АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том IV 1958 Вып. 1

ДИФРАКЦИЯ И ИЗЛУЧЕНИЕ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН В ЖИДКОСТЯХ И ГАЗАХ. ЧАСТЬ II

М. Д. Хаскинд

В квадратичном приближении устанавливаются общие формулы для средних значений гидродинамических сил и моментов, действующих на тело при дифракции и излучении акустических волн в жидкостях и газах. Полученные общие результаты иллюстрируются конкретными примерами.

Средние значения гидродинамических сил и моментов

Установим общие формулы для средних значений главного вектора и главного момента гидродинамических сил в квадратичном приближении за период колебаний при дифракции и излучении акустических волн. С этой целью воспользуемся уравнением Бернулли:

$$w + \frac{1}{2}|\nabla\Phi^0|^2 + \frac{\partial\Phi^0}{\partial t} = 0, \quad w = \int \frac{dp}{\rho} n, \tag{86*}$$

и вычислим величину давления с точностью до малых второго порядка включительно.

Для тепловой функции w мы имеем разложение

$$w = \left(\frac{\partial w}{\partial p}\right)_0 (p - p_0) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial p^2}\right)_0 (p - p_0) + \ldots = \frac{p - p_0}{\rho_0} - \frac{1}{2c^2}\left(\frac{p - p_0}{\rho_0}\right)^2 + \ldots$$

Так как в первом приближении $\frac{p - p_0}{\rho_0} = -\frac{\partial\Phi^0}{\partial t}$, то функция w во втором приближении выражается так:

$$w = \frac{p - p_0}{\rho_0} - \frac{1}{2c^2}\left(\frac{\partial\Phi^0}{\partial t}\right)^2.$$

На этом основании искомое выражение для величины давления имеет вид:

$$\frac{p - p_0}{\rho_0} = -\frac{\partial\Phi^0}{\partial t} - \frac{1}{2}\left[|\nabla\Phi^0|^2 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial\Phi^0}{\partial t}\right)^2\right]. \tag{87}$$

Пользуясь теперь формулами (5) и (87), получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \rho_0 \iint_S \left[\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(|\nabla\Phi^0|^2 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial\Phi^0}{\partial t}\right)^2\right]\mathbf{n}\,dS, \\ \mathbf{M} &= \rho_0 \iint_S \left[\frac{\partial\Phi^0}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(|\nabla\Phi^0|^2 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial\Phi^0}{\partial t}\right)^2\right](\mathbf{r}\times\mathbf{n})\,dS. \end{aligned} \tag{88}$$

---

* Нумерация формул и фигур начата в I ч. статьи автора, напечатанной в предыдущем выпуске журнала.

Материальные и локальные производные связаны соотношениями:

$$\frac{d}{dt}\iint\limits_S \Phi^0 \mathbf{n} dS = \iint\limits_S \left(\frac{\partial \Phi^0}{\partial t}\,\mathbf{n} + v_n \nabla \Phi^0\right) dS\,,$$

$$\frac{d}{dt}\iint\limits_S \Phi^0 (\mathbf{r}\times\mathbf{n})\, dS = \iint\limits_S \left[\frac{\partial \Phi}{\partial t}(\mathbf{r}\times\mathbf{n}) + v_n (\mathbf{r}\times\nabla\Phi^0)\right] dS\,.$$

Поэтому формулы (88) принимают вид:

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt}\iint\limits_S \rho_0 \Phi^0 \mathbf{n} dS + \rho_0 \iint\limits_S \left[\frac{1}{2}\left(|\nabla\Phi^0|^2 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial\Phi^0}{\partial t}\right)^2\right)\mathbf{n} - \frac{\partial\Phi^0}{\partial n}\nabla\Phi^0\right] dS\,,$$

$$\mathbf{M} = \frac{d}{dt}\iint\limits_S \rho_0 \Phi^0 (\mathbf{r}\times\mathbf{n})\, dS + \rho_0 \iint\limits_S \mathbf{r}\times\left[\frac{1}{2}\left(|\nabla\Phi^0|^2 - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial\Phi^0}{dt}\right)^2\right)\mathbf{n} - \frac{\partial\Phi^0}{\partial n}\nabla\Phi^0\right] dS\,. \qquad (89)$$

Средние значения первых слагаемых в (89) за период колебаний $T = 2\pi/\sigma$ равны нулю и таким образом

$$\mathbf{F}^* = \rho_0 \left\{\iint\limits_S \left[\frac{1}{2}\left(|\nabla\Phi^0|^2 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial\Phi^0}{\partial t}\right)^2\right)\mathbf{n} - \frac{\partial\Phi^0}{\partial n}\nabla\Phi^0\right] dS\right\}^*, \quad \left(a^* = \frac{1}{T}\int^{t+T} a(t)\, dt\right).$$

$$\mathbf{M}^* = \rho_0 \left\{\iint\limits_S \mathbf{r}\times\left[\frac{1}{2}\left(|\nabla\Phi^0|^2 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial\Phi^0}{\partial t}\right)^2\right)\mathbf{n} - \frac{\partial\Phi^0}{\partial n}\nabla\Phi^0\right] dS\right\}^*. \qquad (90)$$

Определив потенциал скоростей Φ^0 в первом приближении при помощи волнового уравнения (1), мы вместе с тем имеем возможность вычислить по формулам (90) средние значения величин $\mathbf{F}$ и $\mathbf{M}$ в квадратичном приближении.

Для дальнейшего заметим, что если две функции f_1 и f_2 удовлетворяют в области τ_1, ограниченной поверхностью S_1, волновому уравнению (1), то на основании обобщенной теоремы Остроградского легко установить равенства ($\mathbf{u}_1 = \operatorname{grad} f_1$, $\mathbf{u}_2 = \operatorname{grad} f_2$) *

$$\iint\limits_{S_1}\left[\left(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial f_1}{\partial t}\frac{\partial f_2}{\partial t}\right)\mathbf{n} - \mathbf{u}_1 u_{2n} - \mathbf{u}_2 u_{1n}\right] dS =$$

$$= \iiint\limits_{\tau_1}\left[\mathbf{u}_1\times\operatorname{rot}\mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_2\times\operatorname{rot}\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_1\operatorname{div}\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_2\operatorname{div}\mathbf{u}_1 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial f_1}{\partial t}\frac{\partial \mathbf{u}_2}{\partial t} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{c^2}\frac{\partial f_2}{\partial t}\frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t}\right] d\tau = -\frac{1}{c^2}\iiint\limits_{\tau_1}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f_1}{\partial t}\mathbf{u}_2 + \frac{\partial f_2}{\partial t}\mathbf{u}_1\right) d\tau, \qquad (91)$$

$$\iint\limits_{S_1}\mathbf{r}\times\left[\left(\mathbf{u}_1\cdot\mathbf{u}_2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial f_1}{\partial t}\frac{\partial f_2}{\partial t}\right)\mathbf{n} - \mathbf{u}_1 u_{2n} - \mathbf{u}_2 u_{1n}\right] dS =$$

$$= -\frac{1}{c^2}\iiint\limits_{\tau_1}\mathbf{r}\times\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f_1}{\partial t}\mathbf{u}_2 + \frac{\partial f_2}{\partial t}\mathbf{u}_1\right) d\tau.$$

Таким образом, средние значения этих интегралов равны нулю. Отсюда следует, что интегрирование в формулах (90) ($f_1 = f_2 = \Phi^0$) можно заменить интегрированием по произвольной замкнутой поверхности, со-

---

* При выводе равенства (91) используется соотношение:

$$\operatorname{grad}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) = (\mathbf{b}\cdot\nabla)\mathbf{a} + (\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{b} + \mathbf{b}\times\operatorname{rot}\mathbf{a} + \mathbf{a}\times\operatorname{rot}\mathbf{b}.$$

держащей внутри себя поверхность S, и вне которой расположены особенности функции Φ^0. Этот результат вместе с формулами (90) можно также получить на основании теорем о количестве движения жидкости.

Подставим выражение (7) в формулы (90); тогда, учитывая (91), получим

$$\mathbf{F}^* = \mathbf{F}_1^* + \mathbf{F}_2^*, \quad \mathbf{M}^* = \mathbf{M}_1^* + \mathbf{M}_2^*; \tag{92}$$

$$\mathbf{F}_1^* = \rho_0 \left\{ \iint\limits_{\Sigma} \left[\frac{1}{2} \left(|\nabla\Phi|^2 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial\Phi}{\partial t} \right)^2 \right) \mathbf{n} - \frac{\partial\Phi}{\partial n} \nabla\Phi \right] dS \right\}^*, \quad (\Phi = \varphi e^{i\sigma t})$$

$$\mathbf{M}_1^* = \rho_0 \left\{ \iint\limits_{\Sigma} \mathbf{r} \times \left[\frac{1}{2} \left(|\nabla\Phi|^2 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial\Phi}{\partial t} \right)^2 \right) \mathbf{n} - \frac{\partial\Phi}{\partial n} \nabla\Phi \right] dS \right\}^*; \tag{93}$$

$$\mathbf{F}_2^* = \rho_0 \left\{ \iint\limits_{S} \left[\left(\nabla\Phi \cdot \nabla\Phi_0 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial\Phi}{\partial t} \frac{\partial\Phi_0}{\partial t} \right) \mathbf{n} - \nabla\Phi \frac{\partial\Phi_0}{\partial n} - \nabla\Phi_0 \frac{\partial\Phi}{\partial n} \right] dS \right\}^*,$$

$$\mathbf{M}_2^* = \rho_0 \left\{ \iint\limits_{S} \mathbf{r} \times \left[\left(\nabla\Phi \cdot \nabla\Phi_0 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial\Phi}{\partial t} \frac{\partial\Phi_0}{\partial t} \right) \mathbf{n} - \nabla\Phi \frac{\partial\Phi_0}{\partial n} - \nabla\Phi_0 \frac{\partial\Phi}{\partial n} \right] dS \right\}^*, \tag{94}$$

где Σ — поверхность сферы большого радиуса r с центром в начале координат и охватывающая поверхность S.

Воспользуемся теперь асимптотическим выражением (12), из которого имеем

$$\Phi(x, y, z, t) = -\frac{Q(k, \theta, \psi)}{4\pi r} e^{i(\sigma t - kr)} + 0\left(\frac{1}{r^2}\right), \tag{95}$$

и примем во внимание соотношения

$$\nabla\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial\Phi}{\partial\theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial\Phi}{\partial\psi} \mathbf{e}_\psi,$$

$$\mathbf{e}_r = \sin\theta (\mathbf{i}_1 \cos\psi + \mathbf{i}_2 \sin\psi) + \mathbf{i}_3 \cos\theta,$$

$$\mathbf{e}_\theta = \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial\theta}, \quad \mathbf{e}_\psi = -\mathbf{i}_1 \sin\psi + \mathbf{i}_2 \cos\psi, \quad (ab)^* = \operatorname{Re} \frac{a\bar{b}}{2}, \tag{96}$$

где $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\theta$ и $\mathbf{e}_\psi$ — единичные векторы осей координат сферической системы и черта над буквой обозначает переход к комплексно сопряженным величинам. Учитывая еще, что в формулах (93) $\mathbf{n} = \mathbf{e}_r$, мы находим для $\mathbf{F}_1^*$ и $\mathbf{M}_1^*$ выражения:

$$\mathbf{F}_1^* = -\frac{\rho_0 k^2}{32\pi^2} \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\pi} |Q|^2 \sin\theta \mathbf{e}_r \, d\theta,$$

$$\mathbf{M}_1^* = \frac{\rho_0 k}{32\pi^2} \operatorname{Re} \left[i \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\pi} \left(\mathbf{e}_\psi \frac{\partial Q}{\partial\theta} \sin\theta - \mathbf{e}_\theta \frac{\partial Q}{\partial\psi} \right) \bar{Q} d\theta \right]. \tag{97}$$

Вычисление $\mathbf{F}_2^*$ и $\mathbf{M}_2^*$ проведем в двух ранее рассмотренных случаях сферических и плоских волн. В случае сферических волн функция Φ_0 имеет особенность при $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1$. Поэтому на основании (91) интегрирование по S в формулах (94) мы заменим интегрированием по Σ за вычетом соответствующих интегралов по поверхности сферы малого радиуса с центром в сферическом источнике волн. При вычислении соответствующих интегралов по Σ мы воспользуемся вытекающим из (29) асимптотическим равенством

$$\Phi_0 = \frac{A e^{ik\chi_1}}{4\pi r} e^{i(\sigma t - kr)} + 0\left(\frac{1}{r^2}\right), \quad \chi_1 = \sin\theta (x_1 \cos\psi + y_1 \sin\psi) + z_1 \cos\theta, \tag{98}$$

а также представлением $\nabla\Phi_0$ в сферических координатах. В результате этих вычислений мы получим следующее:

$$\mathbf{F}_2^* = \frac{\rho_0 k^2}{16\pi^2}\,\mathrm{Re}\left[\bar{A}\int\limits_0^{2\pi} d\psi \int\limits_0^{\pi} Q e^{-ik\chi_1}\mathbf{e}_r \sin\theta d\theta\right] - \frac{1}{2}\rho_0\,\mathrm{Re}\,[\bar{A}\nabla\varphi]_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_1}$$

$$\mathbf{M}_2^* = \frac{\rho_0 k}{32\pi^2}\,\mathrm{Re}\left\{\bar{A}\int\limits_0^{2\pi} d\psi \int\limits_0^{\pi}\left[\mathbf{e}_\psi\left(k\frac{\partial\chi_1}{\partial\theta} - i\frac{\partial Q}{\partial\theta}\right)\sin\theta - \right.\right. \tag{99}$$

$$\left.\left. - \mathbf{e}_\theta\left(k\frac{\partial\chi_1}{\partial\psi} - i\frac{\partial Q}{\partial\psi}\right)\right] e^{-ik\chi_1} d\theta\right\} - \frac{1}{2}\rho_0\,\mathrm{Re}\,[\bar{A}\mathbf{r}\times\nabla\varphi]_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_1}.$$

В случае же плоских волн поверхность S в формулах (94) можно сразу заменить на Σ и, кроме того, воспользуемся равенствами:

$$\Phi_0 = Be^{i(\sigma t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})},\quad \nabla\Phi_0 = -i\Phi_0\mathbf{k},\quad \frac{\partial\Phi_0}{\partial n} = -i\Phi_0(\mathbf{k}\cdot\mathbf{e}_r). \tag{100}$$

Принимая это во внимание, мы получим

$$\mathbf{F}_2^* = \frac{\rho_0 kr}{8\pi}\,\mathrm{Re}\left\{\bar{B}\int\limits_0^{2\pi} d\psi \int\limits_0^{\pi} Q(k,\theta,\psi)\, e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-kr)}(k\mathbf{e}_r + \mathbf{k})\sin\theta d\theta\right\}. \tag{101}$$

Применяя теперь метод установившихся фаз и переходя в (101) к пределу при $r\to\infty$, находим окончательно

$$\mathbf{F}_2^* = -\frac{1}{2}\rho_0\,\mathrm{Re}\,[i\bar{B}Q(k,\theta_0;\psi_0)\,\mathbf{k}]. \tag{102}$$

Аналогичным путем вычисляется величина $\mathbf{M}_2^*$:

$$\mathbf{M}_2^* = -\frac{1}{4}\rho_0\,\mathrm{Re}\left\{\bar{B}\left[\mathbf{e}_\psi^0\frac{\partial Q(k,\theta_0,\psi_0)}{\partial\theta_0} - \frac{\mathbf{e}_\theta^0}{\sin\theta_0}\frac{\partial Q(k,\theta_0,\psi_0)}{\partial\psi_0}\right]\right\},$$

$$(\mathbf{e}_\psi^0 = -\mathbf{i}_1\sin\psi_0 + \mathbf{i}_2\cos\psi_0,\ \mathbf{e}_\theta^0 = \cos\theta_0(\mathbf{i}_1\cos\psi_0 + \mathbf{i}_2\sin\psi_0) - \mathbf{i}_3\sin\theta_0). \tag{103}$$

Проанализируем более подробно выражение (102). Для этого представим $\bar{B}Q(k,\theta_0,\psi_0)$ в виде

$$\bar{B}Q(k,\theta_0,\psi_0) = \mathbf{v}\cdot\iint\limits_S \bar{\varphi}_0\frac{\partial\mathbf{\Phi}_1}{\partial n}dS + \boldsymbol{\omega}\cdot\iint\limits_S \bar{\varphi}_0\frac{\partial\mathbf{\Phi}_2}{\partial n}dS + \iint\limits_S f\frac{\partial\bar{\varphi}_7}{\partial n}dS +$$

$$+ \bar{B}Q_7(k,\theta_0,\psi_0)\,(f = \mathbf{v}\cdot\mathbf{\Phi}_1 + \boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{\Phi}_2,\ \varphi_0 = Be^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}), \tag{104}$$

который вытекает из соотношений (13), (15) и (16).

На основании формулы Грина

$$\iint\limits_S f\frac{\partial\bar{\varphi}_7}{\partial n}dS = \iint\limits_S \bar{\varphi}_7\frac{\partial f}{\partial n}dS + \iint\limits_\Sigma\left(f\frac{\partial\bar{\varphi}_7}{\partial n} - \bar{\varphi}_7\frac{\partial f}{\partial n}\right)dS,$$

и учитывая асимптотические выражения (19) для функций φ_m, мы получаем

$$\iint\limits_S f\frac{\partial\bar{\varphi}_7}{\partial n}dS = \iint\limits_S \bar{\varphi}_7\frac{\partial f}{\partial n}dS + \frac{ik}{8\pi^2}\int\limits_0^{2\pi} d\psi\int\limits_0^{\pi}\bar{Q}_7[\mathbf{v}\cdot\mathbf{Q}_1 + \boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{Q}_2]\sin\theta d\theta.$$

Поэтому выражение (104) принимает вид:

$$\bar{B}Q(k,\theta_0,\psi_0) = \mathbf{v}\cdot\iint\limits_S(\bar{\varphi}_0 + \bar{\varphi}_7)\frac{\partial\mathbf{\Phi}_1}{\partial n}dS + \boldsymbol{\omega}\cdot\iint\limits_S(\bar{\varphi}_0 + \bar{\varphi}_7)\frac{\partial\mathbf{\Phi}_2}{\partial n}dS +$$

$$+ \frac{ik}{8\pi^2}\int\limits_0^{2\pi} d\psi\int\limits_0^{\pi}\bar{Q}_7[\mathbf{v}\cdot\mathbf{Q}_1 + \boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{Q}_2]\sin\theta d\theta + \bar{B}Q_7(k,\theta_0,\psi_0). \tag{105}$$

Здесь векторы $\mathbf{Q}_1$ и $\mathbf{Q}_2$ имеют составляющие Q_1, Q_2, Q_3 и Q_4, Q_5, Q_6. Таким образом, принимая во внимание (23), мы получаем из формул (97), (102) и (105)

$$\mathbf{F}^* = \mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2 + \mathbf{R}_3, \tag{106}$$

$$\mathbf{R}_1 = \frac{\mathbf{c}}{c^2}(\mathbf{F}^{(2)}\cdot\mathbf{V} + \mathbf{M}^{(2)}\cdot\Omega)^* + \frac{\rho_0 k}{16\pi^2}\operatorname{Re}\left\{\int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\pi} \overline{Q}_7\,[\mathbf{v}\cdot\mathbf{Q}_1 + \boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{Q}_2]\times\right.$$

$$\left.\times\,(\mathbf{k} - k\mathbf{e}_r)\sin\theta d\theta\right\}, \quad \left(\frac{\mathbf{c}}{c^2} = \frac{\mathbf{k}}{\sigma}\right), \tag{107}$$

$$\mathbf{R}_2 = -\frac{\rho_0 k^2}{32\pi^2}\int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\pi} |\,\mathbf{v}\cdot\mathbf{Q}_1 + \boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{Q}_2\,|^2\,\mathbf{e}_r \sin\theta d\theta, \tag{108}$$

$$\mathbf{R}_3 = -\frac{\rho_0 k^2}{32\pi^2}\int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\pi} |\,Q_7\,|^2\,\mathbf{e}_r \sin\theta d\theta - \frac{1}{2}\rho_0 \operatorname{Re}\,[i\overline{B}Q_7(k,\,\theta_0,\,\psi_0)]\,\mathbf{k}, \tag{109}$$

где $\mathbf{c}$ — вектор фазовой скорости.

В этих выражениях $\mathbf{R}_3$ представляют собой среднее значение главного вектора гидродинамических сил при дифракции плоских волн вокруг неподвижного тела, $\mathbf{R}_2$ — среднее значение этих сил при чисто вынужденных колебаниях тела в спокойной жидкости, а $\mathbf{R}_1$ обусловлено совместным взаимодействием колебаний тела и дифракции плоских волн вокруг этого тела.

Для удлиненных тел можно в качестве первого источникового приближения положить

$$Q_m(k,\,\theta,\,\psi) = \iint_S e^{ik\chi}\frac{\partial\varphi_m}{\partial n}\,dS \quad (m = 1,\,2,\,\ldots\,7). \tag{110}$$

В этом случае $\mathbf{R}_2$ и второе слагаемое в (107) являются малыми величинами второго порядка относительно поперечных размеров тела. Далее из (16), (31) и (110) следует, что в этом же приближении мы имеем

$$Q_7(k,\,\theta_0,\,\psi_0) = iBk\iint_S [\sin\theta_0\cos\psi_0\cos(n,\,x) + \sin\theta_0\sin\psi_0\cos(n,\,y) +$$

$$+\cos\theta_0\cos(n,\,z)]\,dS = 0.$$

Следовательно, $\mathbf{R}_3$ также является малой величиной второго порядка относительно поперечных размеров тела.

Итак, в первом приближении среднее значение главного вектора гидродинамических сил определяется в виде

$$\mathbf{F}^* = \frac{\mathbf{c}}{c^2}(\mathbf{F}_0\cdot\mathbf{V} + \mathbf{M}_0\cdot\Omega)^*, \tag{111}$$

где $\mathbf{F}_0$ и $\mathbf{M}_0$ представляют собой первые приближения величин $\mathbf{F}^{(2)}$ и $\mathbf{M}^{(2)}$:

$$\mathbf{F}_0 = \rho_0\iint_S \frac{\partial\Phi_0}{\partial t}\,\mathbf{n}dS, \quad \mathbf{M}_0 = \rho_0\iint_S \frac{\partial\Phi_0}{\partial t}(\mathbf{r}\times\mathbf{n})\,dS. \tag{112}$$

Полученная приближенная оценка соответствует гипотезе проницаемости, т. е. предположению, что акустическое поле давлений полностью обусловлено набегающими на тело волнами. В соответствии с этим давление определяется при помощи формулы

$$\frac{p - p_0}{\rho_0} = -\frac{\partial\Phi_0}{\partial t} - \frac{1}{2}\left[|\nabla\Phi_0|^2 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial\Phi_0}{\partial t}\right)^2\right]. \tag{113}$$

Можно непосредственно убедиться, что такое допущение приводит к выражению (111). В самом деле, на основании (113) для $\mathbf{F}^*$ мы имеем соотношение:

$$\mathbf{F}^* = \rho_0 \left\{ \iint\limits_S \left[\frac{1}{2} \left(|\nabla\Phi_0|^2 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \Phi_0}{\partial t} \right)^2 \right) \mathbf{n} - \nabla\Phi_0 v_n \right] dS. \right. \tag{114}$$

Для плоских волн справедливы равенства

$$\nabla\Phi_0 = -\frac{\mathbf{c}}{c^2} \frac{\partial \Phi_0}{\partial t}, \qquad \left[|\nabla\Phi_0|^2 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \Phi_0}{\partial t} \right)^2 \right]^* = 0. \tag{115}$$

Принимая во внимание (3), (112) и (115), мы убеждаемся, что из (114) следует формула (111). Из формулы (111) следует, что в первом приближении $\mathbf{F}^*$ совпадает по направлению с фазовой скоростью $\mathbf{c}$ набегающих волн. Далее очевидно, что

$$\mathbf{F}^* \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{F}_0 \cdot \mathbf{V} + \mathbf{M}_0 \cdot \Omega)^*. \tag{116}$$

Следовательно, с формальной стороны точка приложения силы $\mathbf{F}^*$ перемещается с фазовой скоростью $\mathbf{c}$, и мощность при этом равна средней мощности дифракционных сил, определяемых приближенными выражениями (112).

При помощи общих формул (92)—(94) можно произвести также вычисление средних гидродинамических сил, действующих на цилиндрическое тело. В этом случае Σ следует заменить окружностью Σ_0 большего радиуса r, параллельной плоскости yz, с центром на оси цилиндрического тела и охватывающей контур C, а интегрирование по S заменяется интегрированием по контуру C.

Рассмотрим вначале излучение контура C совместно с дифракцией цилиндрических волн. В этом случае мы имеем

$$\Phi(y, z, t) = \frac{iQ^0(k, \theta)}{(8\pi kr)^{1/2}} e^{i(\sigma t - kr + \pi/4)} + 0(r^{-3/2}),$$
$$\nabla\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial r}\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\mathbf{e}_\theta \left(\mathbf{e}_r = \mathbf{i}_2 \cos\theta + \mathbf{i}_3 \sin\theta, \ \mathbf{e}_\theta = \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial\theta} \right), \tag{117}$$

где $Q^0(k, \theta)$ состоит из асимптотических характеристик функций излучения и дифракции

$$Q^0(k, \theta) = Q^{(1)}(k, \theta) + Q^{(2)}(k, \theta). \tag{118}$$

Здесь $Q^{(1)}(k, Q)$ представляет собой асимптотическую характеристику функции рассеяния $\psi^{(1)}(k_x = 0)$ при набегающих цилиндрических волнах, а $Q^{(2)}(k, \theta)$ — асимптотическая характеристика излучения, которая при колебаниях твердого контура представляется в форме

$$Q^{(2)}(k, \theta) = v_2 Q_2^0(k, \theta) + v_3 Q_3^0(k, \theta) + v_4 Q_4^0(k, \theta). \tag{119}$$

Подставив (117) в формулы (93), получим

$$\mathbf{F}_1^* = -\frac{\rho_0 k}{16\pi} \int\limits_{-\pi}^{+\pi} |Q^0(k, \theta)|^2 \mathbf{e}_r d\theta, \quad \mathbf{M}_{1x}^* = \frac{\rho_0}{16\pi} \operatorname{Re}\left[i \int\limits_{-\pi}^{+\pi} Q^0(k, \theta) \overline{\frac{\partial Q^0(k, \theta)}{\partial\theta}} d\theta \right]. \tag{120}$$

Вычисление $\mathbf{F}_2^*$ и M_{2x}^* проводим так же, как и в ранее рассмотренном пространственном случае, т. е. на основании (91) заменяем интегрирование по C в формулах (94) интегрированием по Σ_0 за вычетом соответствующих интегралов по окружности малого радиуса с центром в цилиндрическом источнике дифрагирующих волн. Пользуясь кроме того

асимптотическим равенством

$$\Phi_0(y, z, t) = -\frac{iAe^{ik\chi_{01}}}{(8\pi kr)^{1/2}} e^{i(\sigma t - kr + \pi/4)} + 0(r^{-3/2}) \, (\chi_{01} = y_1 \cos\theta + z_1 \sin\theta) \quad (121)$$

и выполнив необходимые вычисления, найдем

$$\mathbf{F}_2^* = \frac{\rho_0 k}{8\pi} \operatorname{Re}\left[\bar{A} \int_{-\pi}^{+\pi} Q^0(k, \theta) e^{-ik\chi_{01}} \mathbf{e}_r d\theta\right] - \frac{1}{2}\rho_0 \operatorname{Re}(\bar{A}\nabla\varphi)_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_1},$$

$$M_{2x}^* = \frac{\rho_0}{16\pi} \operatorname{Re}\left\{i\bar{A} \int_{-\pi}^{+\pi} \left[\frac{\partial Q^0(k, \theta)}{\partial\theta} + ik\frac{\partial\chi_{01}}{\partial\theta} Q^0(k, \theta)\right] e^{-ik\chi_{01}} d\theta\right\} - \quad (122)$$

$$-\frac{1}{2}\rho_0 \operatorname{Re}\left[\bar{A}\left(y\frac{\partial\varphi}{\partial z} - z\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\right]_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_1},$$

$$(\varphi = v_2\varphi_2 + v_3\varphi_3 + v_4\varphi_4 + \psi^{(1)}, \quad \mathbf{r}_1 = \mathbf{i}_2 y_1 + \mathbf{i}_3 z_1).$$

Пусть теперь мы имеем излучение вместе с дифракцией плоских волн. В этом случае средние значения гидродинамических сил, действующих на цилиндрическое тело, зависят от ориентации волнового вектора $\mathbf{k}$ дифрагирующих плоских волн. Если этот вектор перпендикулярен к оси цилиндрического тела ($k_x = 0$), то $\mathbf{F}_1^*$ и M_{1x}^* определяются теми же формулами (120), в которых функция рассеяния $\psi^{(1)}(y, z, k)$ удовлетворяет на контуре C граничному условию

$$\frac{\partial\psi^{(1)}}{\partial n} = -\frac{\partial}{\partial n}(Be^{-i(k_y y + k_z z)}). \quad (123)$$

Вычисление же по формулам (94) приводит к выражениям, аналогичным (102) и (103). Мы получаем

$$\mathbf{F}_2^* = -\frac{1}{2}\rho_0 \operatorname{Re}[i\bar{B}Q^0(k, \theta_0)\mathbf{k}], \quad M_{2x}^* = \frac{1}{4}\rho_0 \operatorname{Re}\left[\bar{B}\frac{\partial Q^0(k, \theta_0)}{\partial\theta_0}\right], \quad (124)$$

где θ_0 — угол между осью y и $\mathbf{k}$.

Если же волновой вектор $\mathbf{k}$ дифрагирующих плоских волн имеет отличную от нуля составляющую k_x по направлению оси цилиндрического тела, то в формулы (93) и (94) следует подставить выражение для $\Phi(x, y, z, t)$ в расчлененном виде:

$$\Phi(x, y, z, t) = \varphi(y, z, k)e^{i\sigma t} + e^{i(\sigma t - k_x x)}\psi^{(1)}(y, z, k_0), \quad (125)$$

где $\varphi(y, z, k)$ соответствует колебаниям контура C, а $\psi^{(1)}(y, z, k_0)$ определяется из уравнений (40) и (41) и граничного условия

$$\frac{\partial\psi^{(1)}}{\partial n} = -\frac{\partial}{\partial n}(Be^{-ik_0(y\cos\theta_0 + z\sin\theta_0)}) \text{ на } C \, (k_0^2 = k^2 - k_x^2). \quad (126)$$

В результате вычислений мы получим

$$\mathbf{F}_1^* = -\frac{\rho_0 k}{16\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} |Q^{(2)}(k, \theta)|^2 \mathbf{e}_r d\theta - \frac{\rho_0 k_0}{16\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} |Q^{(1)}(k_0, \theta)|^2 \mathbf{e}_r d\theta, \quad (127)$$

$$M_{1x}^* = \frac{\rho_0}{16\pi}\operatorname{Re}\left\{i\int_{-\pi}^{+\pi}\left[Q^{(2)}(k, \theta)\overline{\frac{\partial Q^{(2)}(k, \theta)}{\partial\theta}} + Q^{(1)}(k_0, \theta)\frac{\partial Q^{(1)}(k_0, \theta)}{\partial\theta}\right] d\theta\right\}, \quad (128)$$

$$\mathbf{F}_2^* = -\frac{1}{2}\rho_0 \operatorname{Re}[i\bar{B}Q^{(1)}(k_0, \theta_0)\mathbf{k}_0] \quad (\mathbf{k}_0 = k_0(\mathbf{i}_2\cos\theta_0 + \mathbf{i}_3\sin\theta_0)), \quad (129)$$

$$M_{2x}^* = \frac{1}{4}\rho_0 \operatorname{Re}\left[\bar{B}\frac{\partial Q^{(1)}(k_0, \theta_0)}{\partial\theta_0}\right]. \quad (130)$$

Отметим еще, что при деформационных колебаниях цилиндрического тела, определяющих потенциал скоростей в форме (49), средние значения $\mathbf{F}$ и M_x характеризуются выражениями:

$$\mathbf{F}^* = -\frac{\rho_0 k_0}{16\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} |Q^{(2)}(k_0, \theta)|^2 \mathbf{e}_r d\theta,$$

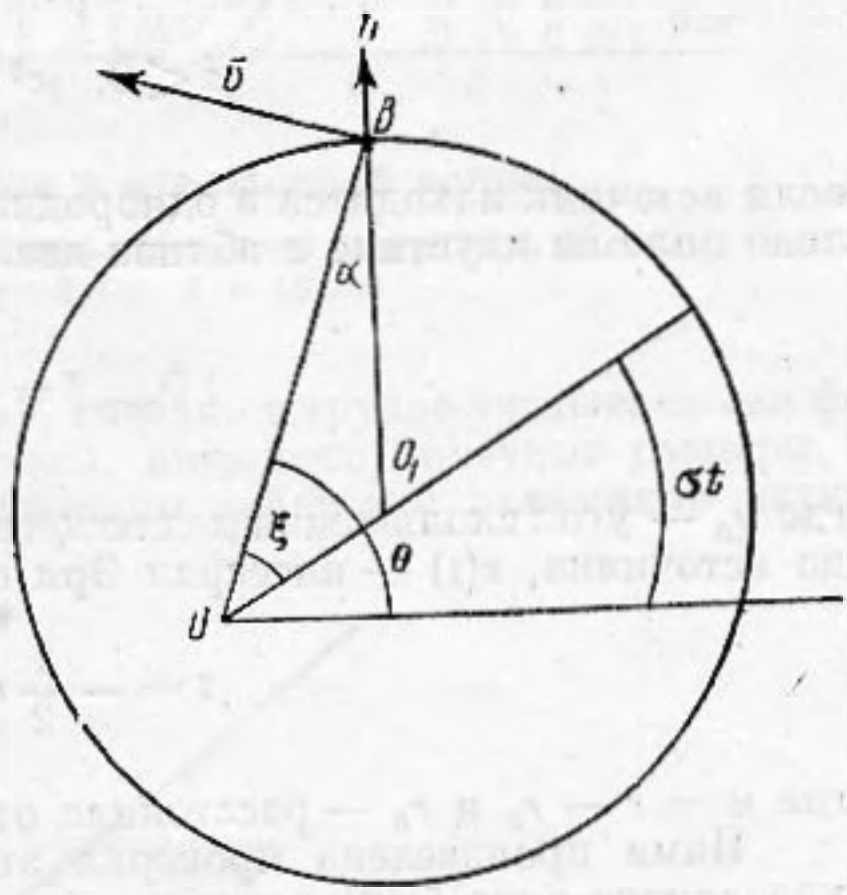
$$M_x^* = \frac{\rho_0}{16\pi}\operatorname{Re}\left[i\int_{-\pi}^{+\pi} Q^{(2)}(k_0, \theta)\overline{\frac{\partial Q^{(2)}(k_0, \theta)}{\partial\theta}}\, d\theta\right], \tag{131}$$

где

$$Q^{(2)}(k_0, \theta) = u_2 Q_2^0(k_0, \theta) + u_3 Q_3^0(k_0, \theta) + u_4 Q_4^0(k_0, \theta). \tag{132}$$

В качестве простейшего применения полученных общих формул рассмотрим эксцентричное вращение кругового цилиндра радиуса a с угловой скоростью σ. Пусть ось вращения и ось цилиндра проходят соответственно через точки o и o_1. Предположим, что эксцентриситет $oo_1 = \delta$ является малой величиной, и поэтому величину скорости точек поверхности цилиндра можно принять равной $v \approx \sigma a$. Очевидно, что нормальная скорость какой-либо точки B поверхности цилилиндра определяется выражением $v_n = \sigma a \sin\alpha$.

Из треугольника oo_1B (фиг. 5) мы имеем $\frac{\sin\alpha}{\sin\xi} = \frac{\delta}{a}$ и поэтому $v_n = \sigma\delta\sin\xi$. В неподвижной системе координат угол ξ выражается через полярный угол θ следующим образом: $\xi = \theta - \sigma t$. Следовательно, для нормальной скорости v_n мы окончательно получаем выражение:



Фиг. 5. Эксцентричное вращение цилиндра

$$v_n = \sigma\delta\sin(\theta - \sigma t) = i\sigma\delta e^{-i\theta}e^{i\sigma t}. \tag{133}$$

Из выражения (133) видно, что рассматриваемое эксцентричное вращение цилиндра эквивалентно двум взаимным перпендикулярным колебаниям с вектором комплексных амплитуд скоростей $\mathbf{U}(0, i\sigma\delta, \sigma\delta)$. Поэтому при помощи (64) находим сразу

$$Q^{(2)}(k_0, \theta) = \mathbf{Q}_1^0(k_0, \theta)\cdot\mathbf{U} = i\sigma\delta\,\frac{4\left(\mu(k_0) - \frac{i}{\sigma}\lambda(k_0)\right)}{\pi\rho_0 a H_1^{(2)}(k_0, a)}\, e^{-i\theta}. \tag{134}$$

Подставив (134) в (131), мы получаем

$$\mathbf{F}^* = 0, \quad M_x^* = -\lambda\sigma\delta^2 \tag{135}$$

где λ — коэффициент демпфирования при колебаниях цилиндра, зависимость которого от $k_0 a$ была представлена на фиг. 2. Отметим, что формулы (135) также справедливы при эксцентричном вращении шара.

Одесский технологический институт
пищевой и холодильной промышленности

Поступила в редакцию
29 декабря 1956 г.