АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том IV 1958 Вып. 4

О ВИБРАЦИЯХ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ В ВОДЕ И ИЗЛУЧЕНИИ ЕЮ ЗВУКА СЛОЖНОГО СПЕКТРАЛЬНОГО СОСТАВА

З. В. Колотихина

Проведено исследование свободных и вынужденных осесимметричных колебаний бесконечно длинной тонкой цилиндрической оболочки, окруженной жидкой средой. Получено трансцендентное уравнение для определения собственных частот колебаний в сжимаемой среде и формулы, позволяющие при любой внешней вибрационной нагрузке определять амплитуды звукового давления и колебательной скорости движения частиц среды по частотам, кратным частоте вынужденных колебаний оболочки.

Исследованию колебаний безграничной однородной цилиндрической оболочки, находящейся в идеальной сжимаемой жидкости, посвящены работы [1—7]. В отличие от указанных работ в настоящей статье проведено исследование осесимметричных колебаний безграничной тонкой цилиндрической оболочки, окруженной идеальной сжимаемой жидкостью и представляющей собой периодически продолженную в обе стороны оболочку длины l по закону $\psi_n(\xi) = \sin\frac{n\pi a}{l}\xi$ $\left(\xi = \frac{z}{a}\right.$, где z — осевая координата, a — радиус срединной поверхности оболочки, n — число полуволн изгиба вдоль l), соответствующего шарнирному закреплению сечений 0, l, $2l$ и так далее. Две соседние шарнирные заделки и длина l образуют замкнутую поверхность оболочки. Виды свободных колебаний такой оболочки в пустоте используются в качестве видов колебаний оболочки в среде.

Согласно [8—9], уравнение осесимметричных колебаний цилиндрической оболочки с учетом реакции окружающей среды можно записать в виде:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \alpha^2\left[\frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} + \frac{\varepsilon\delta a^2}{D} w\right] = \frac{1}{m_{об}} \cdot q(\xi, t) + \frac{\rho_0}{m_{об}}\left[\frac{\partial\Phi(r,\xi,t)}{\partial t}\right]_{r=a}, \tag{1}$$

где $w(\xi, t)$ — радиальное перемещение; $\alpha^2 = D/a^4 m_{об}$, $D = \varepsilon\delta^3/12(1-\mu^2)$ — цилиндрическая жесткость, δ — толщина оболочки; ε, μ — соответственно модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала оболочки, ρ_0 — плотность среды; $m_{об}$, $q(\xi, t)$, $F = \rho_0\left[\frac{\partial\Phi(r,\xi,t)}{\partial t}\right]_{r=a}$ — соответственно масса оболочки, произвольная гармоническая радиальная внешняя нагрузка и реакция среды, приходящиеся на единицу поверхности оболочки; $\Phi(r, \xi, t)$ — функция потенциала скоростей, являющаяся решением волнового уравнения

$$\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial\Phi}{\partial r} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{a^2}\cdot\frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi^2} = \frac{1}{c_0^2}\cdot\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}, \tag{2}$$

где c_0 — скорость распространения звука в среде, удовлетворяющая

при $r = a$ граничным условиям:

$$\frac{\partial w(\xi, t)}{\partial t} = \frac{\partial \Phi(r, \xi, t)}{\partial r}, \tag{3}$$

принципу излучения [10],

$$\begin{aligned} &\lim_{r\to\infty} \sqrt{r}\left[\frac{\partial \Phi}{\partial r} + \beta_n \cdot \Phi\right] = 0 \qquad \text{при } \beta_n > 0, \\ &\lim_{r\to\infty} \sqrt{r}\left[\frac{\partial \Phi}{\partial r} + i\bar{\beta}_n \cdot \Phi\right] = 0 \qquad \text{при } \bar{\beta}_n = i\beta_n > 0 \end{aligned} \tag{4}$$

(β_n — какое угодно число, независящее ни от t, ни от r) и начальным условиям

$$\Phi(r, \xi, 0) = 0, \quad \frac{\partial \Phi(r, \xi, 0)}{\partial t} = 0. \tag{5}$$

Потенциал скоростей $\Phi(r, \xi, t)$ находим, решая уравнение (2) при граничных условиях (3), (4) и при начальных условиях (5). Представим $\Phi(r, \xi, t)$ в виде ряда

$$\Phi(r, \xi, t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(kr) \cdot \psi_n(\xi) \cdot T_n'(t), \tag{6}$$

где $T_n'(t)$ — производная функции $T_n(t)$ по времени t; k — волновое число. В этом случае переменные разделяются и в результате подстановки (6) в (2) мы получаем уравнения:

$$f_n'' + \frac{1}{r} \cdot f_n' - \beta_n^2 \cdot f_n = 0, \tag{7}$$

$$\frac{1}{c_0^2} \cdot T_n''' + \left[\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 - \beta_n^2\right] \cdot T_n' = 0. \tag{8}$$

Разлагая функцию внешней нагрузки $q(\xi, t)$ в ряд по $\psi_n(\xi)$

$$q(\xi, t) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) \cdot \sin\frac{n\pi a}{l}\xi,$$

мы получим для определения $T_n(t)$ из (1) с учетом (3) уравнение

$$T_n''(t) + \nu_n^2 \cdot T_n'(t) = \frac{\nu_n^2}{m_{\text{об}} \cdot \chi_n^2} \frac{1}{f_n'(ka)} \cdot q_n(t), \tag{9}$$

где ν_n — круговые частоты собственных колебаний оболочки в среде, определяемые по формуле

$$\nu_n^2 = \frac{\chi_n^2}{1 - \dfrac{\rho_0 f_n(ka)}{m_{\text{об}} - f_n'(ka)}}, \tag{10}$$

где χ_n — круговые частоты собственных колебаний оболочки в пустоте, равные

$$\chi_n^2 = \alpha^2\left[\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^4 + \frac{\varepsilon\delta a^2}{D}\right].$$

В результате совместного решения уравнений (7), (8), (9) получается следующее выражение для определения потенциала скоростей $\Phi(r, \xi, t)$, удовлетворяющее граничным условиям (3), (4) и начальным условиям (5):

$$\Phi(r, \xi, t) = \sum_{n=1,3}^{\infty} \frac{\nu_n}{m_{\text{об}} \cdot \chi_n} \cdot \frac{f_n(kr)}{f_n'(ka)} \cdot \sin\frac{n\pi a}{l}\xi \cdot N_n'(t), \tag{11}$$

где

$$f_n(kr) = \begin{cases} H_0^{(1)}(i\beta_n r) & \text{при } \beta_n > 0\,(kl < n\pi) \\ H_0^{(2)}(\bar{\beta}_n r) & \text{при } \bar{\beta}_n > 0\,(kl > n\pi) \end{cases},$$

$$f_n'(kr) = \begin{cases} \dfrac{dH_0^{(1)}(i\beta_n r)}{dr} = -i\beta_n \cdot H_1^{(1)}(i\beta_n r) & \text{при } \beta_n > 0\,(kl < n\pi) \\ \dfrac{dH_0^{(2)}(\bar{\beta}_n r)}{dr} = -\bar{\beta}_n \cdot H_1^{(2)}(\bar{\beta}_n r) & \text{при } \bar{\beta}_n > 0\,(kl > n\pi), \end{cases}$$

$iH_0^{(1)}(i\beta_n r)$, $H_0^{(2)}(\bar{\beta}_n r)$; $-H_1^{(1)}(i\beta_n r)$, $H_1^{(2)}(\bar{\beta}_n r)$ — функции Ханкеля соответственно нулевого и первого порядка [11] $\left(\beta_n = \sqrt{\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 - K^2},\ \bar{\beta}_n = i\beta_n;\right.$ $K = \Omega / c_0$, $K = \nu_n / c_0$ — волновые числа при учете соответственно вынужденных колебаний оболочки$\left.\right)$; $N_n'(t)$ — производная по времени t функции

$$N_n(t) = \frac{1}{\chi} \cdot \frac{2a}{l} \int_0^{l/a} d\sigma \int_0^t q(\sigma, \tau) \cdot \sin\frac{n\pi a}{l}\sigma \cdot \sin\nu_n(t-\tau) \cdot d\tau. \tag{12}$$

Заметим, что если цилиндрическая оболочка находится в несжимаемой жидкости, для потенциала скоростей $\Phi(r, \xi, t)$ мы имеем выражение:

$$\Phi(r, \xi, t) = \sum_{n=1,3}^{\infty} \frac{\nu_n^*}{m_{\text{об}} \cdot \chi_n} \cdot \frac{iH_0^{(1)}\left(i\frac{n\pi r}{l}\right)}{\frac{n\pi}{l} H_1^{(1)}\left(i\frac{n\pi a}{l}\right)} \cdot \sin\frac{n\pi a}{l}\xi \cdot N_n'(t), \tag{13}$$

где ν_n^* — круговые частоты собственных колебаний оболочки в несжимаемой среде, равные

$$\nu_n^{*2} = \frac{\chi_n^2}{1 + \frac{\rho_0}{m_{\text{об}}} \frac{l}{n\pi} \frac{iH_0^{(1)}\left(i\frac{n\pi a}{l}\right)}{-H_1^{(1)}\left(i\frac{n\pi a}{l}\right)}}. \tag{14}$$

Воспользовавшись известными соотношениями: $p = -\rho_0 \partial\Phi/\partial t$, $v = \partial\Phi/\partial r$, мы получим выражения для давления p и для скорости v в звуковом поле.

Перейдем к анализу полученного решения. Рассмотрим общий случай периодической нагрузки. При возбуждении оболочки нагрузкой $q(\xi, t)$, заданной распределением $q(\xi)$ по поверхности оболочки и являющейся произвольной периодической функцией времени $q(t)$ периода $\tau = 2\pi/\omega$, при весьма общих предположениях (выполнение условий Дирихле), функция $q(t)$ может быть представлена рядом Фурье [12]:

$$q(t) = \frac{1}{2} \sum_{S=-\infty}^{+\infty} C_S e^{i(S\omega t - \varphi_S)},$$

где S — порядок гармоник нагрузки, $C_S = C_{-S} = \sqrt{A_S^2 + B_S^2}$, A_S, B_S — коэффициенты этого ряда, определяемые формулами

$$A_0 = C_0, \quad A_S = \frac{2}{\tau} \int_{(\tau)} q(t) \cos S\omega t \cdot dt, \quad B_S = \frac{2}{\tau} \int_{(\tau)} q(t) \sin S\omega t \cdot dt;$$

$$\varphi_S = -\varphi_{-S} = \operatorname{arc\,tg} \frac{B_S}{A_S}.$$

Тогда очевидно, что

$$N_n(t) = \frac{N_n(\xi)}{\chi_n \cdot \nu_n} \cdot \sum_{S=-\infty}^{+\infty} \frac{C_S}{1-\left(\frac{S\omega}{\nu_n}\right)^2} e^{i(S\omega t-\varphi_S)} -$$

$$-\frac{N_n(\xi)}{\chi_n \cdot \nu_n^2} \sum_{S=-\infty}^{+\infty} \frac{C_S e^{-i\varphi_S}}{1-\left(\frac{S\omega}{\nu_n}\right)^2} [iS\omega \sin \nu_n t + \nu_n \cos \nu_n t], \tag{15}$$

где функция $N_n(\xi)$ легко определяется в каждом частном случае задания распределения нагрузки по поверхности оболочки по формуле

$$N_n(\xi) = \frac{a}{l} \int_0^{l/a} q(\sigma) \cdot \sin \frac{n\pi a}{l} \sigma \cdot d\sigma. \tag{16}$$

Первое слагаемое в (15) обусловлено, очевидно, чисто вынужденными колебаниями оболочки, происходящими с частотой возмущающей нагрузки q; второе — собственные колебания, происходящие с амплитудой и фазой, независящими от начальных условий. Последние затухают при действии сил сопротивления (нами неучтенных), а также за счет излучения колебаний в окружающую оболочку среду.

Во многих случаях можно ограничиться рассмотрением только установившихся вынужденных колебаний оболочки. В результате для $\Phi(r, \xi, t)$, а значит, и для $p(r, \xi, t)$, $v(r, \xi, t)$ получаем выражения в виде двойных рядов по n, S, что дает возможность определять спектры амплитуд давления и скорости в звуковом поле по частотам, кратным частоте вынужденных колебаний оболочки ω, для любого вида колебаний последней n. В окончательном виде для n, S-го члена разложения потенциала скоростей $\Phi(r, \xi, t)$ в двойной ряд мы получаем выражение:

$$\Phi_{n,S}(r, \xi, t) = \frac{N_n(\xi)}{m_{об} \cdot \chi_n^2} \cdot \frac{f_n(kr)}{f_n'(ka)} \cdot \sin \frac{n\pi a}{l} \xi \cdot \frac{S\omega \cdot C_S}{1-\left(\frac{S\omega}{\nu_n}\right)^2} \cdot e^{i(S\omega t-\varphi_S+\pi/2)}, \tag{17}$$

откуда

$$w_{n,S}(\xi, t) = \frac{N_n(\xi)}{m_{об} \cdot \chi_n^2} \cdot \sin \frac{n\pi a}{l} \xi \cdot \frac{C_S}{1-\left(\frac{S\omega}{\nu_n}\right)^2} e^{i(S\omega t-\varphi_S)}, \tag{18}$$

$$p_{n,S} = -\rho_0 \frac{\partial \Phi_{n,S}}{\partial t}, \quad v_{n,S} = \frac{\partial \Phi_{n,S}}{\partial r} (n = 1, 3, 5, \ldots; -\infty \leqslant S \leqslant +\infty). \tag{19}$$

Если ω (или $S\omega$) близка к ν_n (состояние резонанса), то роль соответствующего вида колебаний оболочки в образовании результирующей формы ее становится большей, чем роль других видов. Отдельные резонансные частоты при колебаниях оболочки в жидкости определяются, очевидно, из условия $\eta = [1 - (\frac{S\omega}{\nu_n})^2] \to 0$. При этом, однако, следует иметь в виду, что в области частот $S\omega$ близких к ν_n, собственные колебания нельзя отбрасывать, ибо резонанс — явление наложения вынужденных и собственных колебаний. Характер излучаемого оболочкой звука зависит от характера возбуждения оболочки, наличие бесконечного числа видов колебаний оболочки обогащает спектр звуковых давлений в целом.

Рассмотрим реакцию окружающей среды на оболочку. Выражение, описывающее n, S-й член разложения давления в двойной ряд, можно представить в виде

$$-F_{n,S} = p_{n,S}(a, \xi, t) = R_{n,S} \cdot w'_{n,S}(\xi, t) + \frac{1}{S\omega} \cdot X_{n,S} \cdot w''_{n,S}(\xi, t), \tag{20}$$

где

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\rho_0 c_0} X_{n,s}(ia\beta_n) = k \dfrac{iH_0^{(1)}(ia\beta_n)}{-\beta_n H_1^{(1)}(ia\beta_n)} \\ R_{n,s}(ia\beta_n) = 0 \end{cases} \quad \text{при } \beta_n > 0 \left(kl < n\pi,\ \lambda > \frac{2l}{n}\right), \tag{21}$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\rho_0 c_0} X_{n,s}(a\bar{\beta}_n) = k \dfrac{I_0(a\bar{\beta}_n)\cdot I_1(a\bar{\beta}_n) + N_0(a\bar{\beta}_n)\cdot N_1(a\bar{\beta}_n)}{\bar{\beta}_n \left| H_1^{(2)}(a\bar{\beta}_n)\right|^2} \\ \dfrac{1}{\rho_0 c_0} R_{n,s}(a\bar{\beta}_n) = \dfrac{2k}{\pi a \bar{\beta}_n^2} \dfrac{1}{\left| H_1^{(2)}(a\bar{\beta}_n)\right|^2} \end{cases} \quad \text{при } \bar{\beta}_n > 0 \left(kl > n\pi,\ \lambda < \frac{2l}{n}\right) \left(k = \frac{\Omega}{C_0} = \frac{S\omega}{C_0},\ \lambda = \frac{2\pi C_0}{S\omega}\right), \tag{22}$$

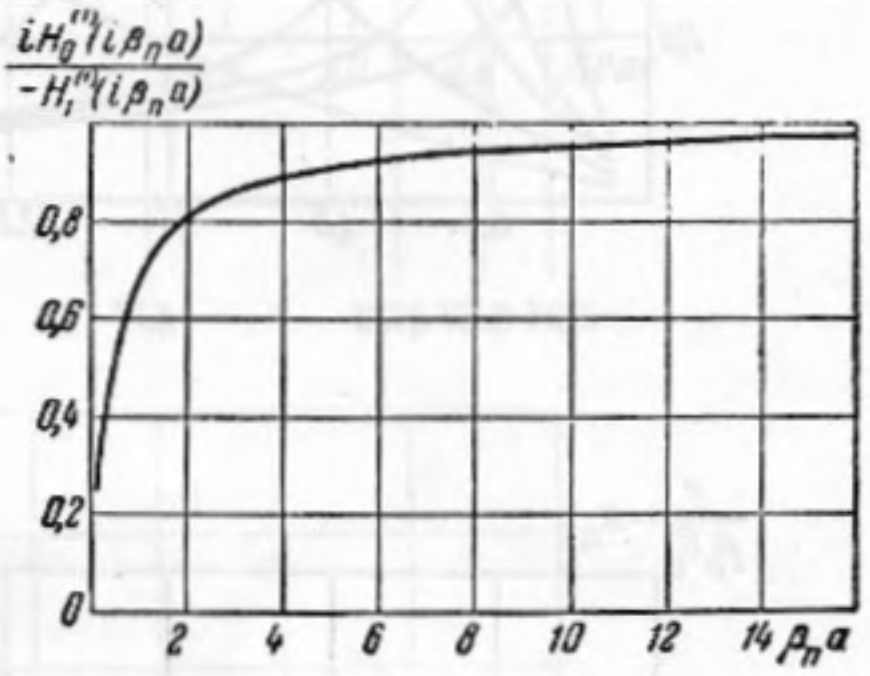
где w'_{nS}, $w''_{n,s}$ — первая и вторая производные по времени от $w_{n,s}$, определяемой формулой (18). В акустике R, X называют соответственно активной (демпфирующей) и реактивной (инерционной) составляющими удельного сопротивления среды $\zeta = R + iX$. Графики зависимостей

$$f_1(a\beta_n) = \frac{1}{\rho_0 c_0} \frac{\beta_n}{k} X_{n,s}(ia\beta_n),$$

$$f_2(a\bar{\beta}_n) = \frac{1}{\rho_0 c_0} \frac{\bar{\beta}_n}{k} R_{n,s}(a\bar{\beta}_n)$$

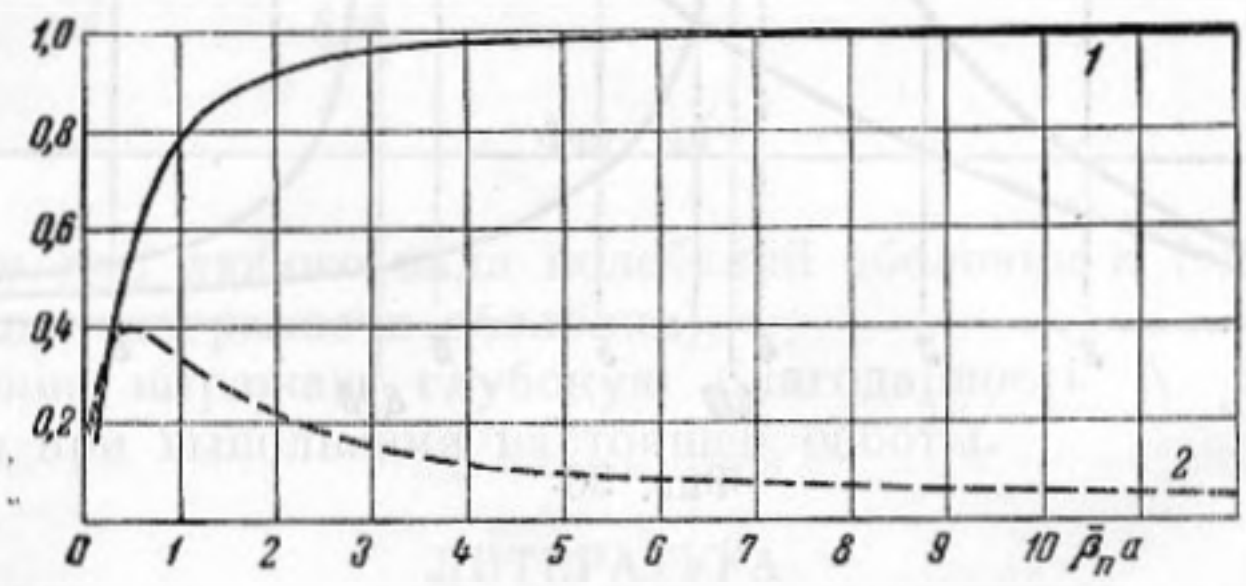
$$f_3(a, \bar{\beta}_n) = \frac{1}{\rho_0 c_0} \frac{\bar{\beta}_n}{k} X_{n,s}(a\bar{\beta}_n),$$

$$\frac{1}{\rho_0 c_0} R_{n,s}(ak) \quad \text{и} \quad \frac{1}{\rho_0 c_0} X_{n,s}(ak)$$



Фиг. 1

для $\frac{1}{2} n \leqslant \frac{l}{a} \leqslant 10n$ представлены соответственно на фиг. 1, 2, 3*а*, *б*, 4*а*, *б*. Практически $\frac{1}{\rho_0 c_0} R_{n,s}(ak)$, $\frac{1}{\rho_0 c_0} X_{n,s}(ak)$ можно проанализировать для любых n и l/a. Анализ результатов исследований, приведенный в работах [1—7], показывает, что полученные для активной и реактивной составляющих удельного сопротивления среды результаты совпадают с таковыми настоящей статьи при $n = 2m$.



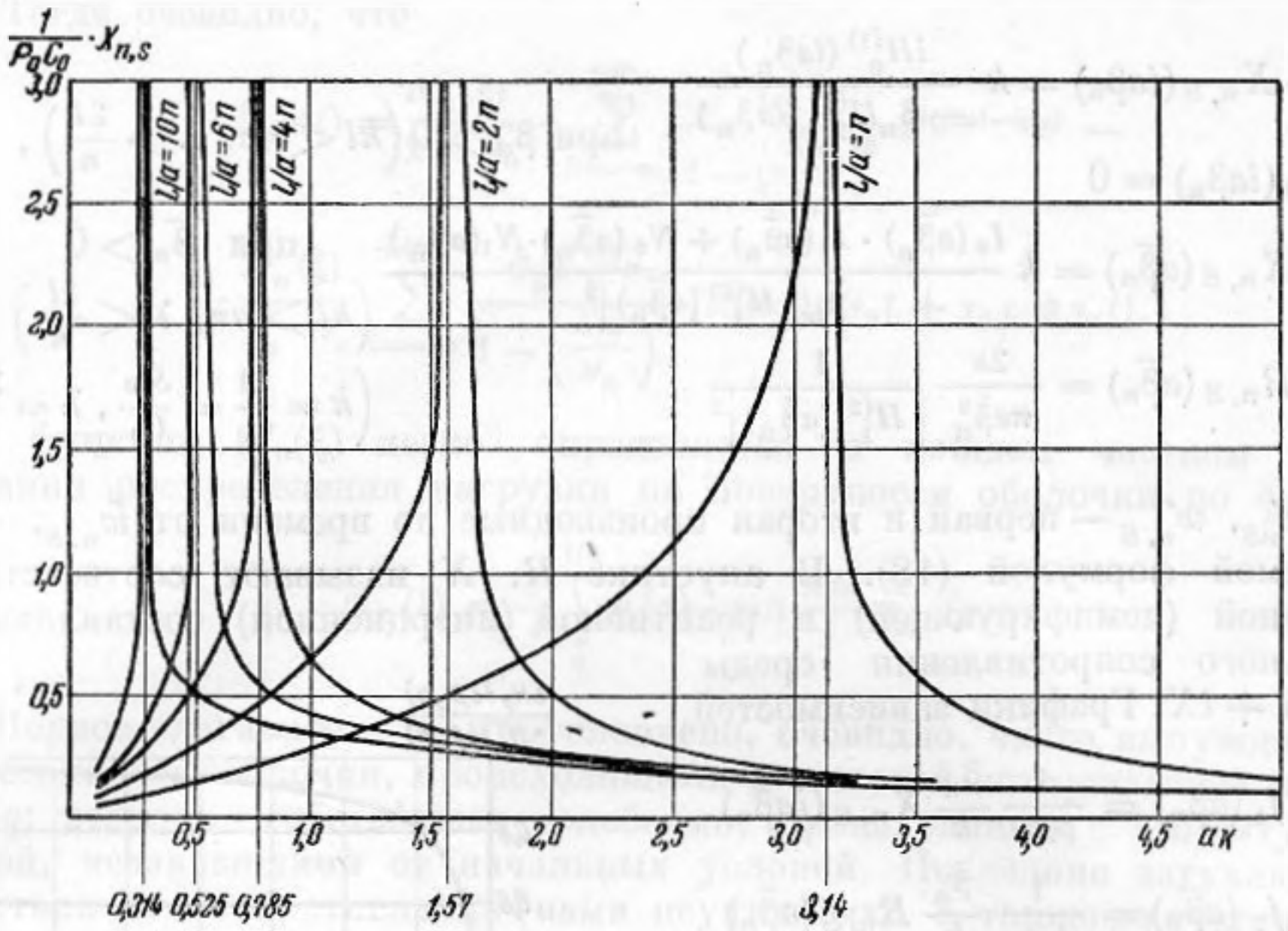
Фиг. 2. Кривые изменения сопротивлений среды при $\bar{\beta}_n > 0$ ($kl > n\pi$):

$$1 - \frac{1}{\rho_0 c_0} \cdot \frac{\bar{\beta}_n}{k} R_{n,s}(a\bar{\beta}_n), \quad 2 - \frac{1}{\rho_0 c_0} \frac{\beta_n}{k} \cdot X_{n,s}(a\bar{\beta}_n)$$

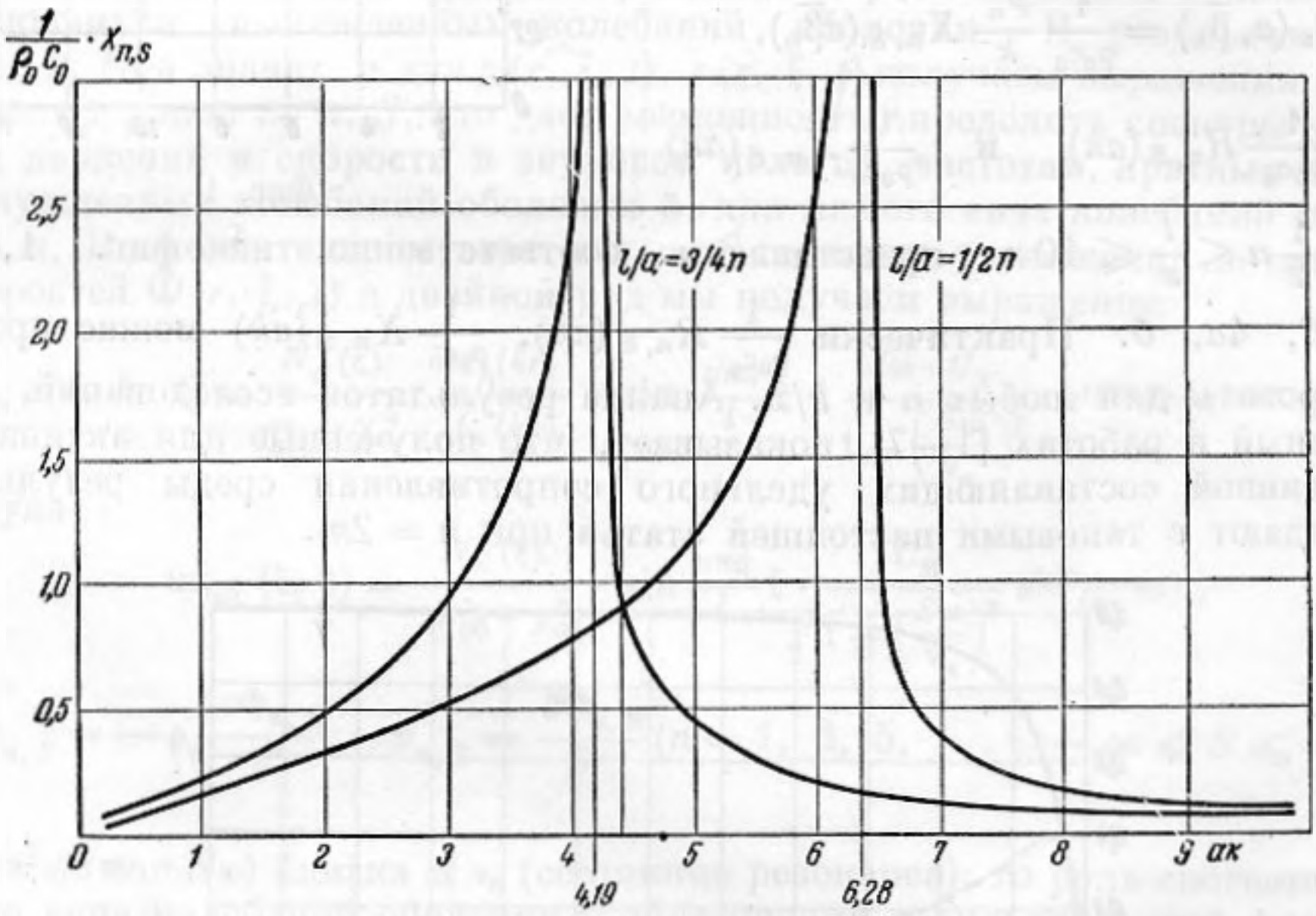
Теперь трансцендентное уравнение (10) для определения частот собственных колебаний оболочки в сжимаемой среде можно записать для наглядности в виде

$$\frac{1}{\chi_n^2 - \nu_n^2} = \frac{m_{\text{об}}}{\nu_n \cdot \sqrt{R_n^2 + X_n^2}}, \tag{10a}$$

где R_n, X_n определяются формулами (21), (22) при $\beta_n = \sqrt{(n\pi/l)^2 - (\nu_n/c_0)^2}$, $\bar{\beta}_n = i\beta_n$ ($k = \nu_n/c_0$). Следовательно, присутствие



Фиг. 3а

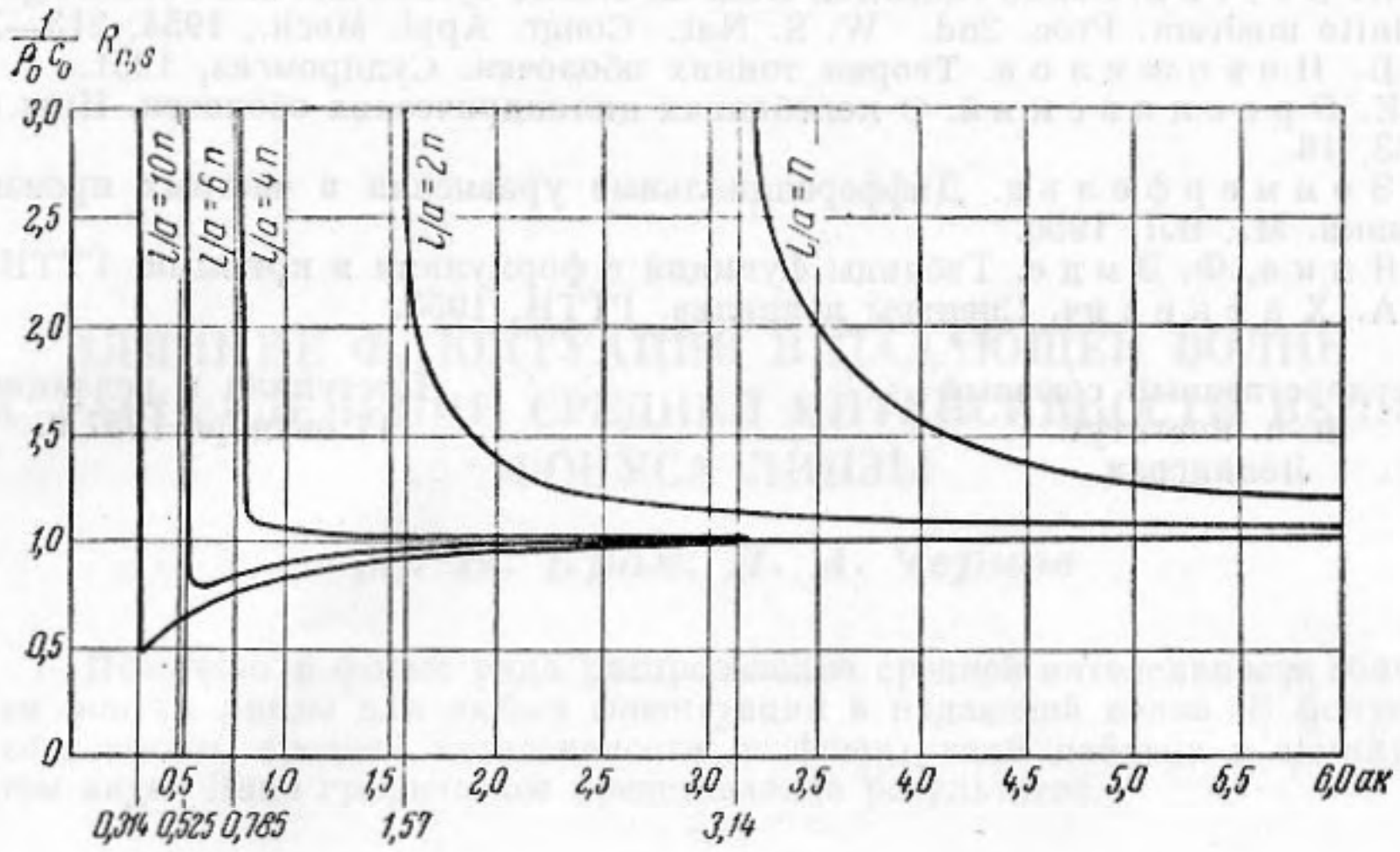


Фиг. 3б

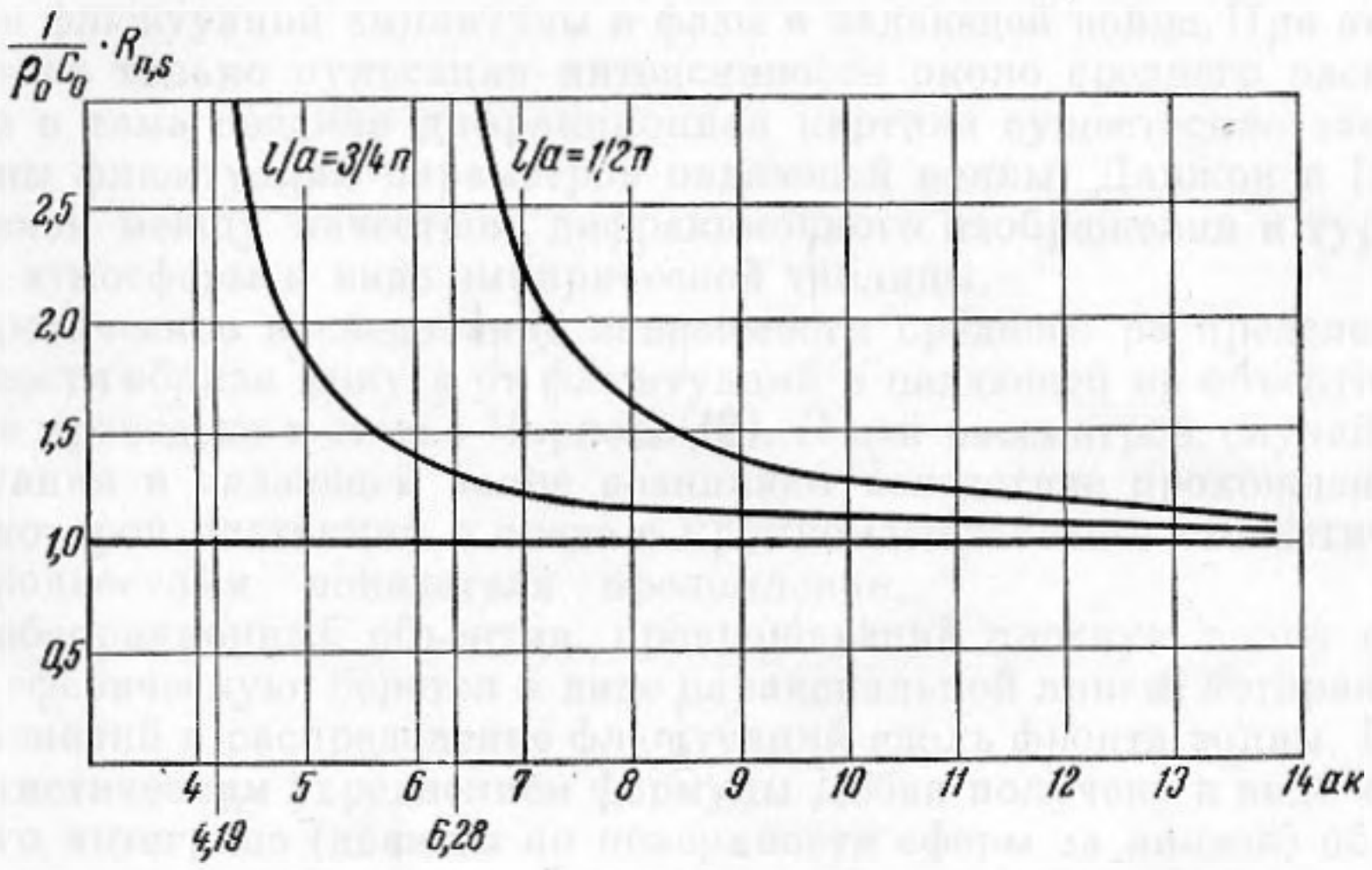
среды при колебаниях оболочки понижает частоты ее собственных колебаний как вследствие инерции среды (X_n), так и вследствие тормозящего действия среды (R_n). Притом при $\nu_n < n\pi c_0 / l$ основное влияние на понижение частоты окажет инерция среды.

Движение среды физически создает эффект, называемый обычно влиянием присоединенной массы среды M_n, т. е. $\nu_n^2 (m_{об} + M_n) = \chi_n^2 \cdot m_{об}$; M_n в нашем случае равна

$$M_n = \frac{\rho_0 l}{n\pi} \cdot \frac{i H_0^{(1)}\left(i \frac{n\pi a}{l}\right)}{-H_1^{(1)}\left(i \frac{n\pi a}{l}\right)}$$



Фиг. 4а



Фиг. 4б

и определяется для любого вида колебаний оболочки n (здесь M_n отнесена на единицу поверхности оболочки).

В заключение выражаю глубокую благодарность А. И. Лурье за ценные советы при выполнении настоящей работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. M. C. Junger. Vibrations of elastic shells in a fluid medium and the associated radiation of sound. J. Appl. Mech., Trans. ASWE, 1952, 74, 439—445.
2. M. C. Junger. Radiation Loading of cylindrical and spherical surfaces. J. Acoust. Soc. America, 1952, 24, 3, 288—289.
3. M. C. Junger. The physical interpretation of the expression for an outgivingwave in cylindrical coordinates. J. Acoust. Soc. America, 1953, 25, 1, 40—47.
4. M. C. Junger. Sound scattering by thin elastic shells. J. Acoust. Soc. America, 1952, 24, 4, 366—373.
5. H. H. Bleich, M. L. Baron. Free and forced vibrations of an infinitely long cylindrical shell in an infinite acoustic medium. J. Appl. Mech., 1954, 21, 2, 167—177.
6. M. L. Baron, H. H. Bleich. Tables for frequencies and modes of free vibration of infinitely long thin cylindrical shells. J. Appl. Mech., 1954, 21, 2, 178—184.

7. H. H. B l e i c h. Sound radiation from an elastic cylindrical shell submerged in an infinite medium. Proc. 2nd. W. S. Nat. Congr. Appl. Mech., 1954, 213—223.
8. В. В. Н о в о ж и л о в. Теория тонких оболочек. Судпромгиз, 1951.
9. В. Е. Б р е с л а в с к и й. О колебаниях цилиндрических оболочек. Инж. сборн., 1953, 16.
10. А. З о м м е р ф е л ь д. Дифференциальные уравнения в частных производных физики. М., ИЛ, 1950.
11. Е. Я н к е, Ф. Э м д е. Таблицы функций с формулами и кривыми. ГТТИ, 1948.
12. А. А. Х а р к е в и ч. Спектры и анализ. ГТТИ, 1953.

Государственный союзный
н.-и. институт
Ленинград

Поступила в редакцию
17 октября 1957 г.