

## ОБ ИЗМЕРЕНИИ КОЭФФИЦИЕНТА КОРРЕЛЯЦИИ

С. Г. Гершман и Е. Л. Фейнберг

Разработан прибор, основанный на использовании связи между коэффициентом корреляции двух шумов и вероятностью совпадения знаков мгновенных значений этих шумов. Выходной эффект прибора является мерой этой вероятности. Электрическая схема использует преобразование входных напряжений в импульсы, электронное реле на выходе которого получаются импульсы совпадения, усреднение этих импульсов и индикатор. Разработана теория прибора. Результаты теории используются для калибровки и оценки погрешностей измерения. Показано, что прибор может быть использован не только для измерения коэффициента корреляции, но и для некоторых других целей, в том числе для различных измерений в акустическом поле. Приводятся результаты экспериментального использования прибора.

При анализе шумов и при исследовании прохождения шумов через различные преобразующие системы в последние годы все шире используются статистические методы, в частности для описания процесса используются корреляционные функции.

Можно утверждать, что при изучении многих проблем описание при помощи корреляционных функций является более адекватным задаче, чем описание, основанное на разложении в интеграл (или ряд) Фурье. Это прежде всего относится к весьма широкополосным (в спектральном смысле) процессам, особенно часто встречающимся в акустике. Так, например, в архитектурной акустике корреляционные характеристики, повидимому, существенно важны при определении акустических свойств помещения [1]. Разделение двух налагающихся процессов часто возможно именно благодаря использованию различия их корреляционных свойств; этим, в частности, объясняется столь глубокое проникновение статистических методов в теорию приема сигналов в присутствии помех [2, 3], теорию связи [4], теорию радиолокационных устройств [5]. Повидимому, очень велика роль корреляционных свойств звука и для понимания работы слухового аппарата при изучении вопросов разборчивости речи и т. д.

В течение последних десяти лет в Акустическом институте АН СССР ведутся исследования корреляционных соотношений в звуковых полях, естественно, что при этом возникла потребность в приборе, позволяющем непосредственно измерять корреляционные параметры. Настоящая статья посвящена описанию такого прибора [6] и некоторых возможных его применений.

Вопрос о том, какая именно корреляционная характеристика должна служить мерой коррелированности двух процессов, до сих пор остается непроанализированным. В теории шумов и в теории связи обычно подходящей мерой взаимосвязанности двух процессов или взаимосвязанности значений одной величины  $x$ , взятой в разные моменты времени,  $x(t)$  и  $x(t + \tau)$ , считают коэффициент корреляции  $R$ . Разумеется, коэффициент корреляции  $R$  является такой мерой в большей степени, чем функция корреляции  $\varphi = \overline{x(t)x(t + \tau)} = \overline{x^2}R$  (черта означает усреднение), поскольку функция корреляции  $\varphi$  является мерой не только степени связанности процессов, но и их интенсивности  $\overline{x^2}$ , что мешает распознаванию степени связанности. Между тем известно, что и коэффициент корреляции не

является идеальной мерой связанности, так как для некоторых процессов, например периодических, он может быть равен нулю даже при наличии однозначной связи \*. Часто лучшей мерой взаимосвязи является так называемое корреляционное отношение ([7], стр. 385). Однако для совокупностей, подчиняющихся нормальному закону распределения и обладающих нормальной корреляцией, как и во всех случаях, когда регрессия прямолинейна [7], корреляционное отношение равно коэффициенту корреляции. В частности, поэтому использование коэффициента корреляции в качестве меры взаимной зависимости можно считать оправданным и целесообразным именно для стохастических процессов с нормальным распределением мгновенных значений и с нормальной корреляцией.

Важно отметить, что акустические поля, встречающиеся в практике, чрезвычайно часто принадлежат именно к этому классу. Уже из теоремы Ляпунова видно ([7], стр. 275), что всякий процесс, слагающийся из многих независимых процессов, подчиняется нормальному закону. Это, следовательно, должно иметь место для шума дробового эффекта, для шумов, возникающих при вихревом обтекании тела в воде или воздухе, поскольку эти шумы порождаются множеством различных по форме, отдельных и независимо развивающихся завихрений, для гидроакустических шумов, возникающих в следе движущегося тела вследствие излучения звука множеством воздушных пузырьков, фазы колебаний которых взаимно независимы, для кавитационных шумов и вообще для большинства встречающихся в акустической практике достаточно широкополосных шумов.

Шумы резонансных источников могут не удовлетворять этому требованию, однако это требует пояснений. Известно [2], что стохастический процесс, спектр которого имеет постоянную, отличную от нуля интенсивность только в полосе частот от  $\omega_a = 2\pi/f_a$  до  $\omega_b = 2\pi/f_b$ , подчиняется нормальному закону распределения мгновенных значений и обладает нормальной корреляцией, т. е. для него вероятность  $P(x)$  данного значения стохастической величины  $x$  и вероятность  $P(x, y)$  сочетания двух значений  $x(t)$  и  $y = x(t + \tau)$  равны:

$$P(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi I_0}} e^{-\frac{x^2}{2I_0}}, \quad I_0 = \overline{x^2}; \quad (1)$$

$$P(x, y) = \frac{1}{4\pi I_0 \sqrt{1-R}} e^{-\frac{x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 x_2 R}{2I_0 \sqrt{1-R}}}. \quad (2)$$

Исходя при доказательстве этого утверждения из гармонического (по Фурье) разложения величины  $x$  как функции времени  $t$ , существенно используют усреднение по фазам различных гармоник, которые, таким образом, считаются взаимно независимыми. Из сказанного видно, что нормальная корреляция и нормальное распределение мгновенных значений имеют место, в частности, для всякого процесса, получаемого пропусканием стохастического процесса с нормальной корреляцией через сколь угодно узкополосный П-образный фильтр и имеющего, следовательно, временную зависимость, сколь угодно приближающуюся к синусоидальной. Утверждение, что в подобном почти синусоидальном процессе распределение мгновенных значений и корреляция являются нормальными, видимым образом противоречит действительности. Однако противоречие является только кажущимся. Дело в том, что при доказательстве накладывается еще одно важное условие. Именно, усреднение при выводе производится за бесконечно большой промежуток времени, между тем суждение о распределении значений и усреднение в реальном процессе производится за время наблюдения, т. е. за некоторое конечное время  $T$ . Другими словами, для справед-

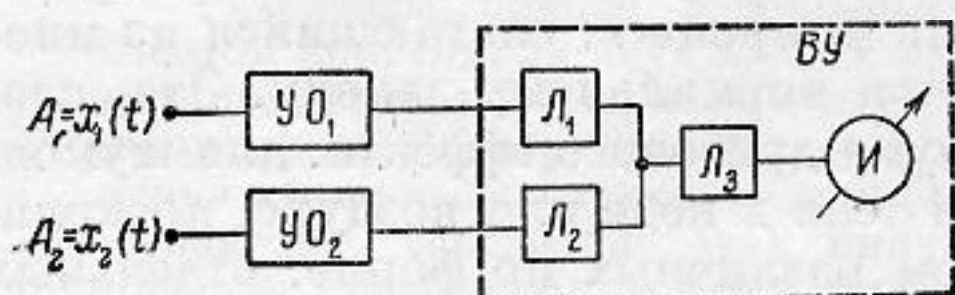
\* Так, например, для  $x = \cos \omega t$  коэффициент автокорреляции  $R = \cos \omega \tau$ , т. е. может принимать все значения и даже нулевые, хотя в действительности значения  $x$  в любые два момента времени жестко связаны между собой.

ливости формул (1) и (2) необходимо, чтобы время усреднения было много больше интервала корреляции  $\tau_0$ , т. е. времени, в течение которого утрачивается корреляция между мгновенными значениями изучаемой величины  $x(t)$ :  $\overline{x(t)x(t+\tau_0)} \ll \overline{x^2(t)}$ .

Таким образом, должно быть

$$T \gg \tau_0 \approx \frac{1}{f_b - f_a}, \quad (3)$$

где  $f_b - f_a = \Delta f$  — ширина полосы. Следовательно, и «монохроматический» сигнал, который в действительности все же всегда имеет некоторую конечную спектральную ширину, даст нормальное распределение, если



Фиг. 1

наблюдение (или реальное усреднение) продолжаться достаточно долго. Напротив, требование независимости фаз не выполняется, например, если шум состоит из последовательности импульсов строго определенной формы, в частности, если речь идет о последовательности «столообразных» импульсов одной и той же амплитуды («телеграфный сигнал»).

Следовательно, для двух стохастических последовательностей таких процессов коэффициент корреляции может не совпадать с корреляционным отношением.

Описываемые ниже метод и прибор предназначены прежде всего для измерения коэффициентов корреляции в стохастических процессах, обладающих нормальным распределением. В других случаях для калибровки прибора необходимо знание типа процесса в статистическом смысле.

Перейдем к описанию устройства прибора. Если наблюдать знаки функций  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$  (где  $x_2(t) = x_1(t + \tau)$  или же  $x_2(t) = nx_1(t + \tau) + y(t)$ , где  $n$  — постоянный коэффициент,  $y(t)$  — некоторая другая функция), то возможным является любое из четырех сочетаний:

$$++ , -- , +- , -+ .$$

Вероятность каждого из этих сочетаний, как видно будет ниже, зависит от коэффициента корреляции. Применяемый прибор основан на измерении вероятности одного (или двух) из этих сочетаний знаков.

В принципе схема прибора (фиг. 1) представляет собой двухканальный усилитель с симметричным ограничением в каждом каскаде  $УО_1$  и  $УО_2$  и с общим выходным устройством  $ВУ$ , содержащим индикатор  $И$ . На входы каналов подаются преобразованные в электрические сигналы изучаемые процессы, например  $A_1 = x_1(t)$  (фиг. 2, а) и  $A_2 = x_1(t + \tau)$  (фиг. 2, в).  $A_1$  и  $A_2$  преобразуются в последовательности столообразных импульсов высоты  $V_0$  (фиг. 2, б и 2, г) при помощи усилителей-ограничителей. Выходные импульсы  $B_1$  и  $B_2$  каждого из каналов образуются на точках перехода через нуль входных процессов  $A_1$  и  $A_2$  без смещения нулевых линий. Общее выходное устройство типа электронного реле срабатывает от сигналов, превращенных в прямоугольные импульсы, и дает на выходе также прямоугольные импульсы заданной высоты  $i_a$  (фиг. 2, д) в течение того времени, пока длится совпадение знаков в обоих каналах. Эти импульсы интегрируются и усредняются индикатором с инерционным элементом ( $И$  на фиг. 1).

Средний эффект (ток или напряжение) на выходе равен

$$i = \frac{i_a \sum_{1}^m \Delta t_m}{T}. \quad (4)$$

Так отбираются и суммируются длительности тех промежутков времени, в течение которых в обоих каналах мгновенные значения  $A_1$  и  $A_2$  одновременно имеют необходимый знак, например (для конкретности) положительный (в других вариантах — отрицательный знак, либо противоположные знаки).

Суммарная длительность промежутков совпадения, отнесенная к времени усреднения  $\frac{\Sigma \Delta t_m}{T}$ , является мерой вероятности выбранного сочетания знаков. Эта величина и измеряется непосредственно прибором.

Вместо электронного реле мы использовали также линейную схему для сложения импульсов, образуемых каналами. В зависимости от схемы перехода от преобразующих каналов на выходное устройство на общей нагрузке можно выделять совпадения (фиг. 2, ж) или несовпадения знаков (фиг. 2, е). Для интегрирования и усреднения в обоих случаях можно использовать импульсы как одной, так и обеих полярностей.

Если на вход канала подается случайное переменное напряжение без постоянной составляющей, то суммарная длительность промежутков времени, в течение которых мгновенные значения положительны, в среднем составляет половину времени наблюдения.

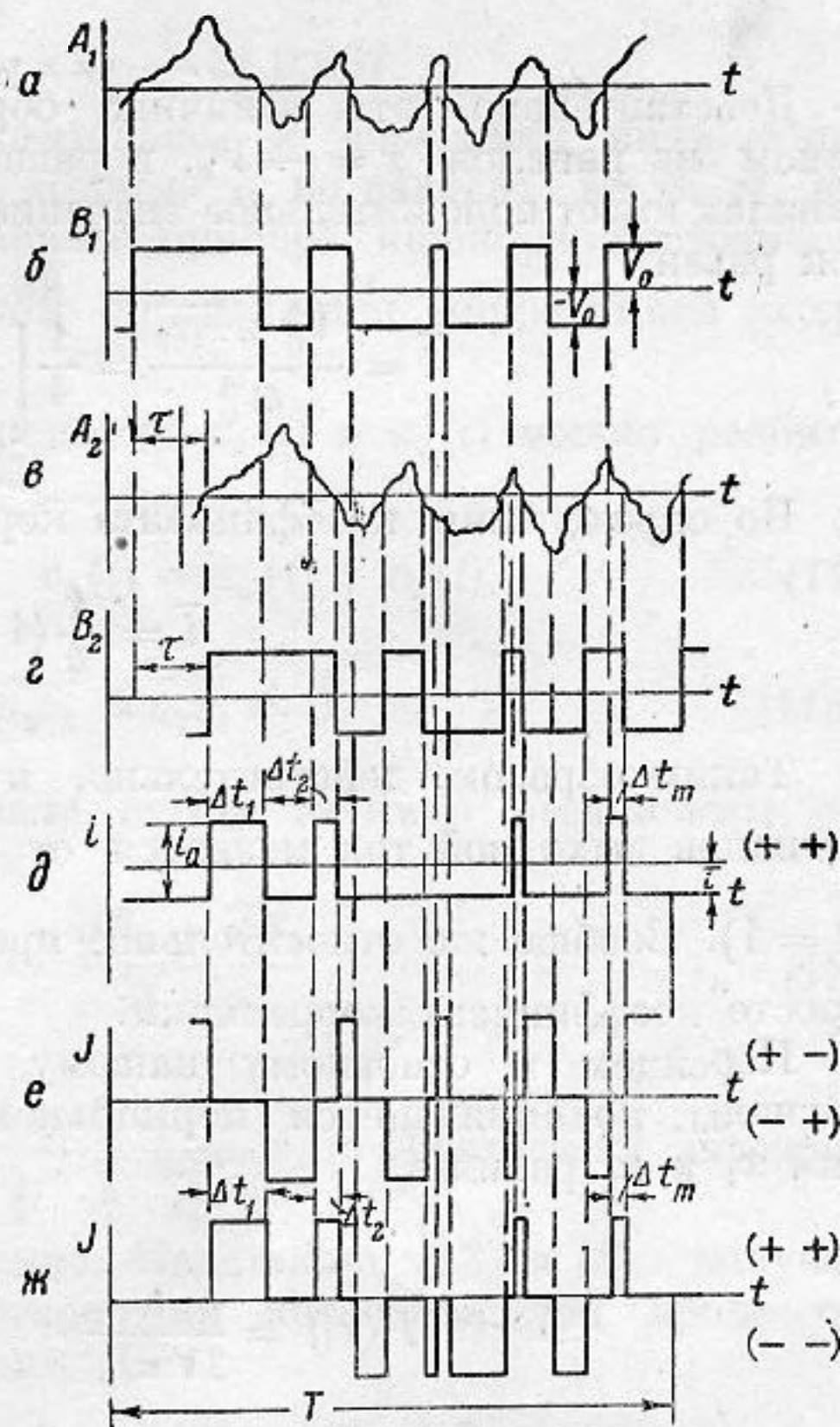
Если на оба входа подается один и тот же сигнал, то имеет место совпадение знаков в обоих каналах; импульсы в выходной части (фиг. 2, д) всегда занимают в среднем половину времени наблюдения и средний ток на выходе равен  $\frac{i_a}{2}$ , где  $i_a$  — амплитуда, задаваемая только параметрами выходного устройства, совершенно не зависящая от свойств сигнала.

Мы в дальнейшем будем полагать ее равной единице:  $i_a = 1$ .

Если же сигналы на входах обоих каналов совершенно независимы, то вероятность совпадения положительных знаков равна  $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$  и средний ток равен  $\frac{1}{4}$ .

Очевидно, что в зависимости от степени коррелированности сигналов средний выходной ток будет меняться от  $\frac{1}{4}$  до  $\frac{1}{2}$ .

Рассмотрим прежде всего, что показывает такой прибор, когда с самого начала на входы подается стохастическая последовательность двусторонних столообразных импульсов заданной высоты, т. е.  $A_1$  и  $A_2$  на входах имеют форму  $B_1$  и  $B_2$  (не меняющуюся поэтому при прохождении через усилитель и ограничитель). Таким образом, будем считать, что ток в каждом канале  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$  равен либо  $V_0$ , либо  $-V_0$ , причем суммарная длительность всех положительных импульсов равна суммарной длительности отрицательных, так что



Фиг. 2

$$\begin{aligned}\overline{x_1^2} &= \overline{x_2^2} = \overline{V_0^2}, \\ \overline{x_1(t)} &= \overline{x_2(t)} = 0.\end{aligned}$$

Ток на выходе существует только в течение тех промежутков времени, когда токи в обоих каналах  $x_1$  и  $x_2$  положительны. Мгновенное значение тока в выходной части можно поэтому записать в виде

$$i(t) = \frac{[x_1(t) + V_0][x_2(t) + V_0]}{4V_0^2}. \quad (5)$$

Действительно, эта величина обращается в нуль, когда хотя бы в одном из каналов  $x = -V_0$ , и равна единице, когда сигнал в обоих каналах имеет положительное значение. Следовательно, средний выходной ток равен

$$\bar{i} = \frac{V_0^2 + \overline{x_1 x_2}}{4V_0^2} = \frac{1}{4} \left[ 1 + \frac{\overline{x_1 x_2}}{\sqrt{\overline{x_1^2}} \sqrt{\overline{x_2^2}}} \right]. \quad (6)$$

По определению коэффициента корреляции  $R$  это есть

$$\bar{i} = \frac{1}{4} (1 + R). \quad (7)$$

Таким образом, действительно, в зависимости от коррелированности сигналов выходной ток меняется от  $i_0 = \frac{1}{4}$  (при  $R = 0$ ) до  $i = \frac{1}{2}$  (при  $R = 1$ ). Вообще же относительное превышение над «фоном»  $i_0 = \frac{1}{4}$  есть просто коэффициент корреляции.

Перейдем к основному нашему случаю. Пусть на вход поступают сигналы, подчиняющиеся нормальному закону, т. е. вероятности значений  $x_1$  и  $x_2$  равны

$$P(x_i) = \frac{1}{2V\pi I_0} e^{-\frac{x_i^2}{2I_0}}, \quad I_0 = \overline{x_i^2}. \quad (1')$$

Вероятность сочетания значений  $x_1$  и  $x_2$  дается формулой (2); для простоты мы предполагаем интенсивности  $I_0$  сигналов одинаковыми.

Отсюда, интегрируя  $P(x_1 x_2)$  по  $x_1$  и  $x_2$  в пределах от 0 до  $\infty$ , легко найти полную вероятность того, что как  $x_1$ , так и  $x_2$  положительны [7]:

$$w_{++} = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} P(x_1 x_2) dx_1 dx_2 = \frac{1}{4} \left( 1 + \frac{2}{\pi} \arcsin R \right). \quad (8)$$

Легко видеть, что вероятности различных сочетаний знаков связаны соотношениями  $w_{++} = w_{--} = \frac{1}{2} w_{++} = \frac{1}{2} w_{-+}$ . Очевидно, что при  $i_a = 1$  это и есть значение среднего тока на выходе. Таким образом, для нормально коррелированного шума также относительное превышение над постоянной (некоррелированной) слагающей  $i_0 = \frac{1}{4}$  есть прямая мера коэффициента корреляции.

Поскольку на входы реле здесь поступают прямоугольные сигналы, то можно сказать, что при нелинейном преобразовании в усилителях

с ограничением коэффициент корреляции стал равным  $R_{\text{имп}}^*$  [ср. формулы (7) и (8)]:

$$R_{\text{имп}} = \frac{2}{\pi} \arcsin R_{\text{норм}}. \quad (9)$$

При слабой корреляции  $\arcsin R_{\text{норм}} \simeq R_{\text{норм}}$  различие показаний прибора для рассмотренных двух типов сигналов состоит в том, что в формуле

$$\bar{i} = \frac{1}{4}(1 + \alpha R) \quad (10)$$

в одном случае  $\alpha = 1$ , в другом  $\alpha = \frac{2}{\pi} \simeq 0,637$ .

Итак, выходной эффект, а следовательно, и показания индикатора содержат два слагаемых, одно из которых  $i_0$  не зависит ни от  $R$ , ни от интенсивности сигналов и для данного прибора является постоянной величиной, второе  $i_k = \frac{1}{4}\alpha R$  целиком определяется корреляцией входных факторов.

Если каждый из исследуемых процессов  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$  можно разбить на сумму двух шумов:

$$x_1(t) = u_1(t) + v_1(t), \quad x_2(t) = u_2(t) + v_2(t), \quad (11)$$

и если

$$\overline{u_1 v_1} = \overline{u_1 v_2} = \overline{u_2 v_1} = \overline{u_2 v_2} = 0, \quad (11a)$$

т. е. суммирующиеся в каждом канале шумы взаимно независимы, то коэффициент корреляции равен

$$R_x = \frac{\overline{x_1 x_2}}{\sqrt{\overline{x_1^2}} \sqrt{\overline{x_2^2}}} = \frac{\overline{u^2} R_u + \overline{v^2} R_v}{\overline{u^2} + \overline{v^2}}. \quad (12)$$

Здесь  $R_u = \frac{\overline{u_1 u_2}}{\sqrt{\overline{u_1^2}} \sqrt{\overline{u_2^2}}}$  и  $R_v = \frac{\overline{v_1 v_2}}{\sqrt{\overline{v_1^2}} \sqrt{\overline{v_2^2}}}$  — коэффициенты автокорреляции процессов  $u$  и  $v$  соответственно. Подставляя (12) в (8), получаем зависимость вероятности  $w$  от отношения интенсивностей процессов  $u$  и  $v$  и их коэффициентов корреляции

$$w_{++} = \frac{1}{4} \left[ 1 + \frac{2}{\pi} \arcsin \frac{\overline{u^2} R_u + \overline{v^2} R_v}{\overline{u^2} + \overline{v^2}} \right]. \quad (13)$$

В том случае, когда  $R_u = 0$  и, значит,  $u_1$  и  $u_2$  не связаны между собой, т. е. представляют собой независимые шумы (шумы ламп прибора и т. п.), коэффициент корреляции между  $x_1$  и  $x_2$  равен

$$R_x = \frac{\overline{v^2}}{\overline{v^2} + \overline{u^2}} R_v \quad (14)$$

и относительное превышение над постоянной слагающей  $i_0$  выходного эффекта прибора будет равно

$$\frac{i_R}{i_0} = \frac{2}{\pi} \arcsin \frac{\overline{v^2}}{\overline{v^2} + \overline{u^2}} R_v. \quad (15)$$

\* Можно показать, что корреляционное отношение  $P$  после преобразования также изменяется и снова равно коэффициенту корреляции (как было для нормальной корреляции до преобразования)  $P_{\text{имп}} = R_{\text{имп}}$ . Это справедливо для любых симметрично распределенных по знаку процессов, именно, если  $w_{++} + w_{--} = w_{+-} + w_{-+} = \frac{1}{2}$ . Такой результат можно считать следствием того, что при указанных условиях после преобразования регрессия остается прямолинейной.

Если один из процессов, например  $v(t)$ , является периодической функцией времени, то  $R_v$  также является периодической функцией  $\tau$ , при этом выходной ток прибора также имеет периодическую составляющую. Этого достаточно для использования прибора в качестве детектора периодических сигналов в присутствии помех. Конечно, нельзя считать, что формула (15) справедлива, если распределение  $v(t)$  не является нормальным. Однако при  $\overline{v^2} \ll \overline{u^2}$  и если распределение  $u$  нормально, то и распределение  $x$  является достаточно близким к нормальному и мы вновь имеем [см. ниже (18)]

$$i \simeq \frac{1}{4} \left( 1 + \frac{2}{\pi} \frac{\overline{v^2}}{\overline{u^2}} R_v \right). \quad (16)$$

Максимальное относительное превышение корреляционной составляющей выходного эффекта, имеющее место при  $R_v = 1$ , равно

$$i_{R_{\max}} = \frac{2}{\pi} \frac{\overline{v^2}}{\overline{u^2}}. \quad (17)$$

Если же ни для  $v$ , ни для  $u$  распределения  $P(v)$  и  $P(u)$  не являются нормальными, но  $\overline{u^2} \gg \overline{v^2}$ , то вновь, как можно убедиться, справедлива формула \*

$$w_{++} = \frac{1}{4} (1 + \alpha R), \quad \text{где } \alpha = 4P^2(0) \overline{u^2}. \quad (18)$$

Таким образом, если  $u$  подчинено нормальному закону, то  $P(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \overline{u^2}}}$ ,  $\alpha = \frac{2}{\pi}$ , в других случаях необходима калибровка прибора.

Чувствительность прибора, т. е. возможность измерения малых изменений коэффициента корреляции, ограничена в описываемом приборе прежде всего устойчивостью среднего значения постоянной слагающей  $i_0 = \frac{1}{4}$  в формулах (7), (8), (10) или (18). Флюктуации этой величины, которая не зависит от интенсивности изучаемых шумов, в свою очередь, как будет показано, не зависят от колебаний интенсивности. Они связаны только с конечностью времени наблюдения  $T$  и определяются средней частотной характеристикой шума. Эти флюктуации могут быть грубо оценены следующим образом.

Число положительных импульсов, поступающих в единицу времени из каждого канала на оконечное реле, равно половине числа прохождений через нуль в единицу времени. Но для идеального полосового фильтра число нулей в 1 сек. равно [см. [2] формулы (3)—(12)]

$$2 \left[ \frac{1}{3} \frac{f_b^3 - f_a^3}{f_b - f_a} \right]^2, \quad (19)$$

\* Полная вероятность срабатывания при условии влияния неравенств  $u_1 > -v$  и  $u_2 > -v$  равна

$$w_{++} = \int_{-\infty}^{+\infty} P(v) dv \int_{-v}^{\infty} P(u_1) du_1 \int_{-v}^{\infty} P(u_2) du_2.$$

Так как по предположению  $\overline{u^2} \gg v^2$  и  $P$  — четная функция, то

$$\int_{-v}^{\infty} P(u_i) du_i = \int_0^{\infty} P(u_i) du_i + \int_0^v P(u_i) du_i = \frac{1}{2} + \int_0^v P(u_i) du_i \simeq \frac{1}{2} + vP(0);$$

следовательно,

$$w_{++} = \frac{1}{4} [1 + 2vP(0)]^2,$$

откуда и получаем (18).

где  $f_a, f_b$  — соответственно нижняя и верхняя границы спектра. Приближенно, с точностью до коэффициента порядка единицы, можно считать это число равным  $f_b + f_a$ . Следовательно, того же порядка будет число импульсов в единицу времени в каждом канале, а число  $\nu$  импульсов за единицу времени в оконечном устройстве больше этого числа, как можно показать, приблизительно в два раза и равно, таким образом, по порядку величины

$$\nu \simeq (f_b + f_a). \quad (20)$$

Число импульсов в оконечном устройстве за время усреднения  $T$  есть  $\nu T$ , а относительная флюктуация этого числа есть  $\frac{1}{\sqrt{\nu T}}$ . Такова же относительная флюктуация постоянной слагающей  $i_0$ . Если считать, что на индикаторе различимы такие разности  $\Delta R$  в коэффициенте корреляции  $R$ , которые дают изменение среднего тока не меньшее чем его средние квадратичные флюктуации, то согласно (8) и (20) для нормального шума должно быть

$$\Delta \frac{2}{\pi} \arcsin R = \frac{2}{\pi} \frac{1}{\sqrt{1-R^2}} \Delta R \geq \frac{1}{\sqrt{(f_a + f_b) T}}, \quad (21)$$

т. е. предельно малое еще различимое изменение равно

$$(\Delta R)_{\min} \simeq \sqrt{\frac{1-R^2}{(f_a + f_b) T}}. \quad (22)$$

Прибор, как мы видим, особенно чувствителен к появлению малого расстройств почти полной корреляции, когда  $(1-R) \ll 1$ . Вообще же в области звуковых частот, например при  $f_a + f_b \sim 3000$  при времени усреднения порядка 1 сек., коэффициент корреляции может быть измерен с точностью до нескольких процентов при условии идеальной прямоугольности преобразования входных напряжений каналами усиления с ограничением. Используя для образования импульсов совпадения обе полярности (+ + и - -), можно уменьшить относительные флюктуации на выходе прибора в  $\sqrt{2}$  раз за счет удвоения числа интегрируемых импульсов.

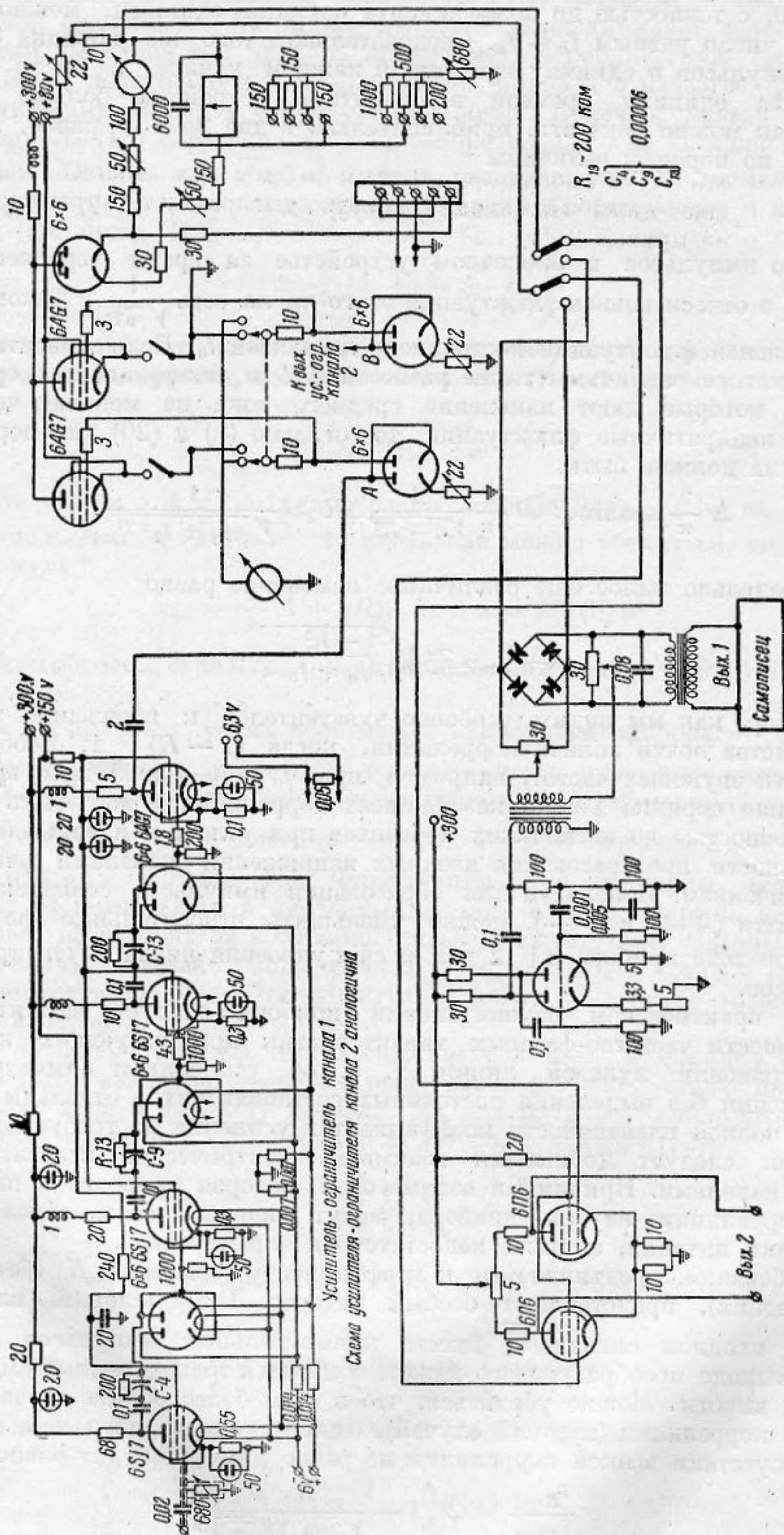
При практическом осуществлении прибора следует заботиться об идентичности частотно-фазовых характеристик преобразующих каналов и о сохранении нулевой линии, т. е. об усилении и симметричном ограничении без выделения постоянных составляющих в отдельных ступенях; полной идентичности коэффициентов усиления не требуется. Кроме того, следует добиваться взаимной электрической независимости между каналами. Причинами взаимосвязи, которая приводит к паразитной корреляции внутри прибора, могут являться связь через общие источники питания, а также недостаточная экранировка.

Требования, предъявляемые к коэффициенту усиления  $K$  (без учета ограничения), представляют особый интерес. При малом  $K$  или при слабом входном сигнале  $x_i^2$  вместо прямоугольных импульсов высоты  $V_0$  на выходе преобразующего канала получатся трапецевидные импульсы той же высоты. Можно убедиться, что в этом более общем случае, при полной корреляции (худший случай), отношение выходного тока к току при отсутствии всякой корреляции не равно двум, а будет равно

$$\frac{i_{R=1}}{i_{R=0}} = 2 \left[ 1 - \frac{V_0}{\sqrt{2\pi K} \sqrt{x_i^2}} \right]. \quad (23)$$

Задавшись требованиями к точности прибора, отсюда можно определить необходимую величину коэффициента усиления  $K$ . Так, при





Фиг. 3

$\sqrt{x^2} = 10^{-3}$  в,  $V_0 = 1$  в для получения точности в 1%  $\left(\frac{i_{R=1}}{i_{R=0}} = 2[1 - 0,01]\right)$  требуется  $K \approx 5 \cdot 10^4$ . Величина  $V_0$  выбирается с таким расчетом, чтобы выполнилось условие  $V_0 > E$ , где  $E$  — порог срабатывания выходной схемы совпадений.

На фиг. 3 дана схема одного из осуществленных нами коррелометров, основанных на указанных принципах. Типы использованных лампы указаны на фигуре. Общй коэффициент усиления каждого канала равен  $3,5 \cdot 10^6$ . Для достижения идентичности фазовых характеристик в каждом из каналов предусмотрена фазовая коррекция ( $R_{13}C_4C_9C_{13}$ ). На выходе схемы лампы, выбирающие совпадения знаков (— —), работают без отрицательного смещения. Положительные импульсы с выхода каналов на выходное устройство не попадают\*.

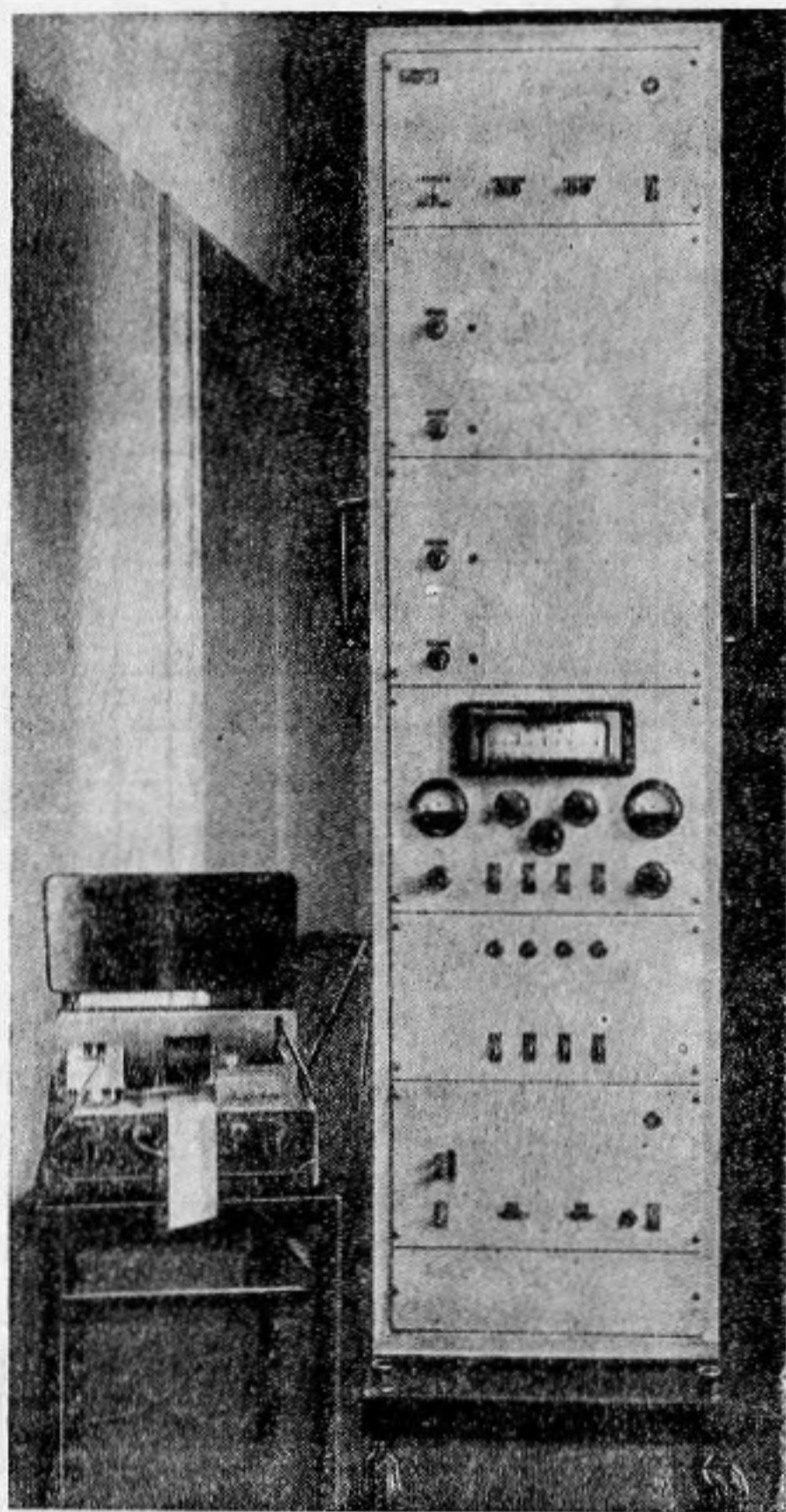
Полный выходной эффект после интегрирования при помощи вспомогательного генератора с частотой 800 гц и кольцевого модулятора записывается регистратором уровня типа Неймана с линейным потенциометром. Кроме того, выходная схема содержит стрелочные приборы с постоянной времени порядка 1 и 0,1 сек. Прибор нормально работает при входных напряжениях, лежащих в пределах 100 мкв — 300 мв ( $\sqrt{x^2(t)}_{\text{мин}} = 100 \cdot 10^{-6}$  в), в полосе частот 80 — 10 000 гц. Внешний вид прибора изображен на фиг. 4.

Описанный коррелометр применялся нами для решения разнообразных задач. а) Получение автокорреляционных зависимостей различных шумов. На входы прибора подавался изучаемый шум с относительным сдвигом во времени  $\tau$ . Сдвиг осуществлялся либо электрической линией задержки, либо разнесением входных микрофонов в звуковом поле. В качестве примера на фиг. 5 сопоставлены расчетные кривые для вероятности  $w \approx \bar{i}$  и коэффициента автокорреляции  $R$  для спектра с постоянной интенсивностью в интервале частот 400—800 гц (сплошные линии) с экспериментальными результатами для шума, вырезанного полосовым фильтром с теми же границами из теплового шума. Кривая 1 дает непосредственно измеряемую вероятность  $i = i_{aw}(\tau)$ , кривая 2 — коэффициент корреляции, определяемый согласно формуле (8) для нормальной корреляции как

$$R(\tau) = \sin \left[ \frac{\pi}{2} (4i - 1) \right]. \quad (24)$$

Полученные таким образом кривые  $R(\tau)$  уже приводились ранее в [1].

\* В другом варианте схемы применялась двухполярная выходная схема с одновременным использованием совпадений как (+ +), так и (— —).



Фиг. 4

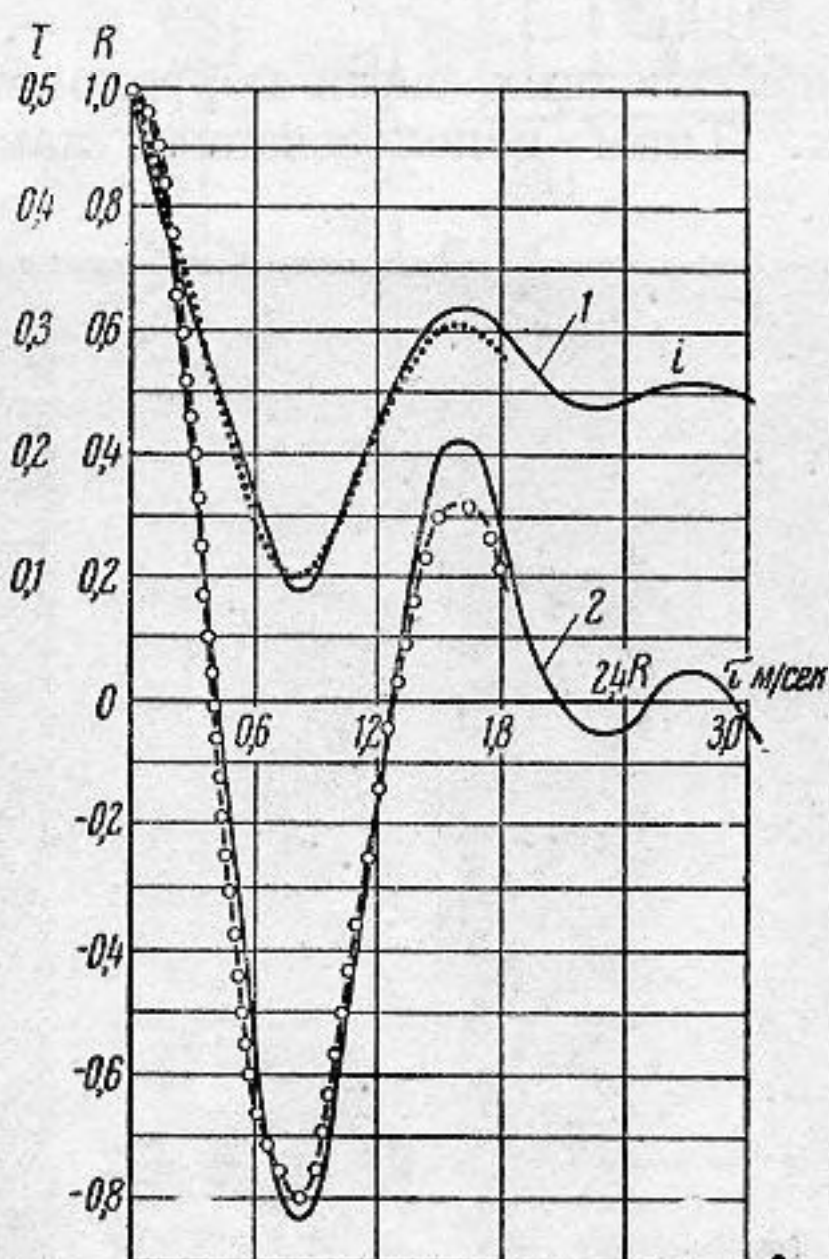
б) Измерение взаимной корреляции между двумя шумами, каждый из которых является суммой двух шумов, см. формулы (11) и (11а). Подобный случай встретился нам в архитектурной акустике, когда потребовалось измерить корреляцию между звуковыми давлениями в двух точках закрытого помещения (при наличии так называемого диффузного поля).

Пример записи, получаемой на ленте регистратора на выходе прибора, приведен на фиг. 6. Ординатами записи являются значения среднего выходного тока прибора  $\bar{i}$ , абсциссами — величины  $k\tau$ , где  $k$  — коэффициент пропорциональности,  $\tau$  — время задержки. Главный максимум на записи соответствует максимуму коэффициента корреляции прямого звука  $R_v = 1$  и  $R_x = \frac{v^2}{v^2 + u^2}$ .

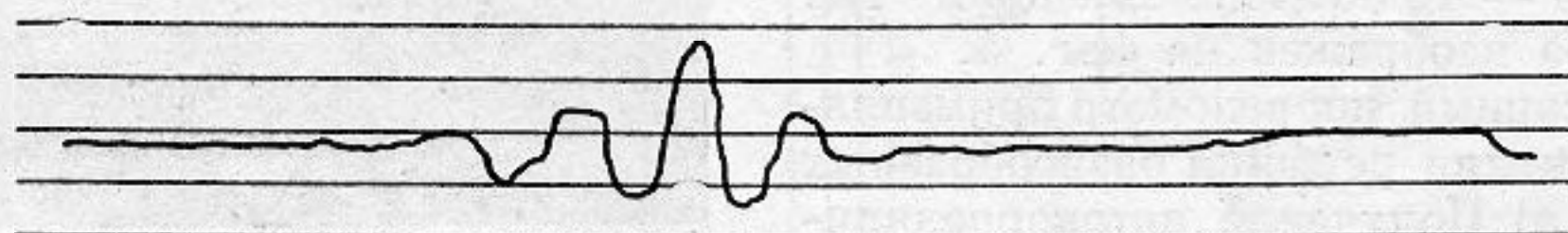
Величины побочных максимумов и их число определяются частотными свойствами шума и отношением  $\frac{v^2}{u^2}$ .

Для аналогичного случая, при  $R_v = 1$ ,  $R_u = 0$ , было произведено сравнение результатов расчета по теоретическим формулам (13)—(15) (фиг. 7, I) с показаниями прибора при изменении отношения интенсивностей двух шумов,  $\bar{i} = f\left(\frac{v^2}{u^2}\right)$ . Здесь использовались

три независимых источника шума  $u_1(t)$ ,  $u_2(t)$ ,  $v(t)$ . При этом вместо последнего из них можно было включать источник синусоидального напряжения.



Фиг. 5



Фиг. 6

в) Применение в качестве когерентного детектора. Если на входах прибора имеем

$$x_1(t) = u(t) + v(t), \quad (25)$$

$$x_2(t) = mv(t + \tau),$$

где  $m$  — постоянный коэффициент, то коэффициент взаимной корреляции равен в отличие, например, от (14)

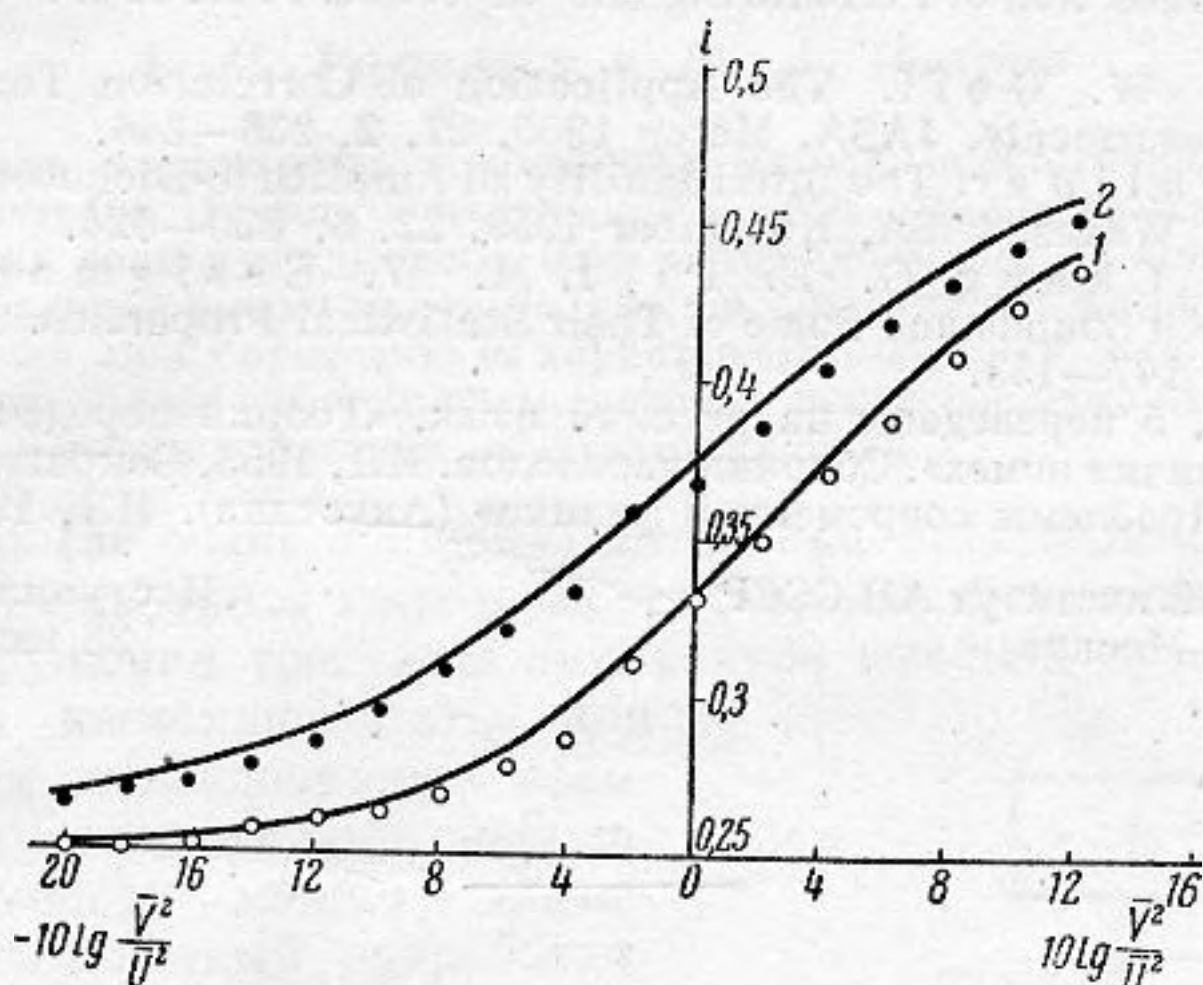
$$R_x = \sqrt{\frac{v^2}{v^2 + u^2}} R_v. \quad (26)$$

При этом выходной эффект прибора равен

$$\bar{i} = \frac{1}{4} \left( 1 + \frac{2}{\pi} \arcsin \left[ \sqrt{\frac{v^2}{v^2 + u^2}} R \right] \right) \quad (27)$$

и мы по существу используем прибор в качестве когерентного детектора.

В этом случае подведенный к одному из его входов сигнал  $v(t)$  на фоне помех  $u(t)$  обнаруживается на выходе прибора при плавном изменении  $\tau$  за счет взаимной корреляции с напряжением от местного источника  $x_2(t) = mv(t + \tau)$ , которое подводится ко второму входу. Для проверки расчетной зависимости (27)  $i = f\left(\frac{\bar{v}^2}{u^2}\right)$  (при  $R_v = 1$  — кривая 2 на фиг. 7) в лабораторных условиях мы использовали значения  $v$ , лежащие ниже «помехи»  $u$  вплоть до разности уровней 20 дБ (см. точки на кривой 2 фиг. 7).



Фиг. 7

В отдельных опытах, для которых не требовалось измерять отношение  $\frac{\bar{v}^2}{u^2}$ , удавалось обнаруживать шум  $v$ , лежащий ниже «помех» на 40—45 дБ. Подобные измерения для функции корреляции были опубликованы и другими авторами [8, 9].

Прибор использовался нами также для определения взаимной корреляции между напряжением, подводимым к репродуктору, излучающему шум, и напряжением, развиваемым микрофоном, в поле этого шума в закрытом помещении. Аналогичные результаты см. [9].

г) Оценка степени диффузности звукового поля. Такие измерения нами производились в реверберационной и заглушенной акустических камерах. В этом случае мы, так же как и в применении (б), имеем на входах прибора напряжения, пропорциональные суммарным звуковым давлениям прямого и рассеянного полей в двух точках помещения.

Особая чувствительность выходного тока к расстройке полной корреляции, выражаемая формулой (22), позволяет обнаруживать весьма слабый по энергии рассеянный звук, что особенно важно при исследовании полей в заглушенных звукомерных камерах.

Очевидно, что возможные применения прибора этим не исчерпываются.

В заключение авторы выражают благодарность академику Н. Н. Андрееву, постоянно проявлявшему интерес и внимание к данной работе, В. С. Григорьеву — за большую помощь и ряд ценных советов и Н. С. Антонову — за деятельное участие в экспериментальной работе.

## ЛИТЕРАТУРА

1. С. Г. Гершман. Коэффициент корреляции как критерий акустического качества закрытого помещения. ЖТФ, 1951, 21, 12, 1492—1496.
2. S. O. Rice. Mathematical Analysis of Random Noise, Bell. Syst. Techn. Journ. July 1944, 23, 3, 282—332. January, 1945, 24, 1, 41—156.

3. В. И. Б у н и м о в и ч. Флюктуационные процессы в радиоприемных устройствах. Советское радио, 1951.
4. C. E. S h a n n o n and W. W e a v e r. The Mathematical Theory of Communication. The University of Illinois Press, 1949, 3—89.
5. Ph. M. W o o d w a r d and I. L. D a v i s. Information Theory and Invers Probability in Telecommunication. Proc. of the IRE, March 1952, part III, 99, 58, 37—44.
6. Е. Л. Фейнберг и С. Г. Гершман. Способ непосредственного измерения коэффициента корреляции. Авторское свидетельство № 4010 от 13 сентября 1950 г.
7. С. Н. Б е р н ш т е й н. Теория вероятностей. ОГИЗ, Гостехиздат, 1946.
8. I. W. L e e, C h e a t h a m and W i e s n e r. Application of Correlation Analysis to the Detection of Periodic Signals in Noise. Proc. of the IRE, 1950, 38, 10, 1165—1171.
9. K e n n e t h W. G o f f. The Application of Correlation Techniques to Some Acoustic Measurments, JASA, March 1955, 27, 2, 236—246.
10. I. C. R. L i c k l i d e r. The Intelligibility of Amplitude-Dichotomized, Time-Quantized Speech Waves. JASA, November 1950, 22, 6, 820—824.
11. S z e - H o u C h a n g, G. E. P i h l, M. W. E s s i g m a n n. Representations of Speech Sounds and Some of Their Statistical Properties. Proc. of the IRE, 1951, 39, 2, 147—153.

Работы 2, 4, 5 переведены на русский язык, «Теория передачи электрических сигналов при наличии помех». Сборник переводов. ИЛ, 1953. Сокращенное содержание работы 11 см. «Проблемы современной физики» (Акустика). ИЛ, 1952.

Акустический институт АН СССР  
Москва

Поступила в редакцию  
28 июня 1955 г.