АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том IV 1958 Вып. 3

ИЗМЕНЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ МЕМБРАН И РЕЗОНАТОРОВ ПРИ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ НАГРУЗКАХ

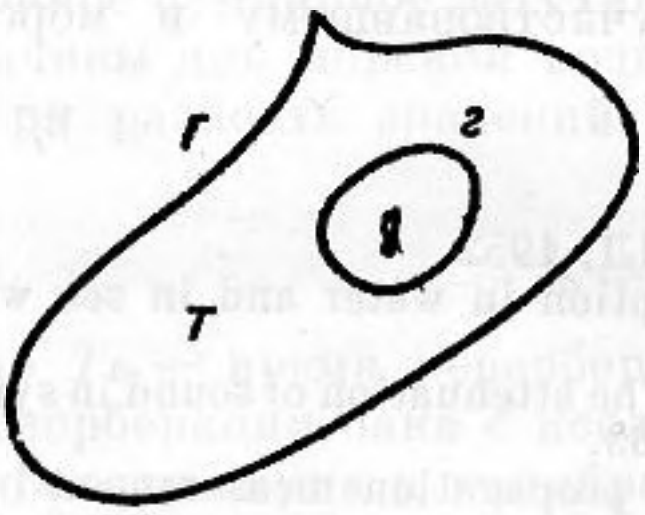
Ю. Н. Днестровский

Методом последовательных приближений рассматривается задача об изменении собственных частот мембран и резонаторов при дополнительных нагрузках. Исследуется зависимость собственных значений от величины нагрузки и области ее распределения. Показано, что даже малые нагрузки при распределении по областям малой емкости сильно возмущают систему, сдвигая спектр влево на один номер. При очень больших нагрузках спектр также сдвигается влево на один номер. Для малых нагрузок уточняется формула Рэлея, полученная методом возмущений. Рассмотрено также поведение вырожденных собственных значений.

Вопрос о влиянии нагрузок на колебание мембран и резонаторов рассматривался еще Рэлеем [1]. Им были доказаны качественные теоремы о направлении изменения собственных частот ω при увеличении, или уменьшении плотности системы, введено предположение о возможности сосредоточенных нагрузок, наконец, при помощи теории возмущений для изменения собственного значения $\Delta\lambda$ под влиянием малой сосредоточенной нагрузки m получена формула

$$\Delta\lambda \sim -\lambda\varkappa^2 \frac{m}{M}, \tag{1}$$

где $\varkappa$ — значение исходной собственной функции в месте нагрузки, M — масса колеблющейся системы, $\lambda = \omega^2$.



Фиг. 1

Курантом и Гильбертом [2] была далее показана непрерывная зависимость собственных значений от плотности ρ мембраны или резонатора. Однако введение сосредоточенной нагрузки предполагает сингулярный характер изменения функции ρ и, тем самым, выводит за рамки теорем Куранта и Гильберта. В последнее время в работе [3] результат Рэлея оспаривался ссылкой на то, что для круглой мембраны при малых круглых областях нагрузки существуют собственные значения, несколько большие собственных значений ненагруженной системы. Аналогичным вопросам посвящены также работы [4, 5].

В настоящей работе исследуется вопрос о том, как изменяются собственные частоты мембраны (или объемного резонатора) T с границей Γ, если ее нагрузить дополнительной массой m, распределенной по области g с границей γ (фиг. 1). При этом оказывается, что существенной величиной, характеризующей размеры области g, является не ее площадь и не максимальный диаметр, а так называемая «емкость» $C(g, \Gamma)$ области g относительно границы Γ, совпадающая с электростатической емкостью проводника той же формы. В качестве примера укажем, что для малого круга радиуса r: $C(g, \Gamma) \sim 1/\ln^1/r$, для малого шарика радиуса R в пространстве $C(g, \Gamma) \sim R$.

Областями нулевой емкости на плоскости являются отдельные точки, а в пространстве — линии и точки. В настоящей работе показано, что

нагрузить мембрану по области нулевой емкости («сосредоточенно») невозможно. Даже небольшая нагрузка, распределенная по области малой емкости, весьма сильно возмущает систему (в частности, формула Рэлея (1) справедлива, когда не только $\alpha = \frac{m}{M} \ll 1$, но и $\beta = \frac{\lambda m}{4\pi C(g, \Gamma)} \ll 1$). Если величину нагрузки m зафиксировать, а область g уменьшать так, чтобы ее емкость стремилась к нулю (т. е. $\beta \to \infty$), то при этом все собственные частоты мембраны будут сдвигаться влево на один номер. Если, наоборот, зафиксировать область нагрузки g, а величину нагрузки m неограниченно увеличивать, то весь спектр собственных частот также сдвигается влево на один номер с небольшими поправками, зависящими от $C(g, \Gamma)$. Частный случай последней задачи (круглая мембрана) рассматривался в работе Витта и Шубина [6].

Большая часть результатов настоящей работы (оценки сверху) могла быть получена обычным вариационным методом, однако применение метода последовательных приближений позволяет проводить все доказательства более естественно (см. также [7—9]) *.

Постановка задачи и метод

Пусть для некоторой замкнутой области T с границей Γ (объемного резонатора или двухмерной мембраны) известны собственные значения λ_k и собственные функции u_k исходной задачи (I): $\Delta u + \lambda \rho u = 0$ в T, $u = 0$ на Γ, при условии нормировки $\int\limits_T \rho u^2 d\tau = M$, где плотность системы ρ — положительная, кусочно-непрерывная функция в области T, $M = \int\limits_T \rho d\tau$ — масса системы. Предположим далее, что плотность ρ изменилась в некоторой области $g \subset T$ с границей γ (фиг. 1). Область $T - g$ обозначим через τ: $\rho \to \bar{\rho} = \begin{Bmatrix} \bar{\rho} \text{ в } g \\ \rho \text{ в } \tau \end{Bmatrix} > 0$. Интеграл $\int\limits_g \delta\rho d\tau = m$ (где $\delta\rho = \bar{\rho} - \rho$) естественно назвать нагрузкой, положительной или отрицательной, а область g — областью нагрузки. Емкостью области g относительно границы Γ мы будем называть величину

$$C(g, \Gamma) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_\gamma \frac{\partial S^0}{\partial n} d\sigma,$$

где S^0 — гармоническая в области τ функция ($\Delta S = 0$), равная 0 на Γ и 1 на γ. Требуется найти собственные значения $\lambda^{(j)}$ и собственные функции $u^{(j)}$ основной задачи (II): $\Delta u + \lambda \bar{\rho} u = 0$ в T, $u = 0$ на Γ при условии нормировки $\int\limits_T \bar{\rho} u^2 d\tau = M$. Для областей T, допускающих существование функции Грина задачи Дирихле $K(M, M')$ основная задача (II) сводится к решению интегрального уравнения

$$u = \lambda \int\limits_T K \bar{\rho} u \, d\tau, \tag{2}$$

ядро которого непрерывно в среднем, интегрируемо в квадрате и легко симметризуется. Из общих теорем [11] следует сходимость процесса

---

* Уже после передачи настоящей статьи в редакцию в печати появилась работа [10], в которой для частного случая нагрузок по малым круговым областям доказывается ряд утверждений, сходных с некоторыми результатами настоящей работы.

последовательных приближений для уравнения (2), а следовательно, и для основной задачи (II). Последовательность функций

$$F_n = \int_T K \bar{\rho} F_{n-1} d\tau \tag{3}$$

равномерно сходится к собственным функциям задачи (II), причем для первого собственного значения функция F_0 произвольна, а для последующих F_0 должна быть ортогональна к предыдущим собственным функциям. В силу (3), F_n удовлетворяют краевым задачам

$$\Delta F_n = -\bar{\rho} F_{n-1} \text{ в } T, \; F_n = 0 \text{ на } \Gamma. \tag{4}$$

По функциям F_n определяются коэффициенты a_n и μ_n:

$$a_n = \int_T \bar{\rho} F_{n-i} F_i \, d\tau, \quad \mu_n = \frac{a_{n-1}}{a_n}, \tag{5}$$

для которых справедливы неравенства [11]:

$$\mu_{n+1} - \frac{\mu_n - \mu_{n+1}}{\dfrac{\lambda^{(j+1)}}{\mu_{n+1}} - 1} \leqslant \lambda^{(j)} \leqslant \mu_{n+1}. \tag{6}$$

Остановимся подробнее на случае первого собственного значения. Вследствие непрерывной зависимости собственных функций от коэффициентов уравнения, естественно искать функции F_n в виде суммы решения исходной задачи (I) и поправочных функций f_n, определяемых из метода последовательных приближений:

$$F_n = c_n u_1 + f_n. \tag{7}$$

Из (4) следует, что $\Delta f_n = -(c_{n-1}\bar{\rho} - c_n \lambda_1 \rho) u_1 - \bar{\rho} f_{n-1}$. Положим, что $c_{n-1} = c_n \lambda_1$, $c_1 = 1$, $f_1 \equiv 0$ в T; тогда функции f_n удовлетворяют краевым задачам $\Delta f_n = -\delta\rho \dfrac{u_1}{\lambda_1^{n-1}} - \bar{\rho} f_{n-1}$ в T, $f_n = 0$ на Γ и, в частности,

$$\Delta f_2 = -\delta\rho u_1 \text{ в } T, \; f_2 = 0 \text{ на } \Gamma. \tag{8}$$

Из (7) и (8) следует, что $F_0 = \lambda_1 \dfrac{\rho}{\bar{\rho}} u_1$, $F_1 = u_1$, $F_2 = \dfrac{u_1}{\lambda_1} + f_2$. По формулам (5) для величин μ_n мы получим выражения:

$$\mu_1 = \frac{a_0}{a_1} = \lambda_1 \left(1 - \int_g \left(1 - \frac{\rho}{\bar{\rho}}\right) \rho u_1^2 \, d\tau\right), \quad \mu_2 = \lambda_1 \frac{1}{1 - I_1(g)},$$
$$\mu_3 = \lambda_1 \frac{1 + I_1(g)}{1 + 2I_1(g) + I_2(g)}, \quad \mu_4 = \lambda_1 \frac{1 + 2I_1(g) + I_2(g)}{1 + 3I_1(g) + 2I_2(g) + I_3}, \tag{9}$$

где

$$\alpha = m / M, \quad I_1(g) = \alpha \varkappa_1^2, \quad \varkappa_1^2 = \frac{1}{m} \int_g \delta\rho u_1^2 \, d\tau;$$
$$I_2(g) = \frac{\lambda_1}{M} \int_g \delta\rho u_1 f_2 \, d\tau; \quad I_3 = \frac{\lambda_1^2}{M} \int_T \bar{\rho} f_2^2 d\tau. \tag{10}$$

Используя теперь (6), можно получить двухсторонние оценки для исследуемого собственного значения.

Зависимость собственных значений от области нагрузки

Остановимся сначала на возможности существования сосредоточенных нагрузок. Пусть g_i есть последовательность вложенных друг в друга достаточно гладких областей с границами ε_i, сходящаяся к области нагрузки g. Мы будем называть нагрузку сосредоточенной, если область g имеет емкость $C(g, \Gamma)$ равную нулю, т. е. если

$$\lim_{i\to\infty} \int_{\varepsilon_i} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma = \lambda m u(P), \tag{11}$$

причем

$$C(g, \Gamma) = \lim_{i\to\infty} \frac{1}{4\pi} \int_{\varepsilon_i} \frac{\partial S_i^0}{\partial n} d\sigma = 0, \tag{12}$$

где u — решение задачи (II), $P \in g$, а функция S_i^0 удовлетворяет задаче

$$\Delta S_i^0 = 0 \text{ в } \tau_i = T - g_i, \; S_i^0 = 1 \text{ на } \varepsilon_i, \; S_i^0 = 0 \text{ на } \Gamma. \tag{13}$$

Положение точки P в g определяется распределением нагрузки m по области g.

Теорема 1. Для сосредоточенных нагрузок не существует решений задачи (II). В самом деле, пусть решение задачи (II) существует; покажем, что оно тождественно равно нулю. Применяя вторую формулу Грина для функций u и S_i^0 в области τ_i, мы имеем

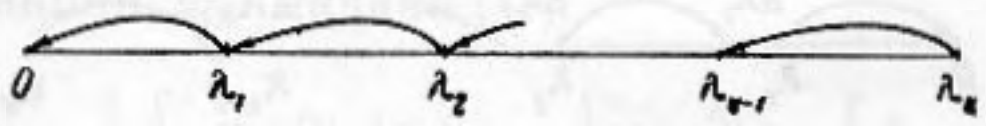
$$\int_{\varepsilon_i} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma = \int_{\varepsilon_i} u \frac{\partial S_i^0}{\partial n} d\sigma + \lambda \int_{\tau_i} \rho S_i^0 u d\tau. \tag{14}$$

В силу ограниченности u, равенства (12) и того, что $\lim\limits_{i\to\infty} S_i^0 = 0$ вне g, предел правой части (14) равен нулю. Отсюда и из (11) вытекает, что

$$\lambda m u(P) = 0 \quad P \in g, \tag{15}$$

т. е. либо $\lambda = 0$, откуда $u \equiv 0$ в T, либо $u(P) = 0$ и тогда $u \equiv 0$ в T в силу теоремы 2 работы [12] о невозможности закрепления по множеству емкости нуль.

Теорема 2. При нагрузке по уменьшающейся области g, стягивающейся к множеству E нулевой емкости C, весь спектр сдвигается влево



Фиг. 2. Движение собственных значений при уменьшении области нагрузки ($\beta \to \infty$)

на один номер, точнее:

$$\lim_{C\to 0} \lambda^{(1)} = 0, \tag{16}$$

$$\lim_{C\to 0} \lambda^{(2)} \leqslant \lambda_1, \tag{17}$$

$$\cdots\cdots$$

$$\lim_{C\to 0} \lambda^{(k)} \leqslant \lambda_{k-1} \tag{18}$$

(см. фиг. 2).

Отметим, что парадокс, указанный в работе [3], вытекает из (16)—(18).

Остановимся на доказательстве утверждения (16). Справедливость (17) и (18) для высших собственных значений будет показана ниже. Обратимся к выражениям (9) и покажем, что если $\lim C(g, \Gamma) = 0$, то $\lim\limits_{C\to 0} \mu_3(g) = 0$, а следовательно, и $\lim\limits_{C\to 0} \lambda^{(1)} = 0$, так как $0 \leqslant \lambda^{(1)} \leqslant \mu_3(g)$.

Очевидно, что величина $I_1(g)$ ограничена. Для оценки интеграла $I_2(g)$ введем вспомогательную функцию $S = AS^0$, причем коэффициент A определим из условия

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{\partial S}{\partial n}\, d\sigma = \int\limits_{\Gamma} \frac{\partial f_2}{\partial n}\, d\sigma. \tag{19}$$

Нетрудно показать, что

$$\delta I_2 = I_2(g) - \bar{I}_2(g) \geqslant 0, \tag{20}$$

где

$$\bar{I}_2 \equiv \frac{\lambda_1}{M} \int\limits_{\tau} (\nabla S)^2\, d\tau = \alpha\beta\bar{\varkappa}_1^2; \quad \beta = \frac{\lambda_1 m}{4\pi C}; \quad \bar{\varkappa}_1 = \int\limits_{g} \delta\rho u_1 d\tau. \tag{21}$$

Обратимся теперь к выражению (9) и воспользуемся (20) и (21):

$$\mu_3(g) \leqslant \lambda_1 \frac{1 + I_1}{1 + 2I_1 + \bar{I}_2}. \tag{22}$$

Но I_2 неограниченно возрастает при $C(g, \Gamma) \to 0$, откуда следует, что $\lim\limits_{C\to 0} \mu_3(g) = 0$ и утверждение (16) доказано.

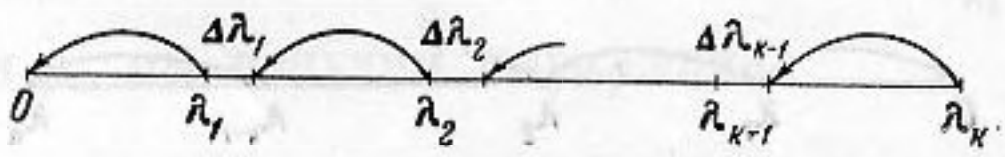
Подставив (10) и (21) в (22), получим первые члены разложения $\lambda^{(1)}$ по параметру β при $\beta \gg 1$ и $\alpha\beta \gg 1$:

$$0 \leqslant \lambda^{(1)} \leqslant \lambda_1 \frac{1 + \alpha\bar{\bar{\varkappa}}_1^2}{1 + 2\alpha\varkappa_1^2 + \alpha\beta\bar{\varkappa}_1^2} = \lambda_1 \frac{1}{\alpha\beta\bar{\varkappa}_1^2}(1 + \alpha\bar{\bar{\varkappa}}_1^2)\left[1 - \frac{1 + 2\alpha\bar{\bar{\varkappa}}_1^2}{\alpha\beta\bar{\varkappa}_1^2} + \ldots\right]. \tag{23}$$

Зависимость собственных значений от величины нагрузки

а) Большие нагрузки ($\alpha \gg 1$, $\beta \gg 1$). Поведение собственных значений при больших нагрузках выясняет следующая теорема:

Теорема 3. Для фиксированной области нагрузки малой емкости $C(g, \Gamma)$ при нагрузках $m \to \infty$ (т. е. при $\alpha \to \infty$, $\beta \to \infty$, $\frac{\alpha}{\beta_k} = \frac{4\pi C}{\lambda_k M} \ll 1$)



Фиг. 3. Движение собственных значений при увеличении величины нагрузки ($\alpha \to \infty$, $\beta \to \infty$)

весь спектр сдвигается влево на один номер с небольшими поправками (фиг. 3), точнее

$$\lim_{m\to\infty} \lambda^{(1)} = 0, \tag{24}$$

$$\lim_{m\to\infty} \lambda^{(2)} \leqslant \lambda_1\left(1 + \frac{\alpha}{\beta_1}\frac{\bar{\bar{\varkappa}}_1^4}{\bar{\varkappa}_1^2}\right) = \lambda_1 + \frac{4\pi C(g, \Gamma)}{M}\frac{\bar{\bar{\varkappa}}_1^4}{\bar{\varkappa}_1^2}, \tag{25}$$

$$\lim_{m\to\infty} \lambda^{(k)} \leqslant \lambda_{k-1}\left(1 + \frac{\alpha}{\beta_{k-1}}\frac{\bar{\bar{\varkappa}}_{k-1}^4}{\bar{\varkappa}_{k-1}^2}\right) = \lambda_{k-1} + \frac{4\pi C(g, \Gamma)}{M}\frac{\bar{\bar{\varkappa}}_{k-1}^2}{\bar{\varkappa}_{k-1}^2}. \tag{26}$$

Отметим, что предельные поправки $\Delta\lambda_k$ совпадают с изменением собственных значений λ_k при закреплении системы по области g [12]. Для доказательства (24) достаточно воспользоваться выражениями (21) и (22) предыдущего раздела. В самом деле, из (21) вытекает, что $\lim\limits_{m\to\infty}\lambda^{(1)} \leqslant \leqslant \lim\limits_{m\to\infty}\mu_3(g) \leqslant \lim\limits_{m\to\infty}\lambda_1\dfrac{1+I_1}{1+2I_1+\bar{I}_2} = \lim\limits_{m\to\infty}\dfrac{0(\alpha)}{0(\alpha^2)} = 0$ и утверждение (24) доказано. Доказательство (25) и (26) будет проведено ниже. Подставив (21) в выражение для μ_3, получим первые члены разложения для $\lambda^{(1)}$ при больших нагрузках ($\alpha \gg 1$, $\beta \gg 1$):

$$\lambda^{(1)} \leqslant \mu_3 \leqslant \lambda_1 \frac{1}{\beta_1}\left(\frac{\bar{\bar{\varkappa}}_1}{\bar{\varkappa}_1}\right)^2\left(1+\frac{1}{\alpha\bar{\bar{\varkappa}}_1^2}-\frac{2}{\beta_1}\left(\frac{\bar{\bar{\varkappa}}_1}{\bar{\varkappa}_1}\right)^2+\ldots\right). \tag{27}$$

б) Малые нагрузки ($\alpha \ll 1$, $\beta \ll 1$). Верхнюю границу для собственного значения $\lambda^{(1)}$ легко получить при малых нагрузках, разлагая левую часть формулы (22) по малым параметрам α и β:

$$\lambda^{(1)} \leqslant \mu_3 \leqslant \lambda_1(1-\alpha\bar{\bar{\varkappa}}_1^2-\alpha\beta\bar{\varkappa}_1^2+0(\alpha^2)). \tag{28}$$

Полученное выражение уточняет формулу Рэлея (1). При помощи (6) можно попытаться оценить нижнюю границу для $\lambda^{(1)}$. Для двухмерного случая неравенство (28) обращается в равенство. Для большего числа измерений нам этого показать не удалось.

Поведение высших собственных значений при нагрузках

а) Невырожденные собственные значения. Доказательство справедливости формулы (28) для высших собственных значений с заменой λ_1 и u_1 на λ_k и u_k проводится несложно [7], и мы его опускаем. Остановимся на доказательстве (17) и (25) для второго собственного значения. По аналогии с (7) и (8) функции $F_n^{(2)}$ метода последовательных приближений ищутся в виде суммы:

$$F_n^{(2)} = \frac{u_1}{\lambda_1^{n-1}} + f_n^{(2)} + d\frac{u^{(1)}}{[\lambda^{(1)}]^{n-1}}, \tag{29}$$

причем коэффициент d определяется из условия ортогональности $F_n^{(2)}$ к собственной функции $u^{(1)}$ задачи (II):

$$d = -\frac{1}{M}\int\limits_T \rho u_1 u^{(1)}\,d\tau = -\frac{1}{M}\frac{\lambda_1}{\lambda_1-\lambda^{(1)}}\int\limits_g \delta\rho u_1 u^{(1)}\,d\tau. \tag{30}$$

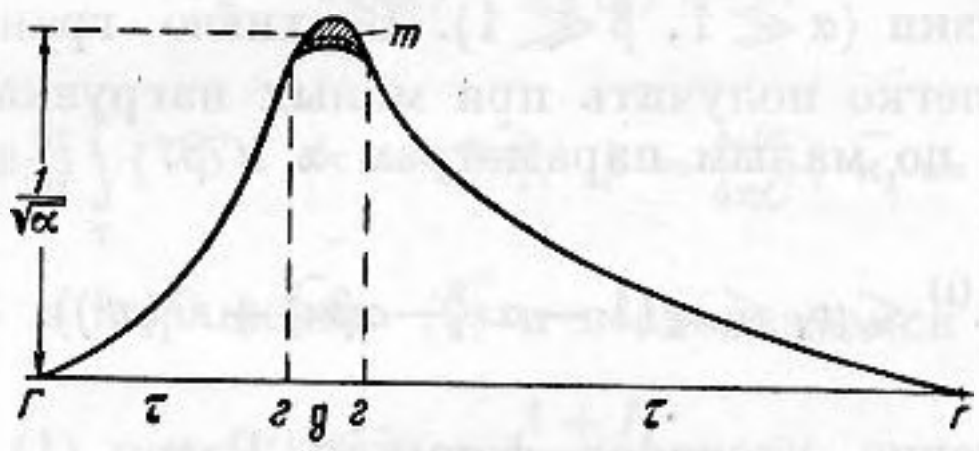
Для $\mu_1^{(2)}$ получим выражение:

$$\mu_1^{(2)} = \frac{a_0 - d^2[\lambda^{(1)}]^2}{a_1 - d^2\lambda^{(1)}}, \tag{31}$$

где a_0 и a_1 — соответствующие числители и знаменатели в выражениях (9). Величина d легко оценивается сверху:

$$d^2 \leqslant \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1-\lambda^{(1)}}\right)^2\frac{1}{M^2}\int\limits_g \delta\rho u_1^2\,d\tau\cdot\int\limits_g \delta\rho\,[u^{(1)}]^2\,d\tau \leqslant \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1-\lambda^{(1)}}\right)^2 I_1(g) = \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1-\lambda^{(1)}}\right)^2\bar{\bar{\varkappa}}_1^2\alpha. \tag{32}$$

Для доказательства (25) подставим (32) в (31) и воспользуемся (6) и (27): $\lim\limits_{m\to\infty}\lambda^{(2)}\leqslant\lim\limits_{m\to\infty}\mu_1^{(2)}=\lim\lambda_1\dfrac{1-d^2\left(\dfrac{\lambda^{(1)}}{\lambda_1}\right)^2}{1-d^2\dfrac{\lambda^{(1)}}{\lambda_1}}=\lambda_1\left(1+\dfrac{\alpha}{\beta_1}\dfrac{\bar{\bar{\varkappa}}^4}{\bar{\varkappa}_1^2}+0\left(\dfrac{\alpha^2}{\beta^2}\right)\right)=$ $=\lambda_1\left[1+\dfrac{4\pi C}{\lambda_1 M}\dfrac{\bar{\bar{\varkappa}}_1^4}{\bar{\varkappa}_1^2}+0\,(C^2)\right]$. Этим (25) доказано. Пусть теперь область g стягивается к множеству нулевой емкости: $\lim C\,(g,\,\Gamma)=0$. Для доказательства (17) подставим d и $\lambda^{(1)}$ для области g в выражение $\mu_1(g)$ и воспользуемся (32): $\lim\limits_{C\to 0}\lambda^{(2)}\leqslant\lim\limits_{C\to 0}\mu_1^{(2)}(g)=\lambda_1$.



Фиг. 4. Профиль функции $u^{(1)}$ при $\beta\gg 1$

Перейдем к обоснованию (18) и (26). При этом придется воспользоваться следующими свойствами собственных функций задачи о нагруженной системе [7]:

1) При $\beta\gg 1$ функция $u^{(1)}$ достигает своего максимального значения $\varkappa_{\max}^{(1)}$ в области g, причем

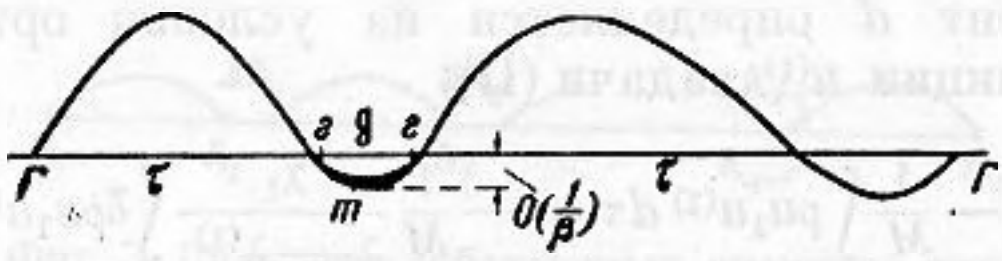
$$\varkappa_{\max}^{(1)}\leqslant\frac{1}{\sqrt{\alpha}} \tag{33}$$

(см. фиг. 4).

2) Последующие собственные функции $u^{(j)}$ $(j>1)$ в области g стремятся к нулю при $\beta\to\infty$, причем

$$u^{(j)}\sim 0\left(\frac{1}{\beta}\right) \tag{34}$$

(см. фиг. 5).



Фиг. 5. Профиль функции $u^{(j)}$ $(j>1)$ при $\beta\gg 1$

В качестве $F_1^{(k)}$ возьмем функцию $F_1^{(k)}=u_{k-1}+\sum\limits_{j=1}^{k-1}d_{jk}\,u^{(j)}$, где

$$d_{jk}=-\frac{\lambda_{k-1}}{\lambda_{k-1}-\lambda^{(j)}}\frac{1}{M}\int\limits_g\delta\rho u_{k-1}\,u^{(j)}\,d\tau\,(j=1,\,2,\ldots,k-1). \tag{35}$$

Из (34) и (35) вытекает, что при $j\neq 1$ величины $d_{jk}^2\sim 0\,(C^2)$, поэтому ими можно пренебречь по сравнению с d_{1k}^2. Этим самым доказательство (18) и (26) сводится к предыдущему доказательству для второго собственного значения.

б) Вырожденные собственные значения. Пусть собственное значение λ_k исходной задачи (1) является N_k-кратно вырожденным и пусть $u_{k1}, \ldots, u_{kN_k}$ — какая-либо система ортонормированных собственных функций, соответствующих уровню λ_k. Обозначим также через $u_1, \ldots, u_{k-1}$ и $u^{(1)}, \ldots, u^{(k-1)}$ предыдущие собственные функции задач (I) и (II), соответственно.

Остановимся сначала на случае малых нагрузок. По аналогии с предыдущим будем искать функцию $F_2^{(k)}$ в виде

$$F_2^{(k)} = \sum_{i=1}^{N_k} \gamma_i \left(\frac{u_{ki}}{\lambda_k} + f_{ki} \right) + \sum_{j=1}^{k-1} d_j \frac{u^{(j)}}{\lambda^{(j)}}, \tag{36}$$

где $\Delta f_{ki} = -\delta\rho u_{ki}$ в T, $f_{ki} = 0$ на Γ. Тогда из (36) и (4) получатся следующие выражения для коэффициентов d_j: $d_j = -\sum_{i=1}^{N_k} \gamma_i y_{ki}^{(j)}$, где $y_{ki}^{(j)} = \frac{1}{M} \int_T \bar{\rho} u_{ki} u^{(j)} d\tau$. Вычислим теперь по общим формулам коэффициенты a_2 и a_3:

$$a_2 = (\gamma, 1 + U - Y^{(0)}, \gamma); \quad a_3 = \frac{1}{\lambda_k} (\gamma, 1 + 2U + V - \lambda_k Y^{(-1)}, \gamma),$$

где

$$(\gamma, A, \gamma) = \sum_{i=1}^{N_k} \sum_{l=1}^{N_k} \gamma_i A_{il} \gamma_l; \qquad U_{il} = \frac{1}{M} \int_g \delta\rho u_{ki} u_{kl} d\tau, \tag{37}$$

$$V_{il} = \frac{\lambda_k}{M} \int_g \delta\rho f_{ki} u_{kl} d\tau; \qquad Y_{il}^{(\rho)} = \sum_{j=1}^{k-1} [\lambda^{(j)}]^\rho y_{ki}^{(j)} y_{kl}^{(j)}.$$

Экстремальные значения отношений $\mu_s = a_{s-1} / a_s$ будут определяться из уравнений

$$\operatorname{Det} \left| a_{s-1} - \frac{\mu_s}{\lambda_k} a_s \right| = 0. \tag{38}$$

Используем результаты предыдущего раздела для оценки интегралов, входящих в (37):

$$U_{il} = \varkappa_i \varkappa_l \alpha; \quad V_{il} \geqslant \varkappa_i \varkappa_l \alpha \beta_k,$$
$$y_{ki}^{(j)} = \frac{-\lambda_k}{\lambda_k - \lambda^{(j)}} \frac{1}{M} \int_g \delta\rho u_{ki} u^{(j)} d\tau \simeq 0(\alpha), \text{ то есть } Y_{il}^{(p)} \simeq 0(\alpha^2), \tag{39}$$

где $\varkappa_i$ — значение функции u_{ki} в области g. Подставляя (39) в (38) и отбрасывая члены порядка $0(\alpha^2)$, получим относительно $\Omega = 1 - \frac{\mu_3}{\lambda_k}$ уравнение

$$\operatorname{Det} | \Omega \delta_{il} + \varkappa_i \varkappa_l h | = 0, \tag{40}$$

где $h = -\alpha(1 + \beta_k)$.

Уравнение (40) имеет $N_k - 1$ - кратный корень $\Omega = 0$, которому соответствует $N_k - 1$ - кратное экстремальное значение $\mu_3 = \lambda_k$ и однократный корень $\Omega = -h \sum_{i=1}^{N_k} \varkappa_i^2$, которому соответствует экстремальное значение $\mu_3 = \lambda_k \left[1 - \alpha(1 + \beta_k) \sum_{i=1}^{N_k} \varkappa_i^2 \right]$. Таким образом, при малых нагруз-

ках m одно из собственных значений вырожденного уровня уменьшается на величину $\Delta\lambda_k = \alpha(1+\beta_k)\sum_{i=1}^{N_k}\varkappa_i^2$, а остальные изменяются на величины более высокого порядка малости. В первом приближении вырождение уровня уменьшается на единицу. Подобным методом могут быть также доказаны следующие теоремы:

Теорема 4. Для нагрузок по области g, стягивающейся к множеству нулевой емкости, предельный спектр собственных значений совпадает с исходным в том смысле, что при этом одно из собственных значений N_k-кратно вырожденного уровня λ_k сдвигается на уровень λ_{k-1}, а его место замещается собственным значением с уровня λ_{k+1}.

Теорема 5. Для нагрузок $m \to \infty$ предел одного из собственных значений вырожденного уровня $\lim\limits_{m\to\infty}\lambda^{(k)} \leqslant \lambda_{k-1} + 4\pi C(g, \Gamma)\,\varkappa_{k-1}^2$, другие собственные значения этого уровня изменяются на величины $0(C^2)$ и появляется собственное значение $\lambda^{(k)} \leqslant \lambda_k + 4\pi C(g, \Gamma)\sum_{i=1}^{N_k}\varkappa_i^2$.

В заключение выражаю благодарность А. А. Самарскому за многократное и полезное обсуждение результатов настоящей работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рэлей. Теория звука, т. 1, М., 1955.
2. Г. Курант, Д. Гильберт. Методы математической физики, т. 1, гл. 4, Гостехиздат, 1951, 195.
3. E. Kornhauser, D. Muntzer. On the vibration of mass-loaded membranes. J. Acoust. Soc. America, 1953, 25, 903—905.
4. H. Cohen, G. Handelman. On the vibration of a circular membrane with added masses. J. Acoust. Soc. America, 1957, 29, 229.
5. H. Cohen, G. Handelman. Vibrations of a rectangular plate with distributed added mass. J. Francl. Inst., 1956, 261, 219.
6. А. Витт, С. Шубин. О тонах мембраны, закрепленной в конечном числе точек. Ж. технич. физ., 1934, 1, 1, 163—175.
7. Ю. Н. Днестровский. Об изменении собственных значений при изменении границы области (диссертация). МГУ, 1955.
8. Ю. Н. Днестровский. Изменение собственных частот электромагнитных резонаторов. Докл. АН СССР, 1956, 3, 1, 94—97.
9. Ю. Н. Днестровский. Возмущение собственных частот электромагнитных резонаторов ферритами. Радиотехника и электроника, 1958, 3, 5, 675—689.
10. E. T. Kornhauser, D. B. Van Hulsteyn. Variational treatment of arbitrary mass—loaded membranes. J. Acoust. Soc. America, 1957, 29, 11, 1204—1206.
11. L. Collatz. Schrittweise Naherungen bei Integralgleichungen und Eigenwertschranken. Math. Z., 1940, 46, 692—708.
12. А. А. Самарский. О влиянии закрепления на собственные частоты замкнутых объемов. Докл АН СССР, 1948, 63, 6, 631—634.

Физический факультет Московского государственного университета

Поступила в редакцию 8 июля 1957 г.