

РАСПРОСТРАНЕНИЕ УПРУГИХ ВОЛН В СРЕДЕ
С ЦИЛИНДРИЧЕСКИМИ КАНАЛАМИ*В. В. Тютюкин*

Излагается теория распространения упругих волн в среде с цилиндрическими каналами. Для частного случая резиноподобного материала получено выражение волнового числа для волн, распространяющихся по направлению осей каналов, при условии малости радиуса каналов по сравнению с длиной сдвиговой волны. На основании теоретических соотношений построена номограмма для расчета комплексного волнового числа по заданным механическим параметрам резиноподобного материала и геометрическим размерам каналов.

1. Задача создания искусственных акустических поглощающих сред интересна в принципиальном отношении и имеет большое практическое значение. В частности, представляет интерес один из возможных типов искусственных поглощающих сред — резиноподобный материал с цилиндрическими каналами *. Подобную же среду можно получить, применяя сферические полости [1]. В том и другом случае среда может быть использована в качестве поглотителя звука. Представляется возможным точно рассчитать акустические параметры этих микронеоднородных сред **. Настоящая работа посвящена теории распространения упругих волн в резиноподобном материале с цилиндрическими каналами и определению акустических параметров такой искусственной поглощающей среды.

2. Пусть имеется безграничная изотропная среда, свойства которой описываются плотностью ρ и упругими коэффициентами Лямэ λ и μ . Всю толщу среды пронизывают круглые цилиндрические каналы, оси которых параллельны друг другу. Каналы в любой плоскости, перпендикулярной их осям, расположены так, что создается «плотная упаковка» из правильных шестиугольников, центрами которых являются оси каналов (фиг. 1). Найдем свойства такой микронеоднородной среды, если на нее параллельно осям каналов падает плоская звуковая волна.

Очевидно, что всю среду мы можем рассматривать как бы состоящей из отдельных шестигранных призм, в каждой из которых имеется цилиндрический канал бесконечной длины. Поскольку, в силу симметрии, все призмы ведут себя одинаково, свойства среды можно определить, зная свойства одной призмы. При наличии волны, распространяющейся вдоль направления осей каналов, на каждой из граней призмы будут отсутствовать нормальные смещения и тангенциальные напряжения. Граничные условия, вытекающие из подобного расположения осей каналов, простейшим образом учитывают взаимодействие между соседними каналами. Если отказаться от симметричного расположения каналов, то пришлось бы рассматривать поведение одного канала в безграничной среде, а затем учитывать его взаимодействие с соседними каналами. Чтобы упростить расчет, заменим каждую из призм круглым полым цилиндром бесконеч-

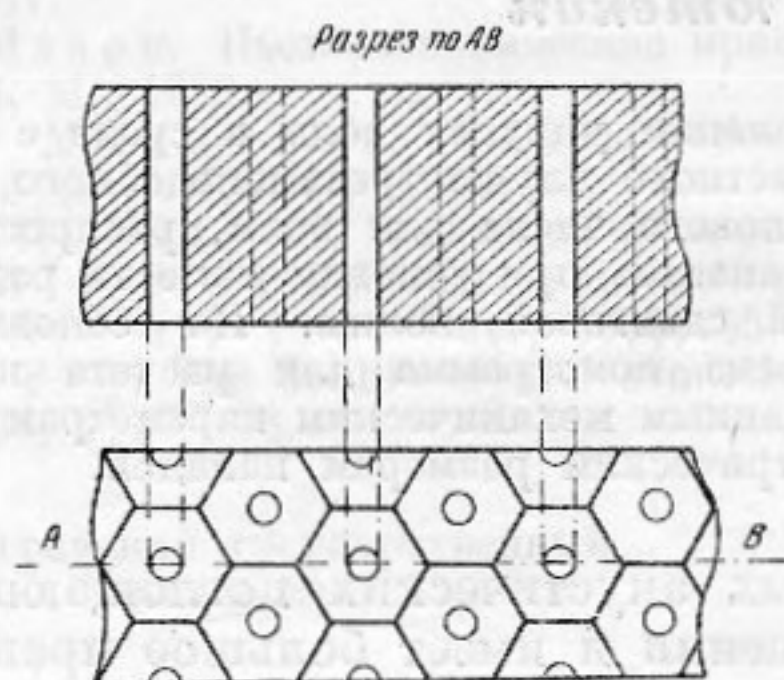
* Идея создания подобной среды и приближенный расчет ее упругих свойств принадлежат Г. Д. Малюжину.

** Среду можно рассматривать как микронеоднородную, если характерные размеры полостей малы по сравнению с длиной звуковой волны в среде.

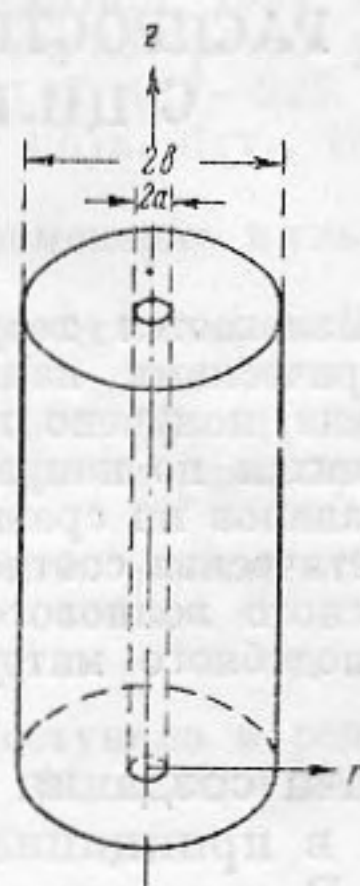
ной длины и примем на внешней поверхности цилиндра граничные условия, которые имеют место на каждой из граней призмы (фиг. 2).

Обозначим внешний радиус цилиндра через b , а внутренний радиус цилиндра (радиус канала) через a . Будем решать задачу в цилиндрической системе координат. Начало координат расположим на оси цилиндра, вдоль которой будем отсчитывать координату z , тогда координата r будет задавать расстояние точки от оси цилиндра.

В силу симметрии зависимость от угла ϑ будет отсутствовать.



Фиг. 1. Слой среды с цилиндрическими каналами



Фиг. 2. К выводу уравнений для упругой трубки

В этой системе координат уравнения движения запишутся следующим образом [2]:

$$\rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial (ru_r)}{\partial r} \right] + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_z}{\partial r \partial z} + \mu \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} \quad (1)$$

и

$$\rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + \frac{\lambda + \mu}{r} \frac{\partial^2 (ru_r)}{\partial r \partial z} + \frac{\mu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_z}{\partial r} \right). \quad (2)$$

Граничные условия примут вид:

$$\widehat{rz} = 0, \quad \widehat{rr} = 0 \quad \text{при } r = a, \quad (3a), (3b)$$

$$u_r = 0, \quad \widehat{rz} = 0 \quad \text{при } r = b. \quad (4a), (4b)$$

Здесь u_r — смещение по направлению r , u_z — смещение по направлению z , \widehat{rr} — нормальное и \widehat{rz} — тангенциальное напряжения в среде; эти напряжения выражаются через параметры среды и компоненты деформаций следующим образом [2]:

$$\widehat{rr} = \lambda \left[\frac{1}{r} \frac{\partial (ru_r)}{\partial r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right] + 2\mu \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad (5a)$$

$$\widehat{rz} = \mu \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right). \quad (5b)$$

Предположим, что процесс изменяется во времени по закону $e^{-i\omega t}$, а смещения u_r и u_z зависят от координаты z по закону e^{ikz} , где k — некоторая, пока неизвестная, константа, играющая роль волнового числа при распространении волны вдоль оси z . Заменяя производные по t и z в (1) и (2) и вводя обозначения $k_l^2 = \frac{\rho\omega^2}{\lambda + 2\mu}$ и $k_t^2 = \frac{\rho\omega^2}{\mu}$, где k_l — волновое число для продольных волн, а k_t — для поперечных волн в сплошной среде, перепишем уравнения (1) и (2):

$$\frac{1}{k_l^2} \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d(ru_r)}{dr} \right] + ik \left(\frac{1}{k_l^2} - \frac{1}{k_t^2} \right) \frac{du_z}{dr} + \left[1 - \left(\frac{k}{k_l} \right)^2 \right] u_r = 0 \quad (6)$$

$$\frac{1}{k_l^2} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{du_z}{dr} \right) + ik \left(\frac{1}{k_l^2} - \frac{1}{k_t^2} \right) \frac{A}{r} \frac{d}{dr} (ru_r) + \left[1 - \left(\frac{k}{k_l} \right)^2 \right] u_z = 0. \quad (7)$$

Для упрощения формы записи введем дифференциальный оператор второго порядка D_r от некоторой величины u :

$$D_r u = \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (ru) \right).$$

Тогда, очевидно, $D_r^2 u$ будет иметь вид:

$$D_r^2 u = \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r D_r u) \right) = \frac{d}{dr} \left\{ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[r \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (ru) \right] \right] \right\}.$$

Введя обозначения

$$\frac{du_z}{dr} = g, \quad k_1^2 = k_l^2 - k^2, \quad k_2^2 = k_t^2 - k^2 \quad (8)$$

и исключая из уравнений (6) и (7) величину u_r , получаем для величины g дифференциальное уравнение четвертого порядка:

$$D_r^2 g + (k_1^2 + k_2^2) D_r g + k_1^2 k_2^2 g = 0. \quad (9)$$

Это уравнение можно записать так:

$$(D_r + k_1^2)(D_r + k_2^2) g = 0.$$

Единственным решением, удовлетворяющим уравнению (9), является решение следующей системы уравнений:

$$\begin{aligned} D_r g + k_1^2 g &= 0, \\ D_r g + k_2^2 g &= 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Подставляя значение оператора D_r в (10), получим

$$\begin{aligned} \frac{d^2 g}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dg}{dr} + \left(k_1^2 - \frac{1}{r^2} \right) g &= 0, \\ \frac{d^2 g}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dg}{dr} + \left(k_2^2 - \frac{1}{r^2} \right) g &= 0. \end{aligned} \quad (10')$$

Решением этой системы уравнений является линейная комбинация функций Бесселя и Неймана первого порядка от аргументов $k_1 r$ и $k_2 r$. Принимая во внимание (8), получим общее решение для величины u_z в виде

$$u_z = C_1 J_0(k_1 r) + C_2 N_0(k_1 r) + C_3 J_0(k_2 r) + C_4 N_0(k_2 r), \quad (11)$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 — произвольные постоянные. Подставляя в (7) величину u_z из (11), найдем решение для u_r :

$$\begin{aligned} u_r = iC_1 \frac{k_1}{k} J_1(k_1 r) + iC_2 \frac{k_1}{k} N_1(k_1 r) - iC_3 \frac{k}{k_2} J_1(k_2 r) - \\ - iC_4 \frac{k}{k_2} N_1(k_2 r). \end{aligned} \quad (12)$$

В полученные для u_z и u_r выражения (11) и (12) входят четыре произвольные постоянные, а также неизвестная величина k , играющая роль

волнового числа для волн, распространяющихся вдоль оси z . Для определения четырех произвольных постоянных используем четыре граничных условия — (3а), (3б), (4а) и (4б). После подстановки в эти выражения значений u_z и u_r из (11) и (12), получим систему из четырех однородных уравнений относительно C_1, C_2, C_3, C_4 :

$$C_1 \frac{k_1}{k} J_1(k_1 a) + C_2 \frac{k_1}{k} N_1(k_1 a) - C_3 \frac{k}{k_2} \left(1 - \frac{k_t^2}{2k^2}\right) J_1(k_2 a) - \\ - C_4 \frac{k}{k_2} \left(1 - \frac{k_t^2}{2k^2}\right) N_1(k_2 a) = 0, \quad (3'a)$$

$$C_1 \left[\left(1 - \frac{k_t^2}{2k^2}\right) J_0(k_1 a) + \frac{k_1}{k^2 a} J_1(k_1 a) \right] +$$

$$+ C_2 \left[\left(1 - \frac{k_t^2}{2k^2}\right) N_0(k_1 a) + \frac{k_1}{k^2 a} N_1(k_1 a) \right] +$$

$$+ C_3 \left[J_0(k_2 a) - \frac{1}{k^2 a} J_1(k_2 a) \right] + C_4 \left[N_0(k_2 a) - \frac{1}{k^2 a} N_1(k_2 a) \right] = 0, \quad (3'б)$$

$$C_1 \frac{k_1}{k} J_1(k_1 b) + C_2 \frac{k_1}{k} N_1(k_1 b) - C_3 \frac{k}{k_2} J_1(k_2 b) - C_4 \frac{k}{k_2} N_1(k_2 b) = 0, \quad (4'a)$$

$$C_1 \frac{k_1}{k} J_1(k_1 b) + C_2 \frac{k_1}{k} N_1(k_1 b) + C_3 \frac{k}{k_2} \left(1 - \frac{k_t^2}{2k^2}\right) J_1(k_2 b) -$$

$$- C_4 \frac{k}{k_2} \left(1 - \frac{k_t^2}{2k^2}\right) N_1(k_2 b) = 0. \quad (4'б)$$

Условием ненулевых решений для неизвестных C_1, C_2, C_3 и C_4 является обращение в нуль детерминанта этой системы:

$$\begin{vmatrix} \frac{k_1}{k} J_1(k_1 a) & \frac{k_1}{k} N_1(k_1 a) \\ \frac{k_1}{k^2 a} J_1(k_1 a) + \left(1 - \frac{k_t^2}{2k^2}\right) J_0(k_1 a) & \frac{k_1}{k^2 a} N_1(k_1 a) + \left(1 - \frac{k_t^2}{2k^2}\right) N_0(k_1 a) \\ \frac{k_1}{k} J_1(k_1 b) & \frac{k_1}{k} N_1(k_1 b) \\ \frac{k_1}{k} J_1(k_1 b) & \frac{k_1}{k} N_1(k_1 b) \\ \frac{k}{k_2} \left(1 - \frac{k_t^2}{2k^2}\right) J_1(k_2 a) & \frac{k}{k_2} \left(1 - \frac{k_t^2}{2k^2}\right) N_1(k_2 a) \\ \frac{1}{k^2 a} J_1(k_2 a) - J_0(k_2 a) & \frac{1}{k^2 a} N_1(k_2 a) - N_0(k_2 a) \\ \frac{k}{k_2} J_1(k_2 b) & \frac{k}{k_2} N_1(k_2 b) \\ \frac{k}{k_2} \left(1 - \frac{k_t^2}{2k^2}\right) J_1(k_2 b) & \frac{k}{k_2} \left(1 - \frac{k_t^2}{2k^2}\right) N_1(k_2 b) \end{vmatrix} = 0. \quad (13)$$

Введем следующие обозначения:

$$\varepsilon = \frac{a}{b}; \quad \xi = \left(\frac{k}{k_t}\right)^2; \quad \alpha = \frac{1}{2} \frac{k_t^2}{k^2} = \frac{\lambda + 2\mu}{2\mu};$$

$$x = k_2 b = k_1 b \sqrt{2\alpha - \xi}; \quad y = k_1 b = k_1 b \sqrt{1 - \xi};$$

$$\varphi(u) = \varepsilon u \frac{J_1(u) N_0(\varepsilon u) - N_1(u) J_0(\varepsilon u)}{J_1(u) N_1(\varepsilon u) - N_1(u) J_1(\varepsilon u)},$$

где u — произвольный аргумент. В этих обозначениях уравнение (13) можно записать в виде трансцендентного уравнения относительно величины ξ :

$$(1 - \xi) [\xi \varphi(x) - \alpha] + (\alpha - \xi)^2 \varphi(y) = 0. \quad (14)$$

Это — характеристическое уравнение для определения собственных значений волнового числа k . Нужно отметить, что подобное же по форме уравнение было получено в работе [3] для случая распространения осесимметричных упругих волн в сплошном стержне со свободной поверхностью.

3. Уравнение (14) справедливо для среды с любыми значениями величин λ и μ . Однако в дальнейшем оно будет использовано нами только для резиноподобных материалов. Как известно (см., например, [4]), последние, обладая объемной упругостью, равной примерно объемной упругости воды, имеют модуль сдвига μ , меньший на два порядка; при этом коэффициент потерь для объемных деформаций близок к нулю, в то время как для сдвиговых деформаций коэффициент потерь достигает значений порядка единицы*. Такое соотношение между этими двумя модулями позволяет, путем преобразования объемных деформаций в сдвиговые, значительно уменьшить эффективный модуль сжатия, что приводит к уменьшению скорости звука в среде и увеличению эффекта потерь. Преобразование одних деформаций в другие осуществляется путем создания в сплошной резине воздушных полостей или каналов. При этом относительно малые объемные деформации, возникающие при падении на среду продольной волны, вызывают большие сдвиговые деформации, концентрирующиеся вблизи поверхности полости или канала. Изменяя размеры канала или число каналов в единице объема, можно изменять степень «размягчения» среды и величину поглощения в ней. Таким образом, можно получить пригодную для практического использования искусственную поглощающую среду.

Для упрощения дальнейшего расчета несколько преобразуем уравнение (14), воспользовавшись упомянутой специфичностью упругих свойств резины. Так как величина $\alpha = \frac{\lambda + 2\mu}{2\mu}$ составляет (по модулю) несколько сотен, а величина ξ (как это будет показано ниже) не превышает нескольких единиц, то аргумент x может быть приближенно представлен в виде

$$x \cong k_1 b \sqrt{2\alpha} = k_1 b.$$

Величина x является комплексной, так как при наличии сдвиговых потерь k_1 является комплексной величиной**:

$$\bar{k}_1 = \frac{\omega}{c_t} = \frac{\omega \sqrt{\rho}}{\sqrt{\bar{\mu}}},$$

где $\bar{\mu} = \mu_0 (1 - i\eta)$ — комплексный модуль сдвига.

* Величина коэффициента потерь η входит в выражение для комплексного модуля сдвига $\bar{\mu} = \mu_0 (1 - i\eta)$, где μ_0 — модуль сдвига без учета потерь; величину объемного модуля можно считать чисто действительной.

** Здесь, как и в дальнейшем, черта означает комплексность.

Расчет функции $\varphi(x)$ при $\eta = 1$, произведенный при помощи таблиц [5] и [6], показал, что для всех практически важных значений аргумента при значениях ε от 0 до 0,5* величины действительной и мнимой частей функции $\varphi(\bar{x})$ не превышают единицы. Поскольку величина $\bar{\xi}$ по модулю также мало отличается от единицы, членами $\bar{\xi}\varphi(\bar{x})$ и $\bar{\xi}$ по сравнению с $\bar{\alpha}$ в уравнении (14) можно пренебречь и, введя новую функцию

$$\psi(\bar{y}) = \frac{J_1(\bar{y})N_1(\varepsilon\bar{y}) - J_1(\varepsilon\bar{y})N_1(\bar{y})}{J_1(\bar{y})N_0(\varepsilon\bar{y}) - J_0(\varepsilon\bar{y})N_1(\bar{y})}, \quad (14)$$

записать уравнение (14) в виде

$$\bar{y}\psi(\bar{y}) = \bar{\alpha}(k_l b)^2 \varepsilon. \quad (15)$$

Уравнению (15) для значений волнового числа соответствует следующая физическая модель: продольная волна распространяется внутри цилиндрической трубы радиуса b с бесконечно жесткими стенками, вдоль оси которой проходит упругая трубка радиуса a с бесконечно тонкими стенками; пространство между стенками трубы и трубкой заполнено идеальной жидкостью с объемным модулем сжатия λ и коэффициентом упругости стенки трубки $\bar{\gamma} = \frac{2\bar{\mu}}{a}$, где $\bar{\gamma} = -\frac{p}{u_r}\Big|_{r=a}$, а p — давление в жидкости. Можно показать, что уравнение (15) является характеристическим уравнением для определения волнового числа волн, распространяющихся в жидкости по направлению оси трубы.

4. Несмотря на некоторое упрощение, уравнение (15) является все же весьма сложным трансцендентным уравнением; в него, наряду с неизвестной величиной $\bar{\xi}$, входит также большое число параметров $(\bar{\alpha}, \varepsilon, k_l b)$. Поэтому в дальнейшем будут рассмотрены только некоторые частные решения этого уравнения. Рассмотрим случай малых значений аргумента \bar{y} . Разложим функцию $\psi(\bar{y})$ в ряд и ограничимся первым членом разложения; после преобразования эта функция будет иметь вид:

$$\psi(\bar{y}) = -\frac{\bar{y}(1-\varepsilon^2)}{2\varepsilon}. \quad (16)$$

Подставляя ее значение в (15), получим решение для $\bar{\xi}^{**}$:

$$\bar{\xi}_0 = \left(\frac{k}{k_l}\right)^2 = 1 + \frac{\lambda}{\bar{\mu}} \frac{\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2}. \quad (17)$$

Отсюда следует, что при $\varepsilon = 0$ (сплошной цилиндр) решением уравнения (15) является $\bar{\xi} = 1$, т. е. $k = k_l$. Таким образом, в сплошном стержне с радиально закрепленной внешней поверхностью (эта характеристика закрепления соответствует условиям (4а) и (4б)) распространяется обыкновенная плоская звуковая волна. При создании в таком стержне очень малой полости (ε — мало) значение $\bar{\xi}_0$ будет мало отличаться от единицы. Это отличие будет тем больше, чем меньше модуль сдвига резины $\bar{\mu}$ по сравнению с объемным модулем упругости резины λ и чем

* Расчет для $\varepsilon > 0,5$ не производился.

** В формуле (17), как и всюду в дальнейшем, мы пренебрегаем величиной 2μ по сравнению с λ .

больше величина ε . Соответственно скорость распространения звука в среде уменьшается и появляется поглощение.

Если теперь при расчете взять не один, а два члена разложения функции $\psi(\bar{y})$ в ряд, то мы получим величину $\bar{\xi}$ во втором приближении. При учете двух членов разложения функция $\psi(\bar{y})$ принимает значение

$$\psi(\bar{y}) = -\frac{\bar{y}}{2} \frac{1 - \varepsilon^2}{\varepsilon(1 + \bar{y}^2 \ln V \varepsilon)}. \quad (16')$$

Подставляя это значение $\psi(\bar{y})$ в характеристическое уравнение (15), получим для $\bar{\xi}$ выражение:

$$\begin{aligned} \bar{\xi}_1 &= \left(\frac{k}{k_l}\right)^2 = 1 + \frac{\lambda \varepsilon^2}{1 - \varepsilon^2} \cdot \frac{1}{\bar{\mu} + \lambda \varepsilon^2 \ln V \varepsilon (k_l b)^2} = \\ &= 1 + \frac{\lambda \varepsilon^2}{1 - \varepsilon^2} \cdot \frac{1}{\bar{\mu} [1 + (k_l a)^2 \ln V \varepsilon]}. \end{aligned} \quad (18)$$

Подставляя, далее, $\bar{\mu} = \mu_0(1 - i\eta)$ и вводя обозначения

$$\mu' = \mu_0 [1 + (k_{t0} a)^2 \ln V \varepsilon] \text{ и } \eta' = \eta \frac{\mu_0}{\mu'} = \frac{\eta}{1 + (k_{t0} a)^2 \ln V \varepsilon}, \quad (19)$$

где $k_{t0} = \omega \sqrt{\frac{\rho}{\mu_0}}$, можно записать выражение (18) для $\bar{\xi}_1$ в виде

$$\bar{\xi}_1 = 1 + \frac{\lambda}{\mu'} \frac{\varepsilon^2}{1 - \varepsilon^2}, \quad (20)$$

где

$$\mu' = \mu' (1 - i\eta').$$

Из сопоставления формул (20) и (17) видно, что выражение для величины $\bar{\xi}_1$ аналогично выражению для величины $\bar{\xi}_0$, только вместо истинного значения модуля сдвига $\bar{\mu}$ в выражение для $\bar{\xi}_1$ входит некоторое эффективное его значение $\bar{\mu}'$. При этом, так как $\ln V \varepsilon$ имеет отрицательное значение ($\varepsilon < 1$), эффективное значение μ' с повышением частоты уменьшается, а эффективное значение η' возрастает.

Найдем теперь границы применимости решения (17). Это решение было получено в предположении малости второго члена разложения функции $\psi(\bar{y})$ в ряд по сравнению с первым членом. Из сравнения (16) с (16') следует, что это условие выполняется при $|\bar{y}^2 \ln V \varepsilon| \ll 1$, т. е. при $|\bar{k}_l a| \ll \chi$; величина χ , определяемая выражением $\chi = \frac{1}{\sqrt{\ln V \varepsilon}}$, представлена в зависимости от ε на фиг. 3. Из фигуры видно, что для весьма широкого диапазона значений ε величина χ получается порядка единицы. Поэтому за критерий применимости формулы (17) для волнового числа можно принять соотношение

$$|\bar{k}_l a| \ll 1, \quad (21)$$

т. е. условие малости радиуса канала по сравнению с длиной сдвиговой волны в резине. Таким образом, полученное решение можно считать статическим приближением.

Пользуясь выражением (17) и критерием его применимости (21), из

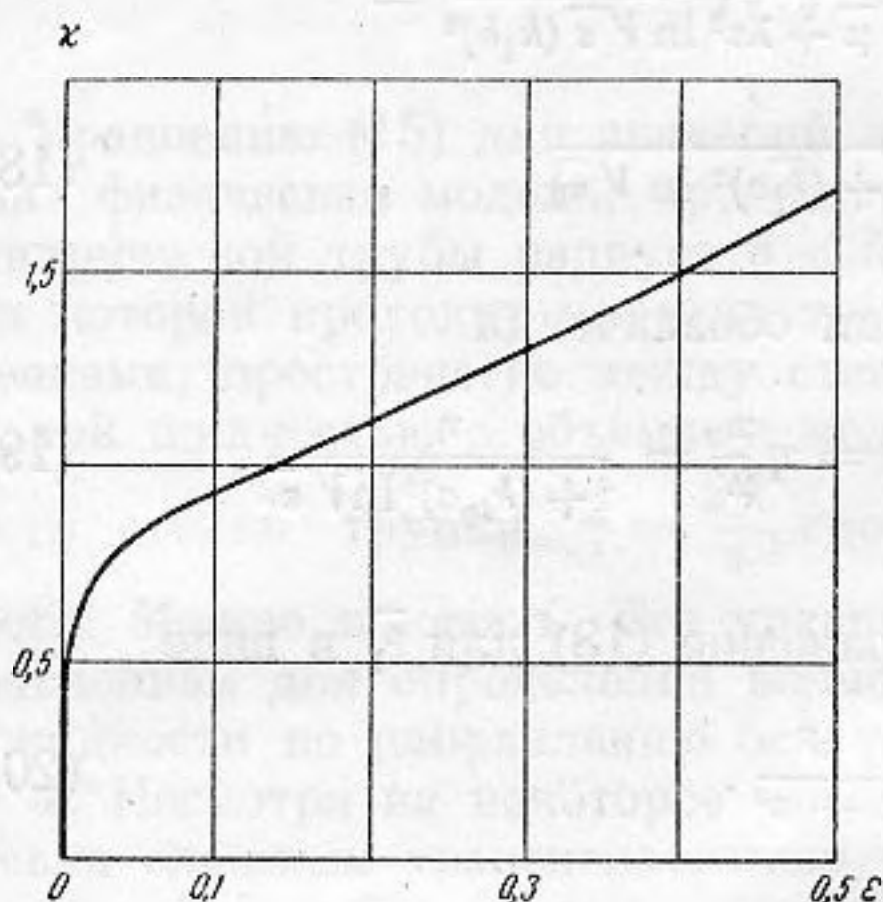
системы уравнений (3'а), (3'б), (4'а), (4'б) можно определить значения произвольных постоянных C_1, C_2, C_3, C_4 (вернее, отношения трех из них к четвертой) и, подставив их в (11) и (12), найти решения для компонент смещений \bar{u}_z и \bar{u}_r . После преобразований, введя новую произвольную постоянную C , получим

$$\bar{u}_z = C e^{-i(\omega t - k_l \sqrt{\bar{\xi}_0} z)} \quad (22)$$

и

$$\bar{u}_r = iC \frac{\bar{\alpha}\varepsilon}{\sqrt{\bar{\xi}_0}} (k_l a) \left(\frac{b}{r} - \frac{r}{b} \right) e^{-i(\omega t - k_l \sqrt{\bar{\xi}_0} z)}.$$

Таким образом, смещение \bar{u}_z не зависит от r и представляет собой смещение в плоской звуковой волне, распространяющейся по оси z с волно-



Фиг. 3. График функции $\chi(\varepsilon)$

вым числом $\bar{k} = k_l \sqrt{\bar{\xi}_0}$. Смещение \bar{u}_r максимально на поверхности канала и монотонно убывает, обращаясь в нуль при $r = b$. Из (22) легко видеть, что в общем случае траектория движения любой точки среды является эллипсом, наклон осей которого к оси канала определяется величиной сдвиговых потерь в резине.

5. Можно провести некоторую аналогию между случаем распространения упругих волн в круглом цилиндрическом стержне и случаем распространения упругих волн в круглой трубке с радиально закрепленной внешней поверхностью. Как известно, для относительно низких частот (т. е. для длин волн, много больших диаметра стержня) волновое число имеет зна-

чение $k = k_{Ю} = \sqrt{\frac{\rho}{E}} \omega$, где E — модуль Юнга для материала стержня.

В случае трубки, для малых по сравнению с единицей значений $|\bar{k}_l a|$ (статический случай), значение \bar{k} , как легко видеть из (17), имеет

вид $\bar{k} = \sqrt{\frac{\rho}{E^*}} \omega$, где эффективный модуль трубки E^* определяется соотношением

$$\frac{1}{E^*} = \frac{1}{\lambda} + \frac{\varepsilon^2}{\mu(1-\varepsilon^2)}. \quad (23)$$

Легко видеть также, что в этом случае как для стержня, так и для трубки скорость распространения волн не зависит от частоты (при условии, что параметры материала не зависят от частоты).

В другом случае, когда по диаметру стержня укладывается некоторая конечная доля «юнговской» волны, в выражение для k входит так называемая поправка Рэлея [7], и оно приобретает вид: $k = \sqrt{\frac{\rho}{E'}} \omega$, где E' — эффективный модуль Юнга, равный в данном случае

$$E' = E \left[1 - \frac{1}{2} \sigma^2 (k_{Ю} a)^2 \right]. \quad (24)$$

Здесь σ — коэффициент Пуассона, a — радиус стержня. Из сравнения (24)

с (19) видно, что поправка Рэлея для модуля Юнга стержня и та же поправка для модуля Юнга трубки с радиально закрепленной внешней поверхностью имеет одну и ту же зависимость от частоты. Обе они являются «динамическими» поправками к статическим значениям волновых чисел. В дальнейшем поправку для модуля Юнга трубки мы также будем называть поправкой Рэлея.

6. При определении комплексного волнового числа для микронеоднородной среды или ее элемента (трубки) рассматривалось суммарное действие сплошной резины и канала. Действие канала сводится, как уже указывалось, к преобразованию объемных деформаций в сплошной резине в сдвиговые деформации, концентрирующиеся, в основном, у поверхности канала. Можно, однако, разделить эти два механизма, если ввести в рассмотрение отдельно сжимаемость резины и сжимаемость канала. Выражение для скорости продольных волн в сплошной резине можно записать следующим образом:

$$c_l = \sqrt{\frac{1}{\rho S_0}},$$

где $S_0 = \frac{1}{\lambda}$ — сжимаемость резины. Будем считать, что для микронеоднородной среды, состоящей из сплошной резины с каналами, справедливо выражение для \bar{c} аналогичного вида:

$$\bar{c} = \sqrt{\frac{1}{\rho \bar{S}}},$$

где $\bar{S} = \frac{1}{E}$ — общая сжимаемость резины и канала. Предположим, далее, что общая сжимаемость \bar{S} представляет простую сумму сжимаемостей резины S_0 и сжимаемости канала \bar{S}_1 , т. е. $\bar{S} = S_0 + \bar{S}_1$, причем сжимаемость канала является комплексной величиной. Из формулы (23) легко заметить, что в статическом приближении

$$\bar{S}_1 = \frac{1}{\mu} \frac{\epsilon^2}{1 - \epsilon^2}. \quad (25)$$

Представим \bar{S}_1 в виде $\bar{S}_1 = S_1' + iS_1''$, где, согласно выражению (25), S_1' и S_1'' имеют следующие значения:

$$S_1' = \frac{\epsilon^2}{(1 - \epsilon^2)(1 + \eta^2)\mu_0} = S_0 \frac{q}{1 + \eta^2}$$

и

$$S_1'' = \frac{\epsilon^2 \eta}{(1 - \epsilon^2)(1 + \eta^2)\mu_0} = S_0 \frac{q\eta}{1 + \eta^2}, \quad (26)$$

а параметр $q = \frac{\lambda}{\mu_0} \frac{\epsilon^2}{1 - \epsilon^2}$. Интересно отметить, что отношение $\frac{S_1''}{S_1'} = \eta$ и не зависит от размеров канала.

7. Основной задачей настоящей работы, как указывалось, является исследование свойств среды с цилиндрическими каналами. Эта задача была сведена к задаче о распространении осесимметричных волн вдоль трубки с радиально закрепленной внешней поверхностью, после чего было найдено волновое число для таких волн в статическом приближении ($|\bar{k}_l a| \ll 1$). Теперь снова перейдем к рассмотрению безграничной среды с цилиндрическими каналами. Очевидно, выражение, найденное для волнового

числа в случае одной трубки, будет справедливо и для всей среды. Из выражения (17) следует тот интересный вывод, что волновое число микро-неоднородной среды с цилиндрическими каналами не зависит от числа каналов на единицу поверхности, а зависит только от величины ϵ^2 , которую можно назвать «коэффициентом перфорации».

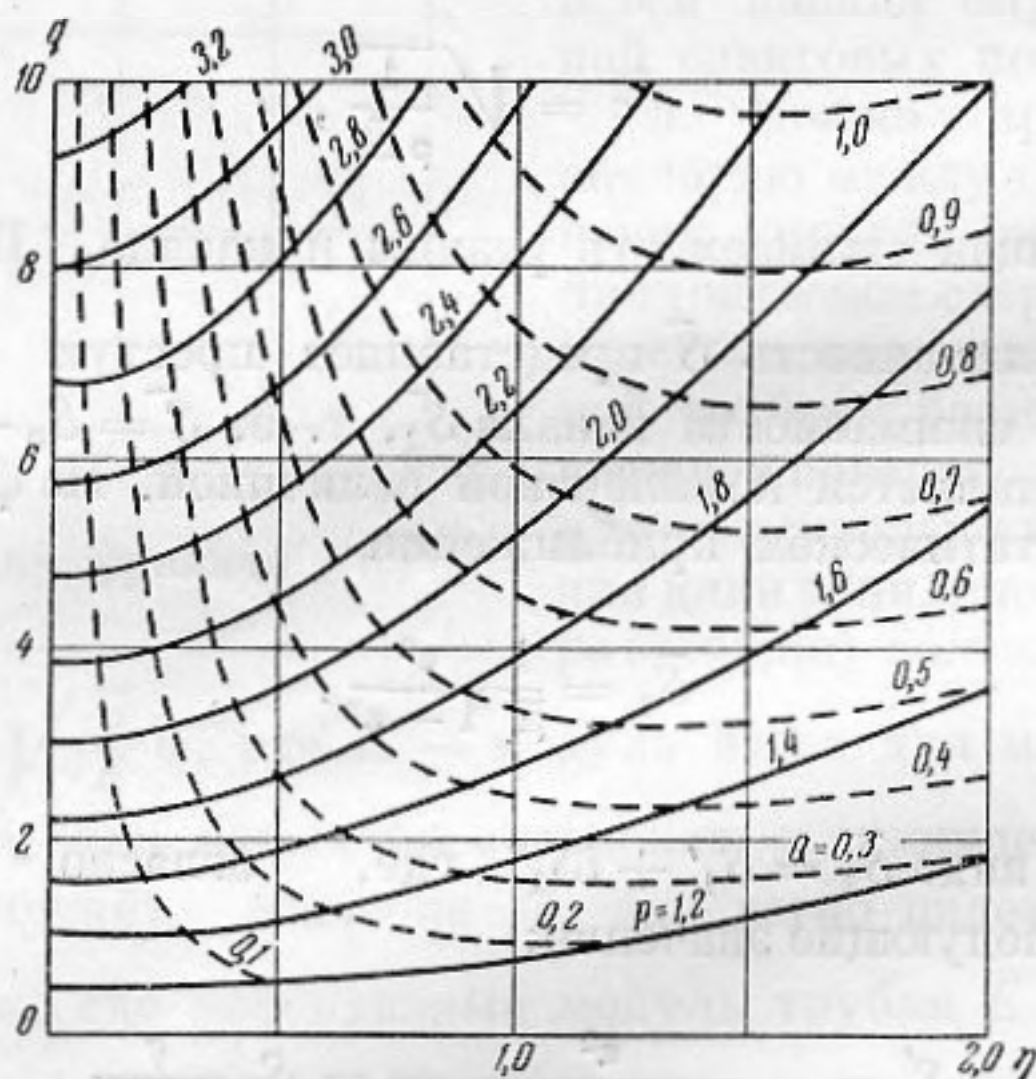
Рассмотрим несколько подробнее выражение (17) для волнового числа \bar{k} , которое можно представить в следующем виде:

$$\bar{k} = k_l \sqrt{\bar{\epsilon}_0} = k_l \sqrt{1 + \frac{q}{1 - i\eta}}, \quad (27)$$

где величина q определяется выражением (26). Из (27) видно, что величина $\frac{\bar{k}}{k_l}$ зависит только от двух параметров — q и η ; ее можно вычислять, построив соответствующую номограмму. С этой целью представим $\frac{\bar{k}}{k_l}$ так:

$$\frac{\bar{k}}{k_l} = P + iQ,$$

где P и Q — безразмерные величины действительной и мнимой частей



Фиг. 4. Номограмма для определения комплексного волнового числа микро-неоднородной среды $k = k_l (P + iQ)$ по известным ее параметрам (q и η).

$\frac{\bar{k}}{k_l}$. Разделяя действительную и мнимую части в (27), получим

$$P = \rho_0 \cos \frac{\theta}{2} \quad (28)$$

и

$$Q = \rho_0 \sin \frac{\theta}{2},$$

где

$$\rho_0 = \sqrt[4]{1 + q \frac{2+q}{1+\eta^2}}, \quad \text{а } \operatorname{tg} \theta = \frac{\eta q}{1+q+\eta^2}.$$

На фиг. 4 представлена номограмма для расчета величин P и Q по известным значениям параметров q и η . Номограмма построена на осно-

вании уравнений (28). По осям отложены значения параметров q и η и в этой координатной плоскости проведены линии $P = \text{const}$ и $Q = \text{const}$. Таким образом, зная упругие параметры резины ($\lambda, \bar{\mu}$) и коэффициент перфорации ε^2 , можно определить статическое значение волнового числа искусственной поглощающей среды, которую представляет резина с цилиндрическими каналами. Отметим, что по номограмме можно определять и волновое число с поправкой Рэля, если взять для этого случая в качестве модуля сдвига величину μ' из (19).

При помощи номограммы фиг. 4 можно решать и обратную задачу — из измеренного обычными способами комплексного волнового числа $(P + iQ)$ искусственной поглощающей среды, зная величины λ и ε^2 , определять комплексный модуль сдвига резины $\bar{\mu}$. Заметим, что это можно сделать на различных частотах звукового или ультразвукового диапазона в непрерывном диапазоне частот, если только для данного диапазона частот выполняется условие $|\bar{k}_1 a| \ll 1$.

Результаты экспериментального исследования искусственных поглощающих сред с цилиндрическими каналами будут изложены в дальнейшем.

В заключение выражаю глубокую признательность Г. Д. Малюжицу за постановку задачи и руководство работой и Ю. М. Сухаревскому за ценные советы при ее выполнении.

ЛИТЕРАТУРА

1. Д. В. С и в у х и н. Диффракция плоской звуковой волны на сферической полости. Акуст. журн., 1955, 1, 1, 78—88.
2. Л я в. Математическая теория упругости, ИЛ, М., 1955.
3. D. V a n s t r o f t. The velocity of longitudinal waves in cylindrical bars. Phys. Rev., 1941, 59, 7, 588—593.
4. Т. А л ф р е й. Механические свойства высокополимеров, ИЛ, М., 1954.
5. Table of the Bessel functions $J_0(z)$ and $J_1(z)$ for complex arguments. New York, 1943.
6. Table of the Bessel functions $Y_0(z)$ and $Y_1(z)$ for complex arguments. New York, 1951.
7. Р э л е й. Теория звука, т. 1, ИЛ, М., 1954.

Акустический институт АН СССР
Москва

Поступила в редакцию
12 декабря 1955 г.