АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том II 1956 Вып. 2

О ПЕРЕХОДЕ К ГЕОМЕТРИЧЕСКОМУ ПРИБЛИЖЕНИЮ В ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

М. Л. Левин, С. М. Рытов

Показано, что из линеаризованных уравнений теории упругости в геометрическом приближении следует, наряду с уравнением эйконала и законами сохранения потока энергии в волнах сжатия и сдвига, также закон изменения поляризации сдвиговых волн вдоль соответствующих лучей. Этот поляризационный закон оказывается таким же, как и для электромагнитных волн.

Как было показано ранее одним из авторов [1] этой статьи, переход к приближению геометрической оптики не от скалярного волнового уравнения, а от уравнений Максвелла позволяет получить дополнительный результат, касающийся изменения поляризации электромагнитного колебания вдоль луча. Применение метода Венцеля-Крамерса-Бриллюэна к векторным уравнениям приводит в нулевом приближении к уравнению эйконала, а из условий разрешимости уравнений первого приближения (условий ортогональности) вытекает не только закон сохранения светового потока, но и поляризационный закон. А именно:

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{1}{T}, \tag{1}$$

где φ — угол между электрической напряженностью и главной нормалью к лучу, ds — элемент длины луча и T — радиус кручения луча.

Аналогичный результат может быть получен и в волновой механике, если исходить не из уравнения Шрёдингера, а из уравнений Дирака. Впервые, как известно, это было сделано Паули [2], который истолковал, однако, лишь одно из условий ортогональности (сохранение заряда). Полный анализ вопроса был проведен как для электрона, так и для мезона (уравнения Прока), А. Д. Галаниным [3], показавшим, что остальные условия ортогональности дают законы вращения (и прецессии) спина при движении частицы по классической траектории.

В данной статье та же задача решается для линеаризованных уравнений теории упругости, охватывающих как волны сжатия, так и волны сдвига. Именно для последних и выясняется в приближении геометрической акустики закон изменения поляризации вдоль луча, что, насколько нам известно, ранее сделано не было.

Мы исходим из уравнений движения

$$\rho \ddot{u}_\alpha = \frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta}, \tag{2}$$

где $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ — вектор смещения, а $\sigma_{\alpha\beta}$ — тензор напряжений

$$\sigma_{\alpha\beta} = \lambda \frac{\partial u_\gamma}{\partial x_\gamma} \delta_{\alpha\beta} + \mu \left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} \right). \tag{3}$$

Плотность среды ρ и коэффициенты Ляме λ и μ — достаточно плавные функции точки.

Подставим (3) в (2) и положим:

$$u_\alpha = A_\alpha e^{i\omega(t-\Phi)}.$$

Переходя к векторной записи и обозначая для краткости

$$\mathbf{p} = \operatorname{grad} \Phi, \tag{4}$$

получаем следующий результат:

$$\omega^2 \{(\rho - \mu p^2)\,\mathbf{A} - (\lambda + \mu)\,(\mathbf{p}, \mathbf{A})\,\mathbf{p}\} -$$
$$- i\omega \{(\lambda + \mu)\,(\operatorname{grad}(\mathbf{p}, \mathbf{A}) + \mathbf{p} \operatorname{div} \mathbf{A}) + \mu\,(\mathbf{A} \operatorname{div} \mathbf{p} + 2\,(\mathbf{p}, \nabla)\cdot \mathbf{A}) +$$
$$+ (\mathbf{p}, \mathbf{A}) \operatorname{grad} \lambda + (\operatorname{grad} \mu, \mathbf{p})\,\mathbf{A} + (\operatorname{grad} \mu, \mathbf{A})\,\mathbf{p}\} + \ldots = 0. \tag{5}$$

Члены, не содержащие ω, здесь не написаны, так как в дальнейшем они не понадобятся.

Разлагая $\mathbf{A}$ по обратным степеням $i\omega$,

$$\mathbf{A} = \mathbf{U} - \frac{1}{i\omega}\,\mathbf{V} - \ldots,$$

получаем из (5) уравнения нулевого приближения:

$$(\rho - \mu p^2)\,\mathbf{U} - (\lambda + \mu)\,(\mathbf{p}, \mathbf{U})\,\mathbf{p} = 0 \tag{6}$$

и уравнения первого приближения:

$$(\rho - \mu p^2)\,\mathbf{V} - (\lambda + \mu)\,(\mathbf{p}, \mathbf{V})\,\mathbf{p} = \mathbf{X}, \tag{7}$$

где

$$\mathbf{X} = (\lambda + \mu)\,(\operatorname{grad}(\mathbf{p}, \mathbf{U}) + \mathbf{p} \operatorname{div} \mathbf{U}) + \mu\,(\mathbf{U} \operatorname{div} \mathbf{p} + 2\,(\mathbf{p}, \nabla)\cdot \mathbf{U}) +$$
$$+ (\mathbf{p}, \mathbf{U}) \operatorname{grad} \lambda + (\operatorname{grad} \mu, \mathbf{p})\,\mathbf{U} + (\operatorname{grad} \mu, \mathbf{U})\,\mathbf{p}. \tag{8}$$

Условием существования отличного от нуля решения у системы однородных уравнений (6) является равенство нулю детерминанта этой системы, что дает «уравнение эйконала», т. е. уравнение, определяющее p^2:

$$(\rho - \mu p^2)^2\,[\rho - (\lambda + 2\mu)\,p^2] = 0. \tag{9}$$

Мы имеем, таким образом, один простой корень, соответствующий волне сжатия:

$$p = \sqrt{\frac{\rho}{\lambda + 2\mu}} = \frac{1}{c_l}, \quad \mathbf{p} = \frac{\mathbf{t}_l}{c_l}, \tag{10}$$

и один двукратный корень, соответствующий волне сдвига:

$$p = \sqrt{\frac{\rho}{\mu}} = \frac{1}{c_t}, \quad \mathbf{p} = \frac{\mathbf{t}_t}{c_t}. \tag{11}$$

Через c_l и c_t обозначены скорости волн сжатия и сдвига, а через $\mathbf{t}_l$ и $\mathbf{t}_t$ — единичные векторы по касательным к соответствующим лучам. В геометрическом приближении волны сжатия и сдвига независимы друг от друга.

Условием разрешимости системы неоднородных уравнений первого приближения (7), детерминант которой равен нулю, является, как известно, ортогональность правой части $\mathbf{X}$ к каждому из линейно-независимых частных решений транспонированной однородной системы. Так как матрица однородных уравнений (6) симметрична (для простоты мы считаем среду непоглощающей, λ и μ вещественны), то решения транспонированной системы совпадают с решениями исходной.

В волне сжатия смещение подчинено только условию коллинеарности лучу, т. е. общее решение для (10) имеет вид:

$$\mathbf{U} = U\mathbf{t}_l. \tag{12}$$

Как нетрудно убедиться подстановкой (10) в (6), это единственный вид

решения системы (6) в рассматриваемом случае простого корня уравнения эйконала. Следовательно, мы имеем только одно условие ортогональности $(\mathbf{X}, \mathbf{t}_l) = 0$, или

$$(\mathbf{X}, \mathbf{U}) = 0.$$

Внося сюда выражение (8) и учитывая (10) и (12), легко привести это условие к виду

$$\operatorname{div} \{U^2 (\lambda + 2\mu) \mathbf{p}\} = \operatorname{div} \{\rho U^2 \mathbf{c}_l\} = 0, \tag{13}$$

т. е. получается закон сохранения потока энергии в волне сжатия.

В волне сдвига смещение, как это следует из (6) и (11), подчинено лишь условию поперечности:

$$(\mathbf{p}, \mathbf{U}) = 0, \tag{14}$$

т. е. двукратному корню (11) соответствуют два линейно независимых частных решения, ортогональных к $\mathbf{p}$. В качестве этих решений мы можем взять единичные векторы главной нормали ($\mathbf{n}$) и бинормали ($\mathbf{b}$) к лучу:

$$\mathbf{U}_1 = \mathbf{n}, \qquad \mathbf{U}_2 = \mathbf{b}.$$

Тогда общее решение уравнений (6) запишется в виде

$$\mathbf{U} = P\mathbf{n} + Q\mathbf{b}, \tag{15}$$

где P и Q — пока произвольные функции точки луча. Вид P и Q определяется условиями ортогональности $\mathbf{X}$ к обоим частным решениям $\mathbf{n}$ и $\mathbf{b}$:

$$(\mathbf{X}, \mathbf{n}) = 0, \qquad (\mathbf{X}, \mathbf{b}) = 0, \tag{16}$$

причем в $\mathbf{X}$ должно быть подставлено общее решение (15).

Выполнив подстановку (8) и (15) в (16), можно привести условия ортогональности к виду

$$\begin{aligned} P \operatorname{div} \mu\mathbf{p} + 2\mu p \left(\mathbf{n}, \frac{d\mathbf{U}}{ds}\right) = 0, \\ Q \operatorname{div} \mu\mathbf{p} + 2\mu p \left(\mathbf{b}, \frac{d\mathbf{U}}{ds}\right) = 0, \end{aligned} \tag{17}$$

причем здесь использовано соотношение

$$(\mathbf{p}, \nabla) = p (\mathbf{t}_l, \nabla) = p t_{l\alpha} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} = p \frac{d}{ds},$$

где ds — элемент длины луча.

Умножив первое уравнение (17) на P, второе — на Q и сложив, получаем ($P^2 + Q^2 = U^2$):

$$\operatorname{div} \{U^2 \mu\mathbf{p}\} = \operatorname{div} \{\rho U^2 \mathbf{c}_l\} = 0, \tag{18}$$

т. е. закон сохранения потока энергии в волне сдвига.

Умножив первое уравнение (17) на Q, второе на P и сложив, получаем

$$\left(Q\mathbf{n} - P\mathbf{b}, \quad \frac{d(P\mathbf{n} + Q\mathbf{b})}{ds}\right) = 0,$$

откуда

$$P \frac{dQ}{ds} - Q \frac{dP}{ds} = Q^2 \left(\mathbf{n}, \frac{d\mathbf{b}}{ds}\right) - P^2 \left(\mathbf{b}, \frac{d\mathbf{n}}{ds}\right).$$

При помощи формул Френе:

$$\frac{d\mathbf{n}}{ds} = -\frac{\mathbf{t}_l}{R} - \frac{\mathbf{b}}{T}, \quad \frac{d\mathbf{b}}{ds} = \frac{\mathbf{n}}{T} \tag{19}$$

(R — радиус кривизны луча) предыдущее равенство приводится к виду (1)

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{1}{T}, \tag{20}$$

где $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{Q}{P}$ — угол между вектором смещения **U** в волне сдвига и главной нормалью **n** к лучу.

Таким образом, закон изменения поляризации сдвиговой волны вдоль луча такой же, как и в электромагнитной волне: при наличии у луча кручения вектор смещения **U** вращается относительно естественного трехгранника по закону (20). Совпадение (1) и (20) представляется довольно естественным, если принять во внимание, что уравнения Максвелла (для волнового поля) формально эквивалентны уравнениям для упругих волн, но в особой среде, обладающей упругостью только при закручивании [4].

Пользуясь (19) и (20), можно подсчитать вращение единичного вектора, направленного по **U**:

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{n} \cos\varphi + \mathbf{b} \sin\varphi,$$

т. е. найти закон вращения **U** по отношению к некоторой независимой фиксированной системе координат:

$$\frac{d\mathbf{u}_1}{ds} = -\mathbf{t}_t \frac{\cos\varphi}{R}.$$

Отсюда следует, что вращение **U** с ростом s приостанавливается в тех точках луча, в которых смещение коллинеарно с бинормалью ($\varphi = \pm \pi/2$).

Заметим в заключение, что учет слабого поглощения, осуществляемый заменой $\lambda + \frac{2}{3}\mu$ и μ на комплексные модули, содержащие объемную и сдвиговую вязкость $\left(\lambda + \frac{2}{3}\mu + i\omega\zeta \text{ и } \mu + i\omega\eta, \text{ причем } \eta_1 = \eta\omega^2 \text{ и } \zeta_1 = \zeta\omega^2 \right.$ считаются величинами нулевого порядка$\left.\right)$, приводит к обычному видоизменению законов для интенсивностей (13) и (18), но не затрагивает (20).

ЛИТЕРАТУРА

1. С. М. Рытов. О переходе от волновой к геометрической оптике. 1938, ДАН СССР, **43**, 4—5, 263—266. Модулированные колебания и волны (докт. диссерт.). Труды ФИАН, 1940, **2**, 1, § 22 и приложения 8 и 9.
2. W. Pauli. Diracs Wellengleichung des Elektrons und geometrische Optik. Helv. Phys. Acta, 1932, **5**, 3, 179—199.
3. A. D. Galanin. Untersuchung der Eigenschaften des Elektronen-und Mesonenspins in der klassischen Nährung. Journ. of Phys. (USSR), 1942, **6**, 1—2, 35—47.
4. J. Mac Cullagh. An essay towards a dynamical theory of crystalline reflexion and refraction Trans. Roy. Irish Acad., 1848, **21**, 17—62; Coll. works (Dubl. Univ. Press, 1880), 145—193. См. также E. Whittaker. History of the theories of aether und electricity, I (1951), гл. V, 142—144.

Педагогический институт
г. Иваново
Физический институт
им. П. Н. Лебедева АН СССР
Москва

Поступила в редакцию
26 января 1956 г.