac{\sum\limits_{k=1}^{p} C_k^2}{C_1^2}, \tag{13}$$

где C_1 — амплитуда первой гармоники.

Обращаясь к рассмотрению таблицы, в которой приведены значения q_n, вычисленные для трех рассматриваемых колебаний, отметим прежде всего, что наименьшее значение продукта нелинейности комбинационного происхождения оказалось при передаче треугольных импульсов. В этом случае интенсивность продукта нелинейности комбинационного происхождения меньше интенсивности продукта нелинейности гармонического происхождения (см. коэффициенты q_2 и q_3). Последнее вполне естественно, так как в спектре треугольных импульсов на долю гармоники основной частоты приходится около 98% всей энергии колебания (см. коэффициент L). Разумеется, что интенсивность комбинационных составляющих, которые обусловлены в данном случае взаимодействием маломощных составляющих входного спектра, не может быть при этом значительной.

Таблица

Интенсивность комбинационных и гармонических составляющих при нелинейных искажениях колебаний сложной формы*

Характеристика системы	Коэффициенты	Сигналы на входе: треугольный (фиг. 1,*а*)	пилообразный (фиг. 1,*б*)	прямоугольный (фиг. 1,*в*)	
Линейная	$\frac{C_k}{a_1h}$	$\frac{8}{\pi^2k^2}$ $k=2m+1$, $m=0, 1, 2, 3\ldots$	$\frac{2}{\pi k}$ $k=1, 2, 3\ldots$	$\frac{4}{\pi k}\sin\pi\frac{\tau}{T}k$ $k=2m+1$,	$\frac{4}{\pi k}\sin 0{,}1\pi k$ $m=0, 1, 2, 3,\ldots$
	L	1,02	1,64	$0{,}79\frac{\pi\frac{\tau}{T}}{\sin^2\pi\frac{\tau}{T}}$	2,6 при $\tau=0{,}1T$
Квадратичная	$\frac{P_{c2}}{a_2^2h^4}$	0,037	0,068	$2\frac{\tau}{T}-5{,}33\left(\frac{\tau}{T}\right)^3$ при $\tau\ll T$	0,2 при $\tau=0{,}1T$
	$\frac{P_{г2}}{a_2^2h^4}$	0,052	0,021	$5{,}33\left(\frac{\tau}{T}\right)^3$ при $\tau\ll T$	0,005 при $\tau=0{,}1T$
	q_2	0,71	3,25	$\frac{2-5{,}33\left(\frac{\tau}{T}\right)^2}{5{,}33\left(\frac{\tau}{T}\right)^2}$ при $\tau\ll T$	40 при $\tau=0{,}1T$
Кубическая	$\frac{P_{c3}}{a_3^2h^6}$	0,061	0,122	$2\frac{\tau}{T}-17\left(\frac{\tau}{T}\right)^5$ при $\tau\ll T$	0,2 при $\tau=0{,}1T$
	$\frac{P_{c3}}{a_3^2h^6}$	0,082	0,021	$17\left(\frac{\tau}{T}\right)^5$ при $\tau\ll T$	0,00017 при $\tau=0{,}1T$
	q_3	0,75	5,8	$\frac{2{,}0-17\left(\frac{\tau}{T}\right)^4}{17\left(\frac{\tau}{T}\right)^4}$ при $\tau\ll T$	1200 при $\tau=0{,}1T$

* Обозначения см. на фиг. 1.

Относительное возрастание продукта нелинейности комбинационного происхождения идет в соответствии с увеличением мощности высших гармоник спектра входного сигнала. Это хорошо видно из рассмотрения колебаний пилообразной формы и прямоугольных колебаний с большой скважностью ($\tau \ll T$). Например если $\tau = 0{,}1\ T$, то $L = 2{,}6$. При этом интенсивность продукта нелинейности комбинационного происхождения в квадратичной системе в сорок раз больше интенсивности продукта нелинейности гармонического происхождения. Соответствующее значение интенсивности продукта нелинейности комбинационного происхождения в кубической системе будет при этом в 1200 раз больше интенсивности гармонических составляющих. При большей скважности увеличится L и q_2 и q_3 окажутся еще больше.

Данные таблицы опровергают мнение о том, что в частотно независимых системах между гармониками и комбинационными тонами имеется однозначная количественная связь и что вследствие этого коэффициент гармоник, измеренный на чистом тоне, определяет значение комбинационных тонов, которые будут возникать при передаче колебаний сложной формы [4]. Действительно, как видно из таблицы, для одной и той же нелинейной системы соотношение между интенсивностью комбинационных и гармонических составляющих в сильной мере зависит от характера входного сигнала. Поскольку восприятие нелинейных искажений определяется в основном комбинационными составляющими, то в случае, если оценка качества звучания выносится на различном звуковом материале, не будет ничего удивительного, что в системе с меньшим коэффициентом гармоник может отмечаться большее снижение качества звучания из-за нелинейных искажений, чем в системе с большим коэффициентом гаромник. Это еще раз подтверждает, что коэффициент гармоник в качестве критерия для оценки нелинейных искажений звукопередающих систем является недостаточным.

Заслуживает внимания то обстоятельство, что при искажении сложных спектров $q_3 > q_2$. Следовательно, относительное значение продукта нелинейности комбинационного происхождения в кубической системе больше, чем в квадратичной. Это должно быть принято во внимание при объяснении экспериментально наблюдаемого факта более острого восприятия на слух нелинейных искажений сложных созвучий (речь, музыка и т. п.), порождаемых кубической системой по сравнению с квадратичной, если коэффициенты гармоник их равны. В продукте нелинейности кубической системы (а также систем более высокого порядка) помимо высших гармонических и комбинационных частот будут содержаться составляющие исходной частоты входного сигнала. Эти составляющие не являются продуктом нелинейности, если оценка нелинейных искажений ведется на слух (для систем с небольшой нелинейностью). Если их исключить из $P_{сп}$ и $P_{гп}$, то соотношение последних будет лучше характеризовать роль энергетического фактора в субъективной оценке нелинейных искажений колебаний сложной формы. С учетом этого относительное значение продукта нелинейности комбинационного происхождения оказывается еще больше, чем следует из таблицы.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Н. Ржевкин. Слух и речь в свете современных физических исследований, ОНТИ НКТП СССР, 1936.
2. В. А. Котельников. Научно-технический сборник Ленинградского института связи, 1936, 14.
3. И. В. Басик. Метод определ. компонент тока при воздействии на нелинейную систему синусоидальн. напряжений. Сборник научных трудов ЦНИИС, М., Связьиздат, 1948.
4. Е. Г. Момот. Испытание радиоприемников, Связьтехиздат, 1936.

Киевский ордена Ленина
политехнический институт

Поступила в редакцию
13 декабря 1954 г.