

## РАСПРЕДЕЛЕНИЕ НОРМАЛЬНЫХ МОД КОЛЕБАНИЙ В ПРЯМОУГОЛЬНОМ ПОМЕЩЕНИИ ПО ЧАСТОТНОМУ СПЕКТРУ И ПО НАПРАВЛЕНИЮ

*Ма Да-Ю*

Исследование диаграммы собственных частот прямоугольного помещения показывает, что распределение нормальных мод по направлению отличается от случайного в результате наличия тангенциальных мод и вследствие конечной величины интервалов между собственными частотами. Угловое распределение приближается к случайному при увеличении размеров помещения, при смещении полосы частот спектра сигнала в сторону более высоких частот и при расширении этой полосы. Путем правильного выбора соотношения размеров при заданном объеме помещения можно улучшить распределение нормальных мод по частотному спектру и по направлению. Анализ показывает, что неправильная форма помещения не дает особых преимуществ по сравнению с прямоугольной с точки зрения улучшения углового распределения.

После работ Сэбина [1] и Егера [2], давших первые решения задачи о реверберации в закрытом помещении, условие случайного или диффузного распределения потоков звуковой энергии в помещении постоянно привлекает к себе внимание специалистов, работающих в области архитектурной акустики [3]. Настоящая работа имеет целью подойти к этому вопросу с точки зрения распределения нормальных мод колебаний в прямоугольном помещении по частотному спектру и по направлению; такой подход может способствовать лучшему пониманию вопроса об условиях диффузности звукового поля в помещении.

Ограничиваясь случаем прямоугольного помещения с малым поглощением на граничных поверхностях, мы можем, следуя Рэлею [4], представить потенциал скорости в поле помещения с размерами  $L_x, L_y, L_z$  в виде

$$\Phi = e^{j2\pi ft} \cdot \cos \frac{n_x \pi x}{L_x} \cos \frac{n_y \pi y}{L_y} \cos \frac{n_z \pi z}{L_z}, \quad (1)$$

где  $n_x, n_y, n_z$  — целые положительные числа (включая нуль). При этом

$$\left(\frac{n_x \pi}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{n_y \pi}{L_y}\right)^2 + \left(\frac{n_z \pi}{L_z}\right)^2 = \left(\frac{2\pi f}{c}\right)^2,$$

или

$$f^2 = \left(\frac{n_x c}{2L_x}\right)^2 + \left(\frac{n_y c}{2L_y}\right)^2 + \left(\frac{n_z c}{2L_z}\right)^2, \quad (2)$$

где  $c$  — скорость звука в воздухе. Уравнение (2) определяет нормальную моду колебания с частотой  $f$ ; это стоячая волна, образуемая при суперпозиции 6 бегущих волн с направляющими косинусами

$$\pm \frac{n_x c}{2L_x f}, \quad \pm \frac{n_y c}{2L_y f}, \quad \pm \frac{n_z c}{2L_z f}.$$

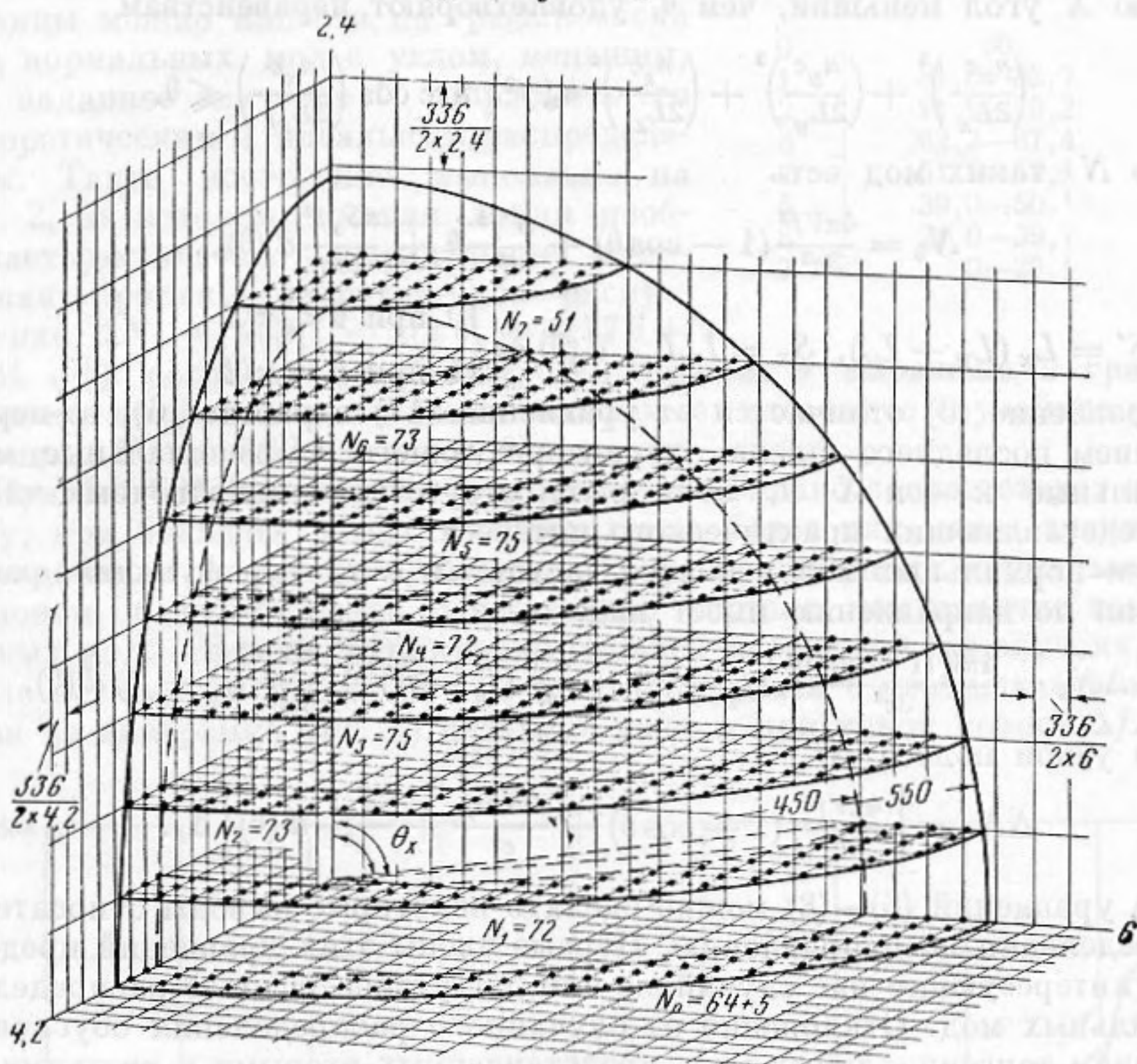
Отсюда видно, что каждой из собственных частот соответствует вектор

с компонентами

$$\frac{n_x c}{2L_x}, \quad \frac{n_y c}{2L_y}, \quad \frac{n_z c}{2L_z},$$

представляющими координаты изображающей точки в частотном пространстве (фиг. 1) [5]. Из диаграммы видно, что изображающие точки образуют в первом октанте частотного пространства прямоугольную решетку, причем каждая точка занимает в этом пространстве объем

$$\frac{c}{2L_x} \cdot \frac{c}{2L_y} \cdot \frac{c}{2L_z} = \frac{c^3}{8V},$$



Фиг. 1

где  $V = L_x L_y L_z$  — объем помещения. Исходя из такого представления, автор [6] показал, что число  $N(f)$  нормальных мод с частотами, меньшими, чем заданное значение  $f$ , есть

$$N(f) = \frac{4\pi V}{3c^3} f^3 + \frac{\pi S}{4c^2} f^2 = \frac{4\pi V f^3}{3c^3} \left( 1 + \frac{3Sc}{16Vf} \right), \quad (3)$$

где  $S = 2(L_y L_z + L_z L_x + L_x L_y)$  есть общая поверхность, ограничивающая помещение. Число  $\Delta N$  нормальных мод в полосе  $\Delta f = f_2 - f_1$  равно

$$\Delta N = \frac{4\pi V}{3c^3} (f_2^3 - f_1^3) + \frac{\pi S}{4c^2} (f_2^2 - f_1^2), \quad (4)$$

$$\cong \frac{4\pi V}{c^3} f^2 \left( 1 + \frac{Sc}{8Vf} \right) \Delta f. \quad (5)$$

Приближенная формула (5), где  $f$  есть средняя частота полосы  $\Delta f$ , пригодна, если  $\Delta f$  невелика. Автор [6] предположил, что эти результаты справедливы и для помещений иной (непрямоугольной) формы;

Рой [7] подтвердил это предположение для некоторых простых форм (призма, цилиндр, полуцилиндр, сфера, полусфера) и пришел к заключению, что формула (5) справедлива для помещений любой формы.

### Распределение по направлению (Статистическая теория)

Изложенный выше метод исследования нормальных мод можно использовать и для расчета их распределения по направлению. Нормальные моды с частотами ниже  $f$ , для которых изображающий вектор образует с осью  $X$  угол меньший, чем  $\theta$ , удовлетворяют неравенствам

$$\left(\frac{n_x c}{2L_x}\right)^2 + \left(\frac{n_y c}{2L_y}\right)^2 + \left(\frac{n_z c}{2L_z}\right)^2 \leq f^2, \quad \arccos \left(\frac{n_x c}{2L_x f}\right) \leq \theta.$$

Число  $N_\theta$  таких мод есть

$$N_\theta = \frac{4\pi V f^3}{3c^3} (1 - \cos \theta) + \frac{S' f^2}{c^2} \theta + \frac{\pi S_x f^2}{2c^2} d(\theta), \quad (6)$$

где  $S' = L_x(L_y + L_z)$ ,  $S_x = L_y L_z$ ,  $d(\theta) = \begin{cases} 0 & \text{при } \theta < \pi/2 \\ 1 & \text{при } \theta = \pi/2 \end{cases}$

Уравнение (6) отличается от уравнения (17) в работе [6], во-первых, наличием последнего члена, характеризующего тангенциальные моды, нормальные к оси  $X$ , и, во-вторых, отсутствием поправочных членов, не представляющих практического интереса.

Для нормальных мод в полосе частот  $\Delta f = f_2 - f_1$  функция распределения по направлению имеет вид:

$$\Delta N_\theta = \frac{4\pi V (1 - \cos \theta)}{3c^3} (f_2^3 - f_1^3) + \frac{S' \theta}{c^2} (f_2^2 - f_1^2) + \frac{\pi S_x}{2c^2} (f_2^2 - f_1^2) d(\theta), \quad (7)$$

или в узкой полосе  $\Delta f$

$$\Delta N_\theta = \left[ \frac{4\pi V f^2}{c^3} (1 - \cos \theta) + \frac{2S' \theta f}{c^2} + \frac{\pi S_x f}{c^2} d(\theta) \right] \Delta f. \quad (8)$$

Из уравнений (6)–(8) можно сделать некоторые выводы относительно распределения по направлению. Первые члены этих уравнений представляют интересующее нас случайное или диффузное угловое распределение нормальных мод. Отклонение от случайного распределения обусловлено наличием тангенциальных мод, представленных вторыми и третьими членами. О смысле третьего члена уже было сказано выше; что же касается вторых членов, то они представляют тангенциальные моды, нормальные к осям  $Y$  и  $Z$ , случайно распределенные только в соответствующих плоскостях, но не в пространстве.

Перепишав уравнение (8) в виде

$$\Delta N_\theta = \frac{4\pi V f^2 \Delta f}{c^3} \left[ (1 - \cos \theta) + \frac{\theta}{2\pi} \left( \frac{\lambda}{L_y} + \frac{\lambda}{L_x} \right) + \frac{d(\theta)}{4} \frac{\lambda}{L_x} \right], \quad (9)$$

где  $\lambda = c/f$  — длина волны на средней частоте полосы  $\Delta f$ , мы видим, что вторым и третьим членами можно пренебрегать, если длина волны мала сравнительно с размерами помещения, т. е. если частоты достаточно велики по сравнению с наименьшими из собственных частот. Тогда распределение становится случайным.

### Фактическое распределение

Дальнейшее отклонение от случайного распределения, помимо только что отмеченного, связано с конечными размерами решетки в частотном пространстве и конечным числом нормальных мод. Для разъяснения существа дела достаточно рассмотреть практический пример.

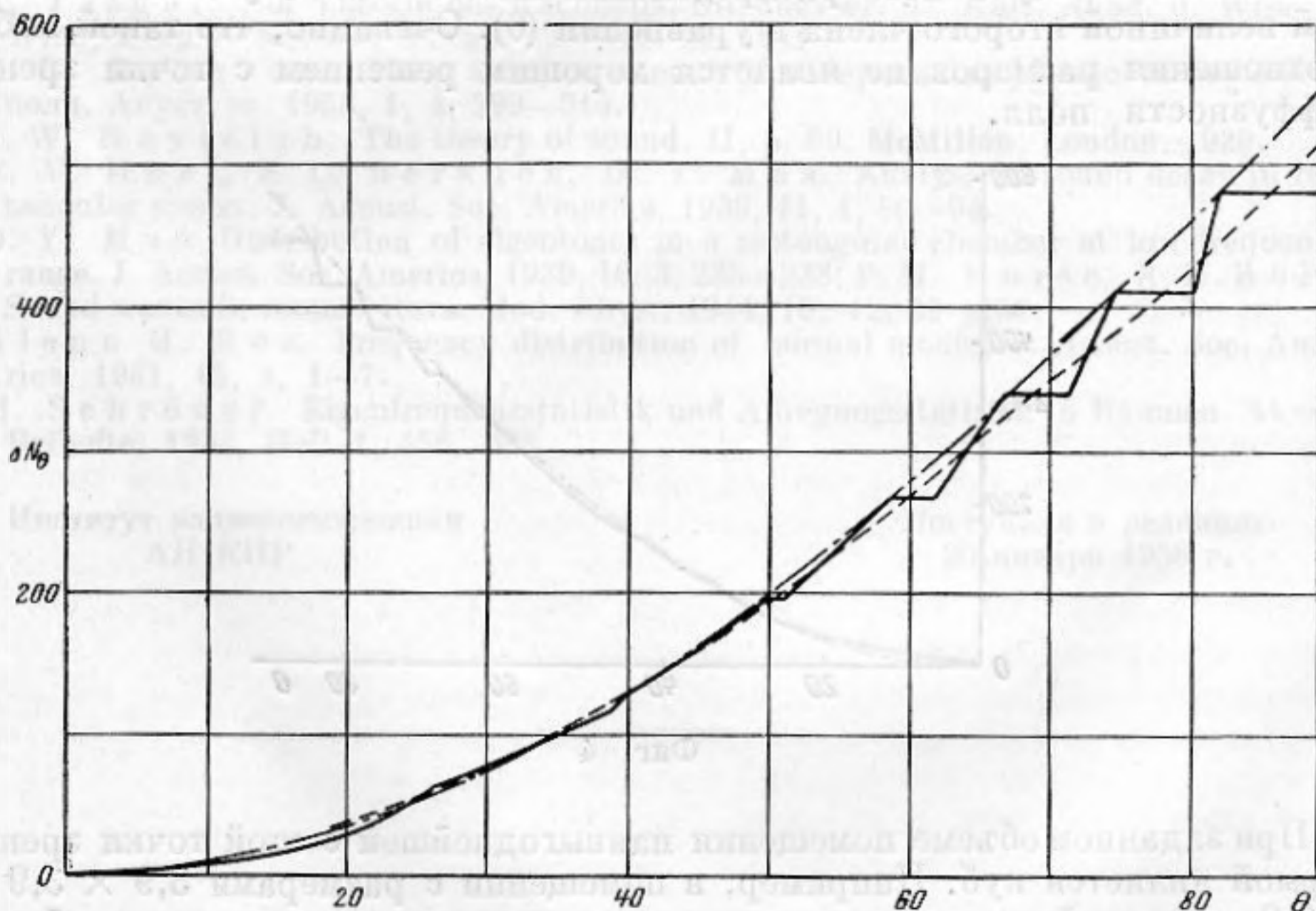
Диаграмма фиг. 1 относится к реверберационной камере с размерами  $2,4 \times 4,2 \times 6$  м. В полосе частот от 450 до 550 гц ( $500 \pm 10\%$ ) мы имеем 560 нормальных мод, для которых изображающие точки располагаются в 8 плоскостях. Угловое распределение нормальных мод в зависимости от значения  $n_x$  представлено в таблице:

Из таблицы видно, что при больших углах  $\theta$  в распределении остаются пустые интервалы (например, от  $82,7$  до  $90^\circ$ , от  $75,2$  до  $81^\circ$  и т. д.), напоминающие запретные зоны квантовой физики. По данным таблицы можно нанести на график числа  $\Delta N_\theta$  нормальных мод с углом, меньшим, чем заданное значение  $\theta$ , и сравнить его с теоретическим и идеальным распределением. Такое построение выполнено на фиг. 2, на котором ломаная линия изображает фактическое распределение, пунктирная кривая — теоретическое распределение  $\Delta N_\theta = 4q_3(1 - \cos \theta) + 0,37\theta + 34 d(\theta)$  согласно уравнению (7), причем  $\theta$  выражено в градусах; наконец, штрихованная кривая изображает идеальное случайное распределение  $\Delta N_\theta = 560 (1 - \cos \theta)$ .

Т а б л и ц а

$n_x$	$\theta^\circ$	$\Delta N_\theta$
0	90	69
1	81,0—82,7	72
2	71,9—75,2	73
3	62,2—67,4	75
4	51,5—59,1	72
5	39,0—50,1	75
6	21,0—39,7	73
7	0—26,1	51

При  $\theta < 60^\circ$  фактическое распределение близко соответствует идеальному; при бóльших углах распределение более или менее значительно отличается от идеального, причем эффект группировки нормальных мод по зонам оказывает более существенное влияние, чем наличие тангенциальных мод. Эффект группировки сильнее выражен в тех случаях, когда число возможных значений  $n_x$  (число плоскостей с изображающими точками на диаграмме фиг. 1) невелико даже и при узкой полосе  $\Delta f$ .



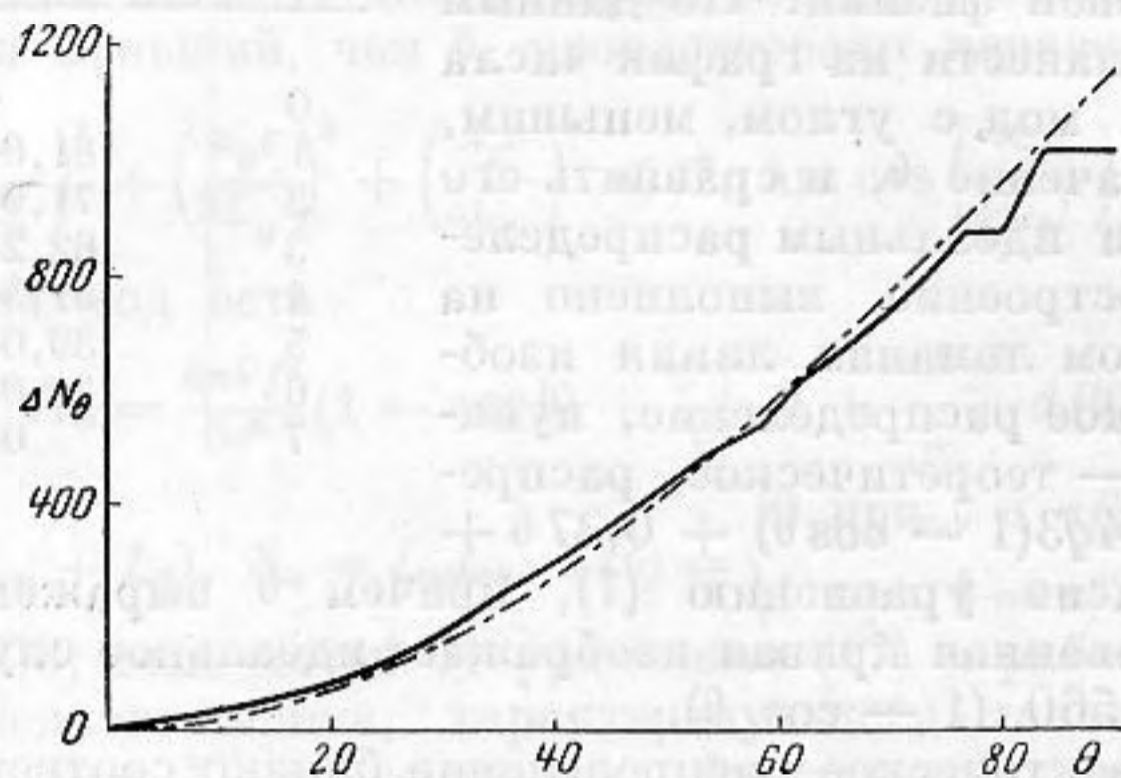
Фиг. 2

Чтобы получить соответствие между фактическим и идеальным распределением до бóльших значений  $\theta$  (скажем, до  $75^\circ$ ), нужно или сужать интервал между группами мод путем расширения полосы частот, или уве-

личивать число групп путем смещения полосы в сторону более высоких частот (относительно низших нормальных мод).

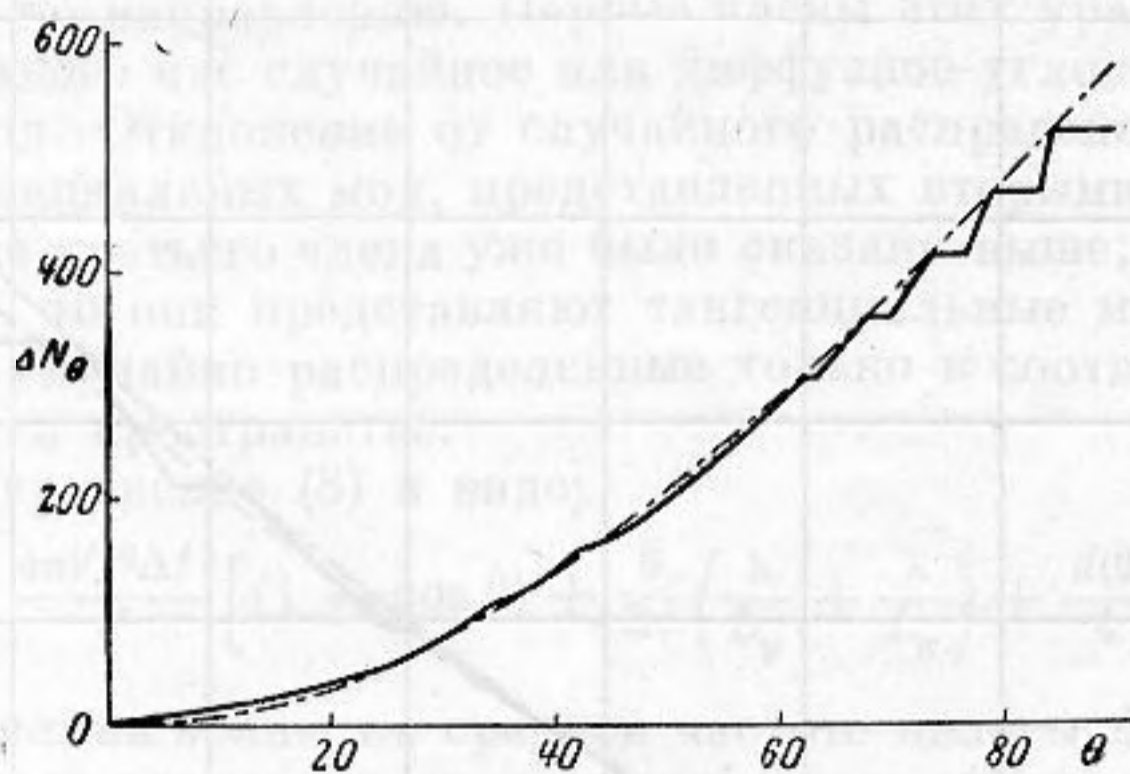
Результат расширения полосы (от  $\pm 10$  до  $\pm 20\%$ ) виден из кривых фиг. 3. Распределение, значительно отличающееся от случайного, наблюдается теперь лишь при  $\theta > 75^\circ$ .

Эффект смещения полосы  $\Delta f$  в сторону более высоких частот (относительно наименьших из собственных частот помещения) может быть достигнут и путем увеличения размеров помещения. В этом можно убедиться из рассмотрения диаграммы фиг. 1, сравнивая число плоскостей



Фиг. 3

(20) с изображающими точками, перпендикулярных к оси, соответствующей наибольшему размеру помещения (6 м), с числом таких плоскостей, перпендикулярных к двум другим осям (8 и 13, соответственно). Однако при увеличении только одного из трех основных размеров, значительное отклонение от случайного распределения может быть обусловлено большой величиной второго члена в уравнении (6). Очевидно, что такой выбор соотношения размеров не является хорошим решением с точки зрения диффузности поля.



Фиг. 4

При заданном объеме помещения наиболее выгоднейшей с этой точки зрения формой является куб. Например, в помещении с размерами  $3,9 \times 3,9 \times 3,9$  м случайное распределение для высших частотных полос обеспечивается вплоть до угла  $\theta = 75^\circ$ . Однако в кубическом помещении наблюдается вырождение спектра нормальных мод, хотя и устраняющееся в области высоких частот при небольших нарушениях равенства основных размеров [8]. Однако в области низших частот вырождение спектра не устраняется. Поэтому целесообразно выбирать размеры таким об-

разом, чтобы, сохраняя преимущество, связанное с близостью основных размеров, обеспечить и случайное распределение нормальных мод по спектру в области низких частот. Расчет показывает, что удовлетворительные результаты получаются при соотношениях, лежащих в пределах от  $1/1,3 : 1/1,15 : 1$  до  $1/1,5 : 1/1,25 : 1$ .

На фиг. 4 показано угловое распределение нормальных мод в полосе 450—550 *гц* в помещении с размерами  $3,3 \times 3,9 \times 4,65$  ( $1/1,4 : 1/1,2 : 1$ ) относительно оси, соответствующей наименьшему размеру (3,3 м). Соотношение размеров обеспечивает желаемое распределение нормальных мод в нижней части частотного спектра. Вместе с тем сравнение кривых фиг. 4 и 2 показывает, что угловое распределение значительно улучшилось при том же объеме помещения.

Изложенные выше соображения показывают, что в помещениях прямоугольной формы отклонения фактического углового распределения нормальных мод от чисто случайного обусловлено:

а) наличием тангенциальных мод, количество которых зависит от общей поверхности помещения;

б) конечным числом собственных частот, причем влияние этого фактора зависит от соотношения между размерами помещения и длиной волны.

Эти факторы остаются в силе и в случае непрямоугольных помещений, оказывая аналогичное влияние на распределение нормальных мод по направлению; однако анализ становится в этом случае затруднительным, иногда даже невозможным. Можно все же полагать, что для обеспечения диффузности поля в камерах для акустических измерений неправильная форма не дает особых преимуществ по сравнению с прямоугольной.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. W. C. Sabine. Collected papers on acoustics. Cambridge, Harvard Univ. Press, 1923, 5, 3, 283.
2. A. Jaeger. Zur Theorie des Nachhalls. Sitzungsber. d. Kais. Akad. d. Wiss. in Wien, Math.—Naturw. Klasse, 120 Abt. 2a, 1911.
3. В. В. Фурдусов. Обзор методов оценки и измерения диффузности звукового поля. Акуст. ж. 1955, 1, 4, 299—314.
4. J. W. Rayleigh. The theory of sound. II, p. 69, McMillan, London, 1929.
5. F. V. Hunt, L. L. Beranek, D. Y. Maa. Analysis of sound decay in rectangular rooms. J. Acoust. Soc. America, 1939, 11, 1, 80—94.
6. D. Y. Maa. Distribution of eigentones in a rectangular chamber at low frequency range. J. Acoust. Soc. America, 1939, 10, 3, 235—238; P. M. Morse, R. H. Bolt. Sound waves in rooms. Revs. Mod. Phys., 1944, 16, 12, 69—150.
7. Glenn M. Roe. Frequency distribution of normal modes. J. Acoust. Soc. America, 1941, 13, 1, 1—7.
8. M. Schröder. Eigenfrequenzstatistik und Anregungsstatistik in Räumen. Akust. Beihefte, 1954, Heft 1, 456—468.

Институт радиоэлектроники  
АН КНР

Поступила в редакцию  
20 января 1958 г.