АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том III 1957 Вып. 4

ВЛИЯНИЕ ФЛЮКТУАЦИЙ НА ДИФРАКЦИОННОЕ ИЗОБРАЖЕНИЕ ФОКУСИРУЮЩЕЙ СИСТЕМЫ

Л. А. Чернов

Получены общие формулы, определяющие среднее распределение и распределение флюктуаций в дифракционной картине, создаваемой фокусирующей системой, при наличии флюктуаций в падающей волне. Общие формулы исследованы в двух предельных случаях больших и малых флюктуаций.

Флюктуации амплитуды и фазы в падающей волне вызывают флюктуации дифракционного изображения, создаваемого фокусирующей системой (изображение «дышит»). При этом наблюдаются не только отклонения интенсивности от среднего распределения, но и само среднее распределение существенно зависит от флюктуаций в падающей волне. В связи с этим в теории фокусирующих систем возникают две задачи: 1) нахождение среднего распределения в дифракционной картине, 2) исследование вопроса о распределении флюктуаций в ней.

Ни один из этих вопросов, насколько нам известно, не был исследован. Только в работе Красильникова и Татарского [1] был рассмотрен вопрос о малых флюктуациях в фокусе объектива. Их формулы могут быть получены как частный случай из нашей более общей теории.

В настоящей работе мы рассмотрим оба указанных выше вопроса, не ограничиваясь требованием малости флюктуаций, и предполагая, что флюктуации в падающей волне обусловлены влиянием крупномасштабных неоднородностей в среде.

В устройстве фокусирующей системы обычно имеется часть, превращающая плоскую волну в сферическую. Поскольку конструкция фокусирующей части не существенна, мы будем в дальнейшем представлять ее себе в виде линзы. Если известно распределение флюктуаций уровня L и флюктуаций фазы S на поверхности сферы за линзой, то поле вблизи фокуса можно вычислить по формуле Дебая [2]:

$$p = \frac{iA_0}{\lambda F}\exp(-ikF)\int\limits_s \exp(L+iS)\cdot\exp\left(ik\frac{\mathbf{Fr}}{F}\right)ds, \tag{1}$$

где A_0 — амплитуда падающей (невозмущенной) волны, λ — длина волны, $k=2\pi/\lambda$. При этом начало координатной системы выбрано в фокусе (центре сферы). Положение элемента ds на поверхности сферы определяется вектором $\mathbf{F}$. Положение точки наблюдения определяется вектором $\mathbf{r}$.

Формула (1) была получена Дебаем в предположении, что амплитудная и фазовая аберрации отсутствуют ($L=S=0$). При наличии аберрации формула (1) остается в силе, если только изменение уровня L и фазы S на длине волны вдоль поверхности интегрирования малы по сравнению с единицей, как показал Тартаковский [3]. В случае крупномасштабных неоднородностей это условие выполняется

Ограничиваясь в дальнейшем параксиальными линзами, мы можем считать, что распределение флюктуаций уровня и фазы на выходной сферической поверхности линзы совпадает с распределением на входной плоской поверхности или, другими словами, с распределением в падающей волне.

Среднее распределение интенсивности в дифракционной картине определяется величиной $\overline{p^*p}$, где черта наверху означает статистическое усреднение. На основании (1) получаем

$$\overline{p^*\cdot p} = \frac{A_0^2}{\lambda^2F^2}\int\limits_s\cdot\int\limits_s \overline{\cdot\exp\left[L_1 + L_2 + i(S_1 - S_2)\right]}\cdot\exp\left[i\frac{k}{F}(\mathbf{F}_1 - \mathbf{F}_2)\cdot\mathbf{r}\right] ds_1\, ds_2. \quad (2)$$

Флюктуация поля в дифракционной картине может быть вычислена по формуле

$$\overline{|\Delta p|^2} = \overline{p^*\cdot p} - \overline{p^*}\cdot\overline{p},$$

которая на основании (1) дает

$$\overline{|\Delta p|^2} = \frac{A_0^2}{\lambda^2F^2}\iint\limits_{s\,s}\left\{\overline{\exp\left[L_1 + L_2 + i(S_1 + S_2)\right]} - \overline{\exp(L_1 + iS_1)}\cdot\overline{\exp(L_2 + iS_2)}\right\}\times$$

$$\times\exp\left[i\frac{k}{F}(\mathbf{F}_1 - \mathbf{F}_2)\cdot\mathbf{r}\right] ds_1\, ds_2. \quad (3)$$

Среднее поле $\overline{A_0\exp(L + iS)}$ и корреляционная функция полей $A_0^2\exp\left[L_1 + L_2 + i(S_1 - S_2)\right]$ в падающей волне были вычислены в работе [4]. Используя результаты этой работы, запишем формулы (2) и (3) в следующем окончательном виде:

$$\overline{p^*p} = \frac{A_0^2}{\lambda^2F^2}\iint\limits_{s\,s}\exp\left[\overline{L^2}(R_l - 1) + \overline{S^2}(R_s - 1)\right]\cdot\exp\left[i\frac{k}{F}(\mathbf{F}_1 - \mathbf{F}_2)\cdot\mathbf{r}\right] ds_1\, ds_2, \quad (4)$$

$$\overline{|\Delta p|^2} = \frac{A_0^2}{\lambda^2F^2}\iint\limits_{s\,s}\left\{\exp\left[\overline{L^2}(R_l - 1) + \overline{S^2}(R_s - 1)\right] - \exp\left[-(\overline{L^2} + \overline{S^2})\right]\right\}\times$$

$$\times\exp\left[i\frac{k}{F}(\mathbf{F}_1 - \mathbf{F}_2)\cdot\mathbf{r}\right] ds_1\, ds_2, \quad (5)$$

где $\overline{L^2}$ и $\overline{S^2}$ — средние квадраты флюктуаций уровня и фазы, R_l и R_s — соответственно коэффициенты поперечной автокорреляции флюктуаций уровня и фазы в падающей волне. Формулы (4) и (5) получены без специальных предположений относительно вида коэффициента корреляции для флюктуаций показателя преломления и без ограничения малости флюктуаций уровня и фазы в падающей волне.

Предположим, что коэффициент корреляции флюктуаций показателя преломления имеет гауссов вид:

$$N(r) = \exp\left(-\frac{r^2}{a^2}\right), \quad (6)$$

где a — радиус корреляции.

В этом случае, на основании результатов работы [5], мы получаем

$$\overline{L^2} + \overline{S^2} = \alpha, \quad (7)$$

$$\overline{L^2}(R_l - 1) + \overline{S^2}(R_s - 1) = \alpha\left[\exp\left(-\frac{l^2}{a^2}\right) - 1\right], \quad (8)$$

где l — расстояние между двумя точками поля, расположенными в плоскости, перпендикулярной к направлению распространения, и

$$\alpha = \sqrt{\pi}\cdot\overline{\mu^2}k^2aD. \quad (9)$$

Здесь $\overline{\mu^2}$ — средний квадрат флюктуации показателя преломления, D — дистанция, пройденная волной в неоднородной среде. Формулы (4) и (5) теперь приобретают следующий вид:

$$\overline{p^*p} = \frac{A_0^2}{\lambda^2F^2}\iint\limits_{s\,s}\exp\left[\alpha\left(e^{-\frac{l^2}{a^2}} - 1\right)\right]\exp\left[i\frac{k}{F}(\mathbf{F}_1 - \mathbf{F}_2)\cdot\mathbf{r}\right] ds_1\, ds_2, \quad (10)$$

$$\overline{|\Delta p|^2} = \frac{A_0^2}{\lambda^2 F^2} \iint\limits_{s\,s} \left\{ \exp\left[\alpha\left(e^{-\frac{l^2}{a^2}} - 1\right)\right] - \exp(-\alpha) \right\} \exp\left[i\frac{k}{F}(\mathbf{F}_1 - \mathbf{F}_2)\cdot\mathbf{r}\right] ds_1\, ds_2. \tag{11}$$

Отыскание среднего распределения вблизи от фокуса при наличии флюктуаций в падающей волне представляет собой задачу математически более сложную, чем отыскание распределения при наличии регулярной амплитудной и фазовой аберраций. Осложнение связано с необходимостью вычисления четырехкратного интеграла (дважды по поверхности) вместо двукратного. Чтобы разрешить задачу хотя бы для некоторых частных случаев, необходимо с самого начала сделать упрощающее предположение, считая, что линза ограничена квадратной диафрагмой. Совмещая ось абсцисс декартовой системы координат с главной осью линзы, получим для среднего распределения в фокальной плоскости на основании (10) следующую формулу:

$$\overline{p^* p} = \frac{A_0^2}{\lambda^2 F^2} \iiiint\limits_{-h/2}^{h/2} \exp\left[-\alpha\left(1 - e^{-\frac{(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}{a^2}}\right)\right] \times$$

$$\times \exp\left\{i\frac{k}{F}\left[y'(y_1-y_2) + z'(z_1-z_2)\right]\right\} dy_1\, dz_1\, dy_2\, dz_2, \tag{12}$$

где h — размеры квадратной диафрагмы, y' и z' — координаты точки в фокальной плоскости. Интегралы, входящие в это выражение, удается вычислить в двух предельных случаях малых ($\alpha \ll 1$) и больших ($\alpha \gg 1$) флюктуаций в падающей волне. В случае малых флюктуаций ($\alpha \ll 1$) первый множитель под интегралом можно положить равным единице. Тогда получим известную формулу распределения интенсивности в отсутствие флюктуаций в падающей волне

$$\overline{p^* p} = A_0^2 \frac{h^4}{\lambda^2 F^2} \left(\frac{\sin\frac{hky'}{2F}}{\frac{hky'}{2F}}\right)^2 \left(\frac{\sin\frac{hkz'}{2F}}{\frac{hkz'}{2F}}\right)^2. \tag{13}$$

Дифракционная картина содержит главный максимум в центре (фокусе и быстро убывающие вторичные максимумы на определенных расстояниях от центра.

Рассмотрение больших флюктуаций в падающей волне может дать существенно новые результаты только в том случае, если размеры линзы велики или хотя бы того же порядка, что и радиус корреляции в среде ($h \geqslant a$). Если же размеры линзы малы по сравнению с радиусом корреляции ($h \ll a$), то амплитуды и фазы во всех точках линзы одинаковы и флюктуации их во времени, если даже они велики, никакого влияния на дифракционную картину не оказывают. Поэтому рассмотрим случай, когда выполняются два условия:

$$\alpha \gg 1, \tag{14}$$

$$h \geqslant a. \tag{15}$$

При этом можно воспользоваться следующим приближенным представлением показательной функции:

$$\exp\left\{-\frac{(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}{a^2}\right\} \cong 1 - \frac{(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}{a^2}. \tag{16}$$

При $(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2 < a^2$ два члена в разложении достаточно хорошо описывают показательную функцию. При $(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2) \geqslant a^2$ вклад в интеграл (12), создаваемый точной функцией или ее приближенным выражением, относительно мал (тем меньше, чем больше α). Поэтому вид функции при больших значениях аргумента несущественен. На основании (16) формула (12) приобретает вид:

$$\overline{p^*p} = \frac{A_0^2}{\lambda^2 F^2} \iint\limits_{-h/2}^{h/2} \exp\left[-\frac{\alpha}{a^2}(y_1-y_2)^2 + i\frac{ky'}{F}(y_1-y_2)\right] dy_1\,dy_2 \times$$
$$\times \iint\limits_{-h/2}^{h/2} \exp\left[-\frac{\alpha}{a^2}(z_1-z_2)^2 + i\frac{kz'}{F}(z_1-z_2)\right] dz_1\,dz_2. \tag{17}$$

Введем относительную координату $y = y_1 - y_2$ и координату центра тяжести $y_0 = \frac{1}{2}(y_1+y_2)$. При вычислении интеграла существенную роль играют значения y, удовлетворяющие условию

$$\frac{\alpha}{a^2}\,y^2 \sim 1,$$

или

$$y^2 \sim \frac{a^2}{\alpha}.$$

При достаточно большом α

$$y^2 \ll a^2$$

и, в силу (15), тогда и подавно

$$y^2 \ll h^2. \tag{18}$$

При этом условии можно интегрировать в (19) по y в пределах от $-\infty$ до $+\infty$. Тогда мы получим

$$\iint\limits_{-h/2}^{h/2} \exp\left[-\frac{\alpha}{a^2}(y_1-y_2)^2 + i\frac{ky'}{F}(y_1-y_2)\right] dy_1\,dy_2 =$$
$$= \int\limits_{-h/2}^{h/2} dy_0 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{\alpha}{a^2}y^2 + i\frac{ky'}{F}y\right) dy = ha\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\exp\left[-\frac{1}{\alpha}\left(\frac{kay'}{2F}\right)^2\right].$$

Второй двукратный интеграл в (17) тождествен первому. Поэтому мы получаем окончательно

$$\overline{p^*p} = B\exp\left[-\beta(y'^2+z'^2)\right], \tag{19}$$

где

$$B = \frac{\pi a^2 h^2}{\alpha\lambda^2 F^2}A_0^2, \tag{20}$$

$$\beta = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{ka}{2F}\right)^2. \tag{21}$$

Таким образом, интенсивность монотонно убывает при удалении от фокуса. Как видно из (20) и (21) эффективный радиус фокального пятна $r_{\text{эфф}} = 1/\sqrt{\beta}$ растет вместе с ростом флюктуаций, в то время как интенсивность B в фокусе уменьшается; фокальное пятно «размазывается».

Полученные для двух предельных случаев малых и больших флюктуаций количественные результаты находятся в хорошем согласии с эмпирической качественной шкалой Данжона и Кудэ [6], дающей оценку величины турбуленции атмосферы по виду дифракционного изображения звезд в телескопе.

Переходим к исследованию распределения флюктуаций в дифракционной картине. Заметим, прежде всего, что в случае больших флюктуаций ($\alpha \gg 1$) в формуле (11) можно пренебречь членом $\exp(-\alpha)$ по сравнению с другим членом $\exp\left[\alpha\left(e^{\frac{l^2}{a^2}}-1\right)\right]$. Тогда формула (11) совпадает с формулой (10). В случае больших флюктуаций распределение флюктуаций совпадает со средним распределением.

В случае малых флюктуаций указанные выше члены можно разложить по степеням малого параметра α. Ограничиваясь старшими членами, получим

$$\overline{|\Delta p|^2} = \frac{A_0^2\alpha}{\lambda^2F^2}\iiiint\limits_{-h/2}^{h/2}\exp\left[-\frac{(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}{a^2}\right]\times$$

$$\times\exp\left\{i\frac{k}{F}\left[y'(y_1-y_2)+z'(z_1-z_2)\right]\right\}dy_1\,dz_1\,dy_2\,dz_2. \qquad (22)$$

При помощи (22) удается найти распределение флюктуаций в дифракционной картине в двух предельных случаях $h\ll a$ и $h\gg a$. Однако в самом фокусе можно вычислить флюктуацию при любом соотношении между h и a.

Если размеры диафрагмы малы по сравнению с радиусом корреляции ($h\ll a$), то первый показательный множитель под интегралом можно положить равным единице. Рспределение флюктуаций подобно распределению интенсивности (13) в отсутствие флюктуаций.

Если размеры диафрагмы велики по сравнению с радиусом корреляции ($h\gg a$), то интегрирование по относительным координатам $y=y_1-y_2$ и $z=z_1-z_2$ можно распространить на область от $-\infty$ до $+\infty$. Тогда интегралы в (22) вычисляются совершенно также, как они вычислялись в (17). Поэтому мы получаем сразу

$$\overline{|\Delta p|^2} = C\exp\left[-\delta\left(y'^2+z'^2\right)\right], \qquad (23)$$

где

$$C = \frac{\pi\alpha a^2h^2}{\lambda^2F^2}A_0^2, \qquad (24)$$

$$\delta = \left(\frac{ak}{2F}\right)^2. \qquad (25)$$

Флюктуации монотонно убывают по мере удаления от фокуса и, следовательно, распределение флюктуаций существенно отличается от среднего распределения, которое при малых флюктуациях приближенно описывается (13), т. е. имеет вид затухающей синусоиды.

Для фокуса ($y'=z'=0$) формула (22) приобретает простой вид:

$$\overline{|\Delta p|^2} = \frac{A_0^2\alpha}{\lambda^2F^2}\iiiint\limits_{-h/2}^{h/2}\exp\left[-\frac{(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}{a^2}\right]dy_1\,dz_1\,dy_2\,dz_2. \qquad (26)$$

Вычисляя интегралы, входящие в (26), для относительной флюктуации в фокусе, мы получаем

$$\frac{\overline{|\Delta p|^2}}{|\bar p|^2} = \frac{\pi\alpha}{\left(\frac{h}{a}\right)^4}\left[\frac{h}{a}\Phi\left(\frac{h}{a}\right)+\frac{\exp\left(-\frac{h^2}{a^2}\right)-1}{\sqrt{\pi}}\right]^2. \qquad (27)$$

Из последней формулы следует, что с увеличением размеров диафрагмы флюктуации уменьшаются. В этом заключается усредняющее действие большой линзы. Подтверждается этот вывод, в частности, тем общеизвестным фактом, что мерцание звезд гораздо больше заметно невооруженным глазом, чем при наблюдении в большой телескоп.

В заключение заметим, что для флюктуации амплитуды и фазы в фокусе теория дает результат, совпадающий с результатом Красильникова и Татарского [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Красильников и В. И. Татарский. О зависимости среднего квадратичного флюктуаций фазы и амплитуды от размеров объектива при наблюдении мерцания звезд. ДАН СССР, 1953, 38, 3.
2. P. Debye. Das Verhalten von Lichtwellen in der Nähe eines Brennpunktes oder einer Brennlinie. Ann. d. Phys., (4), 1909, 30, 755.
3. Б. Д. Тартаковский. Твердые звуковые линзы. Отчет акустической лаборатории ФИАН СССР, Москва, 1951.
4. Л. А. Чернов. Корреляция флюктуаций поля. Акуст. журн., 1957, 3, 2, 192—194.
5. Л. А. Чернов. Корреляции флюктуаций амплитуды и фазы при распространении волны в среде со случайными неоднородностями. Акуст. журн., 1955, 1, 1, 89—95.
6. А. Данжон и А. Кудэ. Атмосферное волнение. Астрономич. журн., 17, 1, 77.

Ярославский педагогический институт им. К. Д. Ушинского

Поступила в редакцию 9 января 1957 г.