АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том II 1956 Вып. 2

О РАСПРОСТРАНЕНИИ ВОЛН В СРЕДЕ СО СЛУЧАЙНЫМИ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ КОЭФФИЦИЕНТА ПРЕЛОМЛЕНИЯ

(Обзор)

В. А. Красильников, А. М. Обухов

1. Обзор посвящен проблеме «волны и флюктуации», получившей в последние годы развитие в связи с рядом задач атмосферной акустики, гидроакустики, атмосферной оптики и распространения радиоволн в тропосфере. Речь идет об изучении явлений, возникающих при распространении волны в среде со слабыми случайными неоднородностями, обусловленными турбулентностью.

Так, например, при распространении звуковой волны в атмосфере под влиянием неоднородностей поля ветра и поля температуры имеют место флюктуации фазы [1, 2] и уровня сигнала [3]; подобные же явления наблюдаются при распространении звука в море [4] и распространении радиоволн в тропосфере [5].

Исследование флюктуаций характеристик волнового поля требует развития приближенных методов решения волнового уравнения для слабо неоднородных сред и привлечения статистических представлений. В этом направлении авторами был выполнен ряд работ; некоторые результаты этих работ вместе с рядом работ других авторов далее кратко излагаются.

2. С достаточной степенью точности явления распространения звуковых волн в неоднородной среде могут быть описаны волновым уравнением

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = \nabla^2\varphi, \tag{1}$$

где скорость распространения волны c зависит от координат $\mathbf{r}$ (x, y, z)*. Неоднородности коэффициента преломления предполагаются слабыми, т. е.

$$c = c_0(1+\mu); \quad \mu \ll 1. \tag{2}$$

Классическим методом решения уравнения (1) при условии (2) является метод возмущений; при этом потенциал φ разлагается в ряд по степеням малого параметра μ:

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_1 + \ldots \tag{3}$$

Этот метод широко используется в решении задач о рассеянии на малых неоднородностях, однако его применение встречает определенные трудности при расчете характеристик волн по прохождении достаточно толстого возмущенного слоя протяженностью L, состоящего из «слабых» ($\mu \ll 1$), но крупных неоднородностей, масштаб которых l значительно больше длины волны $\lambda (l \gg \lambda)$. Эти трудности связаны с эффектом «набегания возмущения фазы» до значений, сравнимых с π. В предельном случае крупных и плавных неоднородностей при $l \gg \lambda$ представляется возможным использование уравнений лучевой теории:

$$\left.\begin{aligned} (\nabla\theta)^2 &= (1+\mu)^2, \\ 2\nabla \ln A \nabla\theta + \nabla^2\theta &= 0 \end{aligned}\right\}, \tag{4}$$

* Зависимость c от времени не будем явно учитывать, считая, что во времени характеристики среды меняются медленно по сравнению с частотой колебаний.

где θ — эйконал (величина, пропорциональная фазе) и A— амплитуда. Приближенный метод решения уравнений (4), опирающийся на малость μ и соответствующую линеаризацию, был использован в работах [5, 6]. Возмущение эйконала и уровня сигнала представляются при этом выражениями

$$\theta' = \int_0^L \mu dx,$$

$$\ln \frac{A}{A_0} = -\frac{1}{2} \int_0^L \nabla^2 \theta' dx, \tag{5}$$

где A_0 — амплитуда невозмущенной волны и интеграл берется вдоль невозмущенного луча.

Этот метод позволяет учесть геометрические эффекты, пока углы отклонения луча достаточно малы; однако область применения его ограничена, поскольку он не учитывает диффракционных эффектов.

Можно рассмотреть задачу о флюктуациях фазы и уровня волнового поля на основе более общих уравнений, позволяющих приближенно учесть диффракционные эффекты [7, 8].

Введем комплексную функцию

$$\psi(\mathbf{r}) = S + i \ln \frac{A}{A_0}, \tag{6}$$

где $S(\mathbf{r})$ — фаза. Полагая

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = A_0 \exp \{i(\omega t - \psi(\mathbf{r})\} \tag{7}$$

и подставляя (7) в уравнение (1), получаем:

$$(\nabla\psi)^2 + i\nabla^2\psi = k_0^2 (1 + \mu)^2,$$

$$k_0 = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c_0}; \tag{8}$$

для невозмущенного поля соответственно $\overline{\psi} = k_0 x$. Полагая в общем случае $\overline{\psi} = \psi_0 + \psi'$ и пренебрегая далее членами, содержащими $(\nabla\psi')^2$, получаем основное уравнение теории

$$2(\nabla\psi'\nabla\psi_0) + i\nabla^2\psi' = 2\mu k_0^2, \tag{9}$$

линейное относительно возмущения «комплексной фазы» ψ'. Поскольку при выводе этого уравнения пренебрегалось $(\nabla\psi')^2$, а не величиной $(\psi')^2$, здесь не требуется малости возмущения фазы и амплитуды, а требуется, чтобы относительные изменения волнового поля на расстояниях порядка λ были малы. Из уравнения (9) при пренебрежении диффракционным членом сразу же следуют уравнения (5). Можно показать, что в области применимости классического метода возмущений решение уравнения (9) (с сохранением диффракционного члена) приводит к тем же результатам, что и метод возмущений.

При $l \gg \lambda$ область применения геометрического приближения ограничена определенным критическим расстоянием $L_{\text{кр}} = \frac{2\pi l^2}{\lambda}$, начиная с которого становятся существенными диффракционные эффекты. Для учета этих эффектов (в духе теории Френеля) оказывается возможным пользоваться упрощенным уравнением (9)

$$2k_0 \frac{\partial\psi'}{\partial x} + i\left(\frac{\partial^2\psi'}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi'}{\partial z^2}\right) = 2\mu k_0^2. \tag{10}$$

Решение этого уравнения имеет вид:

$$\psi'(x, y, z) = \frac{ik_0^2}{2\pi} \int_0^L \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp\left[-\frac{ik_0\rho^2}{2(x-\xi)}\right]}{x-\xi} \mu(\xi, \eta, \zeta)\, d\eta d\zeta d\xi, \tag{11}$$

где

$$\rho^2 = \sqrt{\eta^2 + \zeta^2}.$$

3. Поскольку в турбулентной среде $\mu(x, y, z)$ можно трактовать как случайную функцию координат, целесообразно далее перейти к статистическому рассмотрению задачи.

Основной статистической характеристикой поля пульсаций $\mu(x, y, z) = \mu(M)$ служит корреляционная функция $B(\overline{M_1, M_2}) = \overline{\mu(M_1)\mu(M_2)}$, которую для статистически изотропного поля значений μ можно считать зависящей лишь от расстояния r между точками M_1 и M_2; при этом $\overline{\mu(x, y, z)} = 0$. Корреляционные функции при больших r стремятся к нулю и, вообще говоря, должны быть определены из эксперимента. В [8] экспериментальные данные аппроксимировались функциями $B(r)$ вида

$$B(r) = \overline{\mu^2} \exp\left(-\frac{r^2}{2l^2}\right); \tag{12}$$

возможны и другие виды аппроксимации [9].

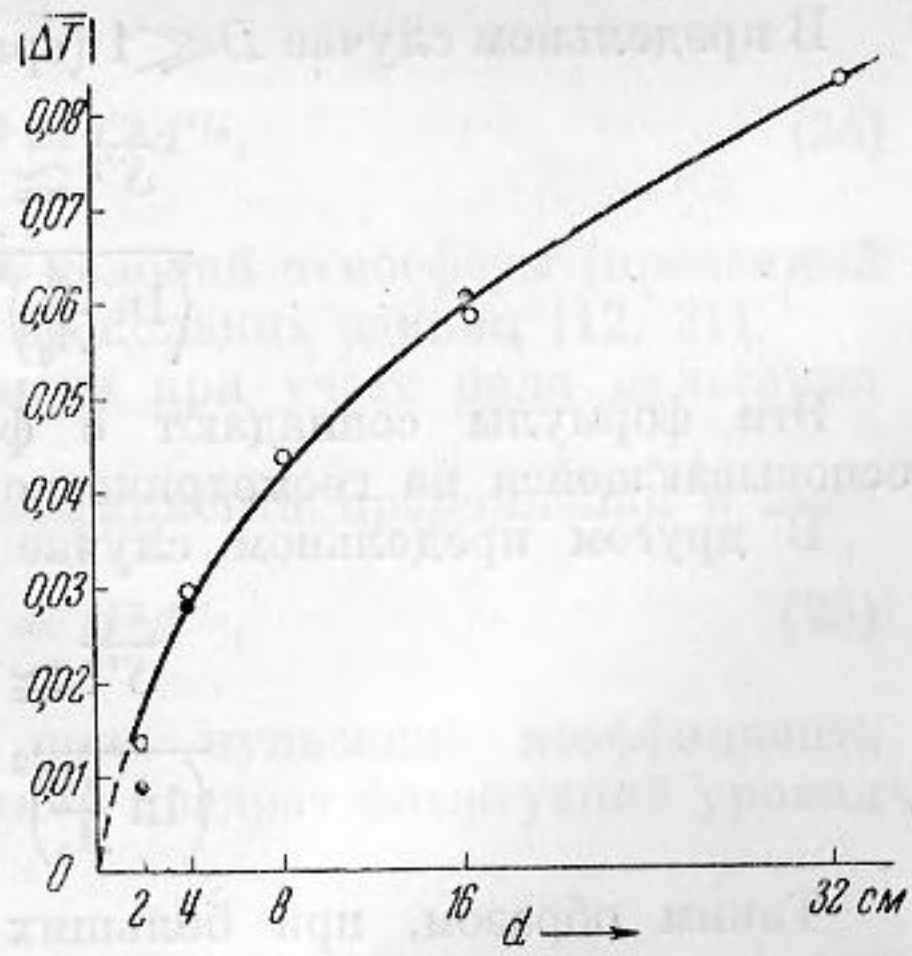
Для статистического описания поля $\mu(x, y, z)$ может быть также использована так называемая структурная функция

$$D(\mathbf{r}) = \overline{[\mu(\mathbf{r} + \vec{\rho}) - \mu(\vec{\rho})]^2}; \tag{13}$$

связь ее с функцией $B(\mathbf{r})$ такова:

$$D(\mathbf{r}) = 2B(0) - 2B(\mathbf{r}). \tag{14}$$

Использование, там где это возможно, функций $D(\vec{r})$ имеет определенные преимущества, так как при их экспериментальном определении выпадает трудность выделения среднего уровня и, кроме того, эти функции служат основными характеристиками в статистической теории локально-изотропной турбулентности [10], [11]. Экспериментальные данные, иллюстрирующие применение этой теории к микроструктуре поля ветра, содержатся в работе [12].



Фиг. 1. Структурная функция температурного поля (осень, 1949 г., 8 час. 10 мин.) $|\overline{\Delta T}| = Bd^{1/3}$; $B = 3 \cdot 10^{-2}\ ^\circ C \cdot см^{-1/3}$

На фиг. 1 представлена структурная функция поля температур, взятая из работы [13] и полученная при помощи малоинерционного термометра сопротивлений на высоте 1,5 *м* от земной поверхности и расстояний до 32 *см*. Сплошной линией показана теоретическая структурная функция поля температур (закон «2/3»), предложенная в работах [14], [15]. Структурная функция коэффициента преломления для звука отличается от структурной функции температурного поля лишь численным коэффициентом, который нетрудно подсчитать.

4. Может быть указан общий метод вычисления средних квадратичных значений флюктуаций характеристик волны (фазы, амплитуды), распространяющейся в среде со случайными неоднородностями, если из-

вестны статистические свойства (корреляционная функция) поля неоднородностей. В применении к простейшей постановке задачи (геометрическая акустика) этот метод состоит в использовании формул (5), возведения их в квадрат и последующего усреднения [5]. В результате получаем средний квадрат интересующей нас характеристики (например, фазы) в форме двойного интеграла, содержащего корреляционную функцию:

$$\overline{S'^2} = \int_0^L \int_0^L \overline{\mu(x)\,\mu(x')}\,dx\,dx', \tag{15}$$

который легко преобразуется к однократному интегралу

$$\overline{S'^2} = 2L\overline{\mu^2}\int_0^L (L-r)\,B(r)\,dr \approx 2L\,\overline{\mu^2}\int_0^\infty B(r)\,dr \tag{16}$$

(при больших значениях расстояния L).

Применение более точной теории, опирающейся на уравнение (10), позволяет линейно выразить возмущения фазы и амплитуды через флюктуации $\mu(x, y, z)$ при помощи трехкратного интеграла (11). Возведение в квадрат и последующее усреднение приводят к представлению средних квадратов соответствующих флюктуаций через шестикратные интегралы, содержащие корреляционную функцию, которые в дальнейшем могут быть упрощены.

Конкретный расчет флюктуаций фазы и амплитуды при использовании корреляционной функции гауссового типа (12) с учетом диффракционных эффектов приводит к следующим выражениям [8]:

$$\overline{S'^2} \cong (2\pi)^2\,\overline{\mu^2}\,\frac{lL}{\lambda^2}\left(1 + \frac{1}{D}\operatorname{arctg} D\right), \tag{17}$$

$$\overline{\left(\ln\frac{A}{A_0}\right)^2} \cong (2\pi)^2\overline{\mu^2}\,\frac{lL}{\lambda^2}\left(1 - \frac{1}{D}\operatorname{arctg} D\right), \tag{18}$$

где $D = \dfrac{\lambda L}{2l}$.

В предельном случае $D \ll 1$ (сравнительно малые дистанции и $L \ll L_{\text{кр}}$)

$$\overline{S'^2} \cong (2\pi)^2\,\frac{2\overline{\mu^2}Ll}{\lambda^2}, \tag{19}$$

$$\overline{\left(\ln\frac{A}{A_0}\right)^2} \cong \frac{\pi^2}{3}\,\overline{\mu^2}\,\frac{L^3}{l^3}. \tag{20}$$

Эти формулы совпадают с формулами, получающимися из теории, основывающейся на геометрическом приближении.

В другом предельном случае $D \gg 1$ (т. е. при $L \gg L_{\text{кр}}$) получаем:

$$\overline{S'^2} \cong (2\pi)^2\overline{\mu^2}\,\frac{Ll}{\lambda^2}, \tag{21}$$

$$\overline{\left(\ln\frac{A}{A_0}\right)^2} \cong (2\pi)^2\overline{\mu^2}\,\frac{Ll}{\lambda^2}. \tag{22}$$

Таким образом, при больших L выражение для флюктуаций фазы отличается от соответствующей формулы, полученной из геометрических представлений, лишь численным множителем $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ (пропорциональность L сохраняется). Вместе с тем, зависимость флюктуаций амплитуды волны от L претерпевает резкий перелом при переходе через значение $L_{\text{кр}}$, в то время как при малых значениях L величина $\overline{\left(\ln\frac{A}{A_0}\right)^2}$ растет пропорционально L^3 и не зависит от λ (в соответствии с теорией, использующей геометрическое приближение); при больших L флюктуации логарифма

амплитуды имеют тот же закон изменения, что и флюктуации фазы $\left(\ln \frac{A}{A_0}\right)^2 \sim L$, и при этом появляется зависимость от λ.

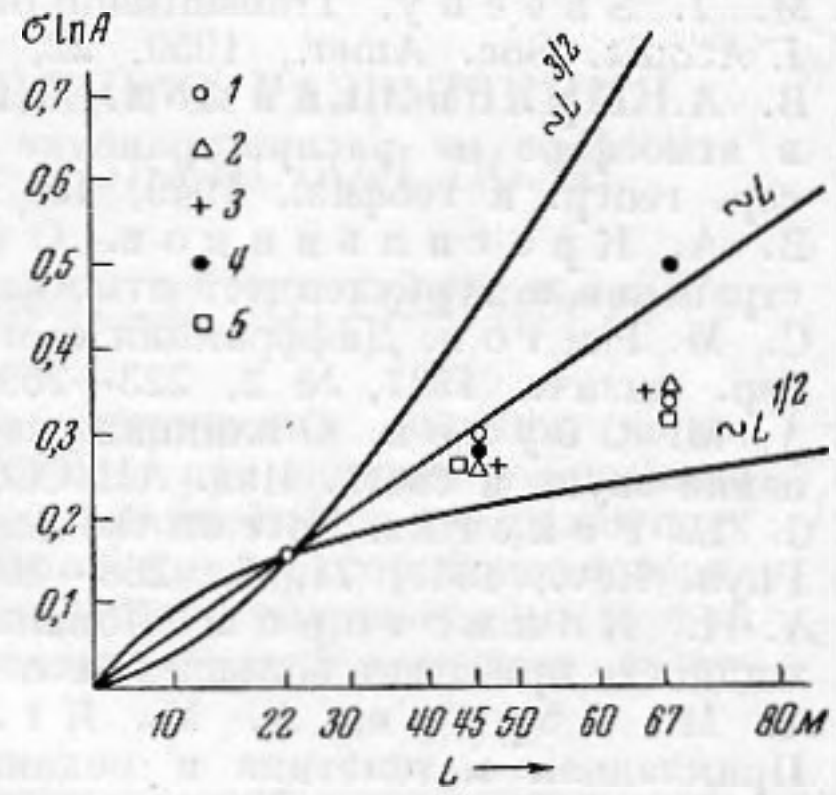
Аналогичный метод расчета может быть применен и для расчета корреляции флюктуаций характеристик волнового поля в различных точках [16]. При решении задач теории рассеяния волн на неоднородностях используется выражение для потенциала возмущенного поля. Вычисление среднего квадрата потенциала возмущенного поля указанным выше методом позволяет выразить интенсивность рассеянной волны через корреляционные функции пульсаций [17, 9, 18].

5. Приведем в заключение примеры конкретных расчетов вычисления флюктуаций фазы и амплитуды при распространении звука в турбулентной атмосфере.

Для расчета точности определения пеленга по наблюдениям в двух точках, находящихся на расстоянии d друг от друга (база), представляет интерес вычисление среднего квадрата флюктуаций разности фаз [19, 20]. Эта задача может быть решена общим методом, причем результат выражается через структурную функцию ветрового поля и решение имеет вид:

$$\overline{(S_1 - S_2)^2} \cong \text{const} \left(\frac{\omega}{c^2}\right)^2 C^2 L d^{5/3}, \quad (23)$$

где постоянная имеет значение порядка единицы, ω — круговая частота и C — так называемая характеристика турбулентности, входящая в выражение для структурной функции поля скоростей,



Фиг. 2. Зависимость $\sqrt{(\ln A/A_0)^2} = \sigma \ln A$ от L (1948 г., высота 8 *м* над земной поверхностью). Данные измерений приведены к одному масштабу; за начальные значения приняты величины $\sigma \ln A$, относящиеся к расстоянию 22 *м*. Измерения:

1—1.VIII, частота ν=5000 *гц*; *2*—31.VII, частота ν=5000 *гц*; *3*—31 VII, частота ν=3000 *гц*: *4*—9.VIII, частота ν=3000 *гц*; *5*—10.VIII, частота ν=3000 *гц*

$$\overline{[\mathrm{v}(M_1) - \mathrm{v}(M_2)]^2} = C^2 d^{2/3}, \quad (24)$$

где $\mathrm{v}(M)$ пульсация скорости ветра; для условий атмосферы (приземный слой) она имеет в системе CGS значение нескольких единиц [12, 21].

Аналогичная формула получается также при учете поля пульсации температуры.

Принимая структурную функцию коэффициента преломления в виде

$$\overline{[n(M_1) - n(M_2)]^2} = H^2 d^{2/3}, \quad (25)$$

где H — структурная характеристика поля пульсаций коэффициента преломления, можно рассчитать [22] средний квадрат флюктуаций уровня сигнала на основании уравнения (10):

$$\overline{\left(\ln \frac{A}{A_0}\right)^2} = 0{,}31 H^2 K^{7/6} L^{11/6}. \quad (26)$$

Характер зависимости флюктуаций уровня сигнала от L, а также их абсолютные значения, удовлетворительно согласуются с экспериментальными результатами, изложенными в работе [23] и представленными на фиг. 2. Изложенная теория открывает возможность решения обратной задачи — определения структурных характеристик турбулентности по результатам акустических измерений [19], [23].

ЛИТЕРАТУРА

1. В. М. Бовшеверов, В. А. Красильников. Предварительные опыты по акустическому зондированию атмосферы монохроматическим лучом. ДАН СССР, 1941, **32**, 7, 44—46.
2. В. А. Красильников. Некоторые эксперименты по распространению звука в турбулентной атмосфере. ДАН СССР, 1945, **46**, 3, 108—110.
3. В. А. Красильников, К. М. Иванов-Шиц. Некоторые новые опыты по распространению звука в атмосфере. ДАН СССР, 1949, **67**, 4, 639—642.
4. M. J. Sheehy, Transmission of 24—kc Under water Sound from a Deep Source, J. Acoust. Soc. Amer., 1950, **22**, 22—24.
5. В. А. Красильников. О влиянии пульсаций коэффициента преломления в атмосфере на распространение ультракоротких радиоволн. Изв. АН СССР, сер. геогр. и геофиз., 1949, **13**, 1, 33—57.
6. В. А. Красильников. О флуктуациях амплитуды звука при его распространении в турбулентной атмосфере. ДАН СССР, 1947, **58**, 7, 1353—1356.
7. С. М. Рытов. Диффракция света на ультразвуковых волнах. Изв. АН СССР, сер. физич., 1937, № 2, 223—259.
8. А. М. Обухов. О влиянии слабых неоднородностей атмосферы на распространение звука и света. Изв. АН СССР, сер. геофиз., 1953, 2, 155—165.
9. C. L. Pekeris. Note on the Scattering of Radiation in Inhomogeneous Medium. Phys. Rev., 1947, **71**, 4, 268—269.
10. А. Н. Колмогоров. Локальная структура турбулентности в несжимаемой жидкости при очень больших числах Рейнольдса. ДАН СССР, 1941, **30**, 4, 299—303.
11. А. М. Обухов, А. М. Яглом. Микроструктура турбулентного потока. Прикладная математика и механика, 1951, **15**, 1, 3—26.
12. А. М. Обухов. Характеристики микроструктуры ветра в приземном слое атмосферы. Изв. АН СССР, сер. геофиз., 1951, 3, 49—68.
13. С. И. Кречмер. Исследования микропульсаций температурного поля в атмосфере. ДАН СССР, 1952, **84**, 1, 55—58.
14. А. М. Обухов. Структура температурного поля в турбулентном потоке. Изв. АН СССР, сер. геогр. и геофиз., 1949, **13**, 1, 58—69.
15. А. М. Яглом. О локальной структуре поля температур в турбулентном потоке. ДАН СССР, 1949, **69**, 6, 743—746.
16. Л. А. Чернов. Корреляция флуктуаций амплитуды и фазы при распространении волн в статистически неоднородной среде. ДАН СССР, 1954, **98**, 6, 953—956.
17. А. М. Обухов. О рассеянии звука в турбулентном потоке. ДАН СССР, 1941, **30**, 7, 616—620.
18. В. А. Красильников и В. И. Татарский. Рассеяние звука в турбулентном потоке, ДАН СССР, 1953, **90**, 2, 159—162.
19. В. А. Красильников. О распространении звука в турбулентной атмосфере. ДАН СССР, 1945, **47**, 7, 486—489.
20. В. И. Татарский. О флюктуациях фазы звука в турбулентной среде. Изв. АН СССР, сер. геофиз., 1953, 3, 252—258.
21. А. М. Обухов. Локальная структура атмосферной турбулентности. ДАН СССР, 1949, **67**, 4, 643—646.
22. В. И. Татарский. О пульсациях амплитуды и фазы волны, распространяющейся в слабо неоднородной атмосфере. ДАН СССР, 1956, **107**, 2, 245—248.
23. В. А. Красильников. О флуктуациях фазы ультразвуковых волн при их распространении в приземном слое воздуха. ДАН СССР, 1953, **88**, 4, 657—660.

Московский государственный университет

Поступила в редакцию 21 февраля 1956 г.