АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том V 1959 Вып. 1

РАССЕЯНИЕ ЗВУКА УПРУГИМИ ЦИЛИНДРАМИ

Л. М. Лямшев

Экспериментально исследовано рассеяние звука латунными, алюминиевыми и стальными цилиндрами в воде. Установлено, что при некоторых углах падения звуковой волны на ограниченный упругий цилиндр возникает сильное рассеяние в направлении, противоположном направлению падающей волны (так называемое незеркальное отражение). Рассматривается задача о рассеянии плоской звуковой волны упругим безграничным цилиндром кругового сечения. Результаты расчета используются при обсуждении полученных экспериментальных данных. Выяснено, что сильное незеркальное отражение звука возникает всякий раз, когда в упругом цилиндре возбуждаются свободные нормальные волны, распространяющиеся вдоль цилиндра [1].

На фиг. 1, 2, 3 показаны полярные характеристики отражения для упругих цилиндров кругового сечения из латуни, алюминия и стали в воде, снятые в направлении, противоположном направлению падающей волны. По вертикальной оси отложена величина амплитуды отраженного сигнала в децибелах по отношении к некоторому условному уровню, по горизонтальной оси — значение угла падения в градусах. Значение угла падения $\theta = 0°$ соответствует перпендикулярному падению звуковой волны к оси цилиндра.

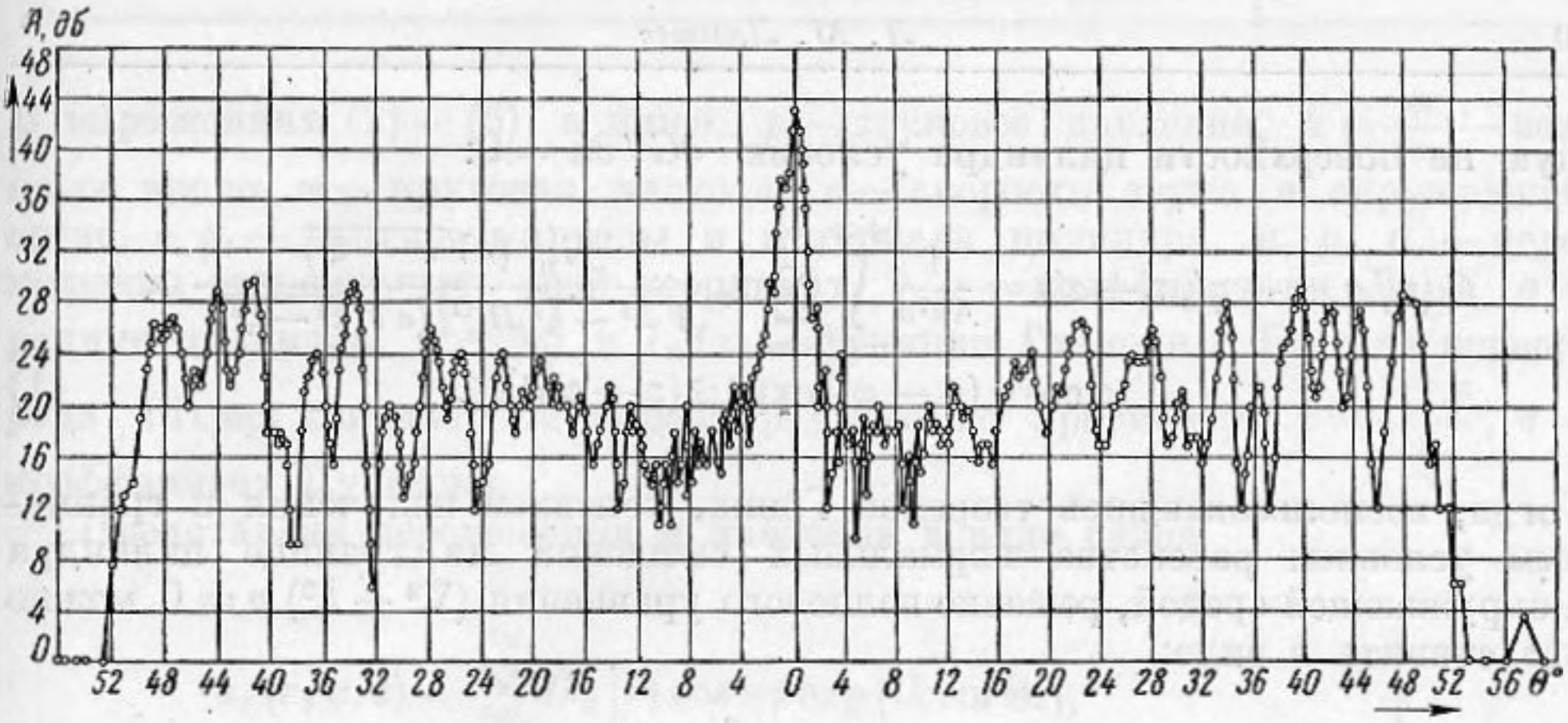
Измерения проводились импульсным методом на установке, описанной в [2]. Длительность импульсов была 30 *мсек*, частота повторения — 50 *гц*, частота заполнения — 1 *мггц*, диаметр цилиндров 10 *мм*, длина — 60 *мм*. Цилиндры крепились при помощи нитей во вращающейся раме, снабженной лимбом для отсчета углов. В процессе измерений рама с укрепленным в ней цилиндром поворачивалась и при каждом угле поворота фиксировалась амплитуда отраженного сигнала; по этим данным строились полярные характеристики отражения.

На приведенных выше полярных характеристиках обращают на себя внимание максимумы сильного рассеяния (незеркальные отражения), наблюдаемые при различных углах падения звуковой волны на цилиндр. Так, для латунного цилиндра (фиг. 1) незеркальное отражение наблюдается при углах падения $\theta° = 12, 18, 22, 26, 28, 30, 34, 36, 40, 42, 44, 48$; для алюминиевого цилиндра (фиг. 2) при $\theta° = 8, 12, 15, 17, 20, 24, 26, 30$ и для стального цилиндра (фиг. 3) незеркальное отражение имеет место при $\theta = 8, 11, 14, 18, 23, 25, 27, 30$.

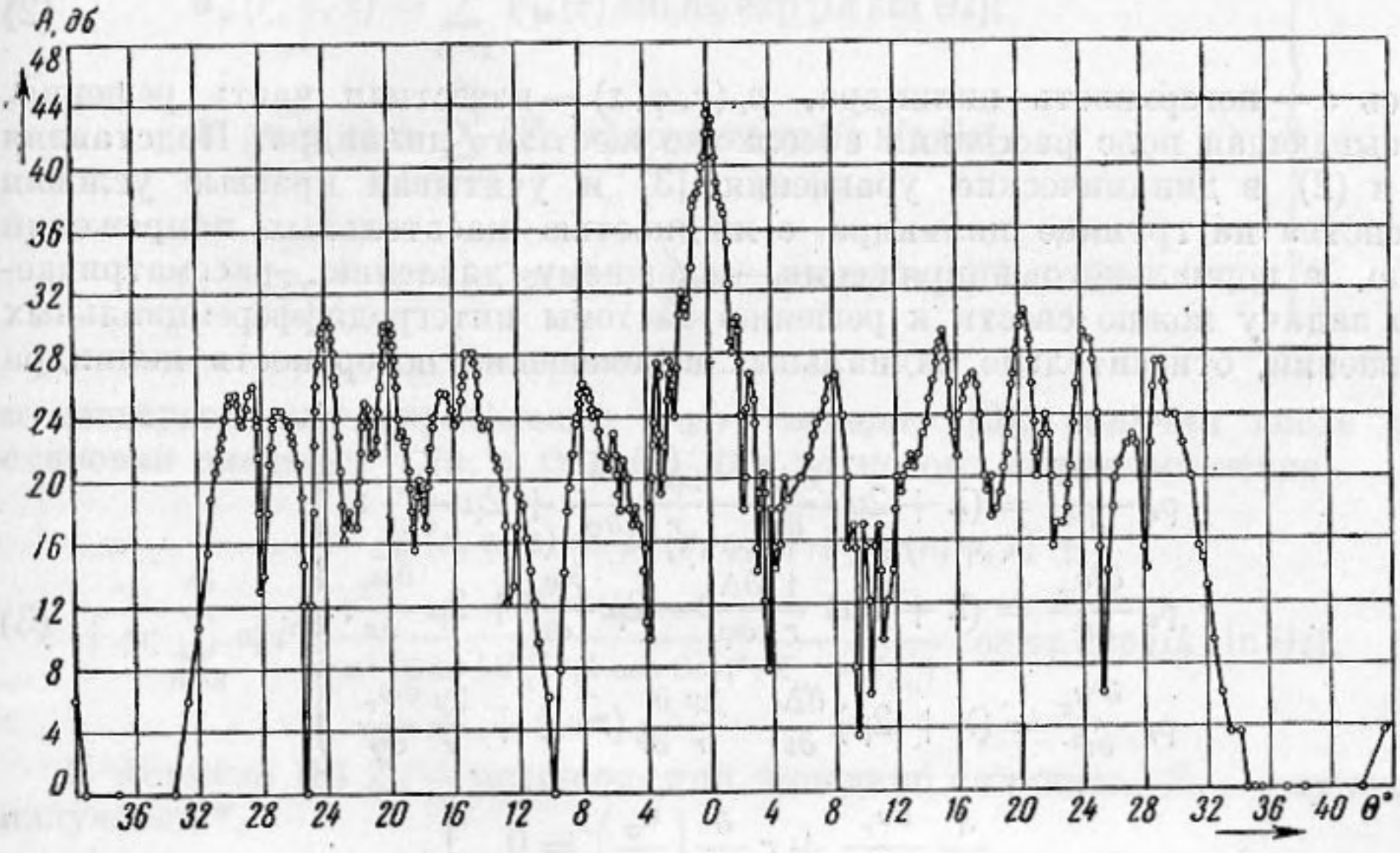
Оценка наблюдаемых результатов может быть сделана на основании теоретического анализа рассеяния плоской звуковой волны безграничным упругим цилиндром.

Рассмотрим дифракцию плоской звуковой волны $p_i = \exp[ik\cos\theta \cdot \cos\varphi r + ik\sin\theta z]$ (здесь θ угол падения) при наклонном падении ее на безграничный упругий цилиндр кругового сечения, ось которого совпадает с осью z цилиндрической системы координат r, φ, z.

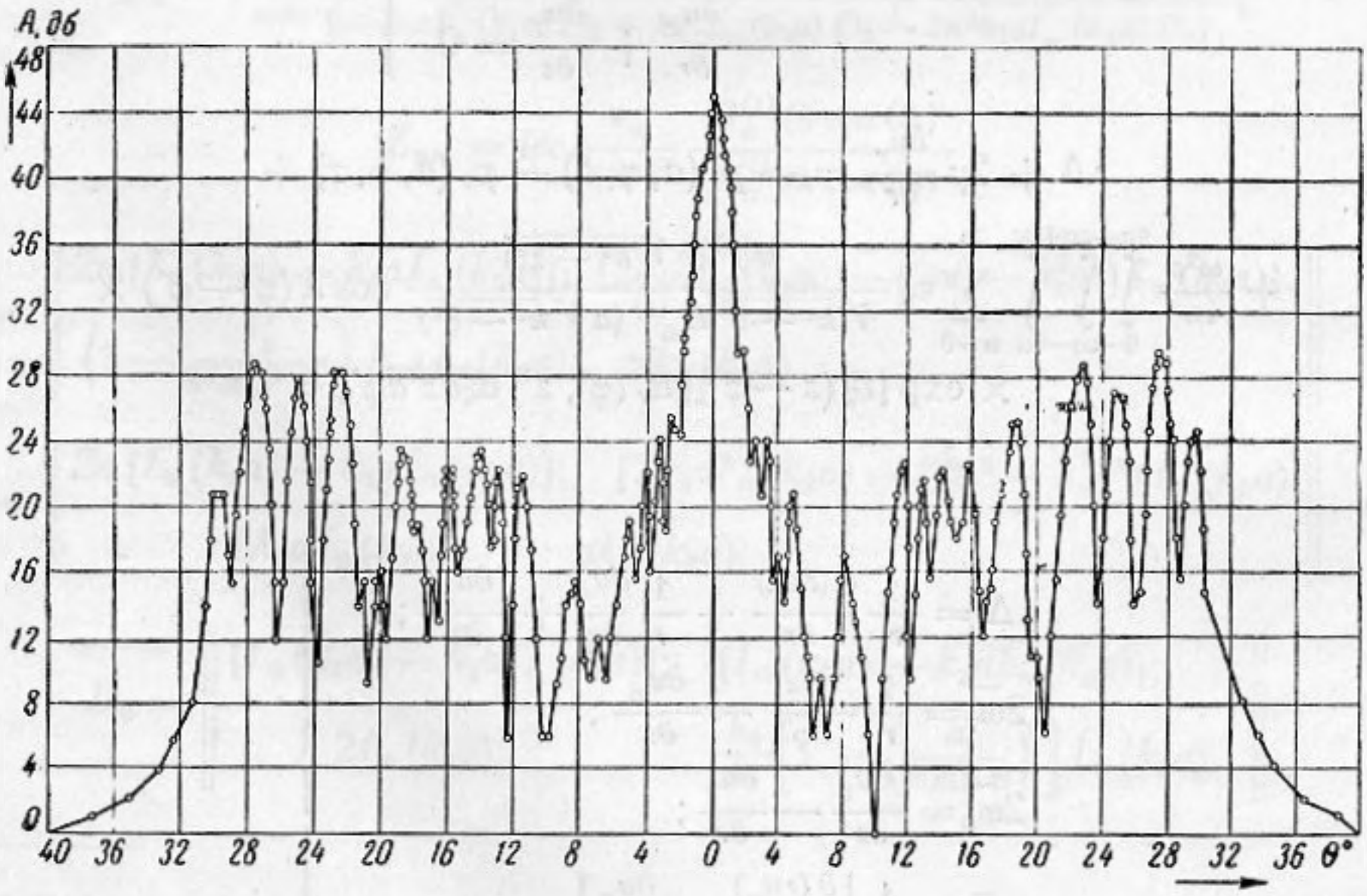
Введем функцию Грина $G(r/r', \varphi-\varphi', z-z')$, являющуюся решением уравнения $(\nabla^2 + k^2)G(r/r', \varphi-\varphi', z-z') = -\frac{\delta(r-r')}{r}\delta(\varphi-\varphi')\,\delta(z-z')$ при $\operatorname{Im} k > 0$, ограниченную всюду, кроме точки r', φ', z', и удовлетворяю-



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

щую на поверхности цилиндра условию $\partial G / \partial n = 0$:

$$G(r/a, \varphi - \varphi', z - z') = \frac{1}{4\pi^2 a} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \frac{H_n^{(1)}(r\sqrt{k^2 - \xi^2})}{\sqrt{k^2 - \xi^2}\, H_n'^{(1)}(a\sqrt{k^2 - \xi^2})} \times$$
$$\times \cos n(\varphi - \varphi') \exp[i\xi(z - z')]\, d\xi. \tag{1}$$

Тогда, воспользовавшись теоремой Грина, условием излучения и граничным условием равенства нормальных смещений на границе цилиндра с окружающей средой, решение волнового уравнения $(\nabla^2 + k^2)\, p = 0$ можно представить в виде:

$$p(r, \varphi, z) = p_i(r, \varphi, z) + p_r(r, \varphi, z) - \omega^2 \rho \int\limits_s G(r/a, \varphi - \varphi', z - z')\, u_r(\varphi', z') ds'. \tag{2}$$

Здесь s — поверхность цилиндра, $p_r(r, \varphi, z)$ — известная часть решения, описывающая поле рассеяния абсолютно жесткого цилиндра. Подставляя (1) и (2) в динамические уравнения [3] и учитывая краевые условия равенства на границе цилиндра с жидкостью касательных напряжений нулю, а нормального напряжения — внешнему давлению, рассматриваемую задачу можно свести к решению системы интегродифференциальных уравнений, относительно радиальных перемещений поверхности цилиндра

$$\left.\begin{aligned}
\rho_s \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} &= (\lambda + 2\mu)\frac{\partial \Delta}{\partial r} - \frac{2\mu}{r}\frac{\partial \bar{\omega}_z}{\partial \varphi} + 2\mu \frac{\partial \bar{\omega}_\varphi}{\partial z};\\
\rho_s \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial t^2} &= (\lambda + 2\mu)\frac{1}{r}\frac{\partial \Delta}{\partial \varphi} - 2\mu \frac{\partial \bar{\omega}_r}{\partial z} + 2\mu \frac{\partial \bar{\omega}_z}{\partial r};\\
\rho_s \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} &= (\lambda + 2\mu)\frac{\partial \Delta}{\partial z} - \frac{2\mu}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\bar{\omega}_\varphi) + \frac{2\mu}{r}\frac{\partial \bar{\omega}_r}{\partial \varphi}.
\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{u_\varphi}{r}\right) &= 0\\
\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} &= 0
\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

$$\lambda\Delta + 2\mu \frac{\partial u_r}{\partial r} = -p_i(a, \varphi, z) - p_r(a, \varphi, z) +$$
$$+ \frac{\omega^2 \rho}{4\pi^2} \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \frac{H_n^{(1)}(a\sqrt{k^2 - \xi^2})}{\sqrt{k^2 - \xi^2}\, H_n'^{(1)}(a\sqrt{k^2 - \xi^2})} \cos n(\varphi - \varphi') \times$$
$$\times \exp[i\xi(z - z')]\, u_r(\varphi', z')\, d\xi dz' d\varphi', \tag{5}$$

где

$$\left.\begin{aligned}
\Delta &= \frac{1}{r}\frac{\partial (r u_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_z}{\partial z};\\
2\bar{\omega}_r &= \frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial u_\varphi}{\partial z};\\
2\bar{\omega}_\varphi &= \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r};\\
2\bar{\omega}_z &= \frac{1}{r}\left[\frac{\partial (r u_\varphi)}{\partial r} - \frac{\partial u_r}{\partial \varphi}\right].
\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

В выражениях (2) — (6) и ниже: p — звуковое давление, $k = \frac{\omega}{c}$ — волновое число, ω — круговая частота, c — скорость звука в окружающей среде, ρ, ρ_s — плотность среды и материала цилиндра, u_r, u_φ, u_z — перемещения относительно осей координат, λ, μ — коэффициенты Ламэ, a — радиус цилиндра, $H_n^{(1)}(\alpha)$ и $I_n(\alpha)$ — функции Ганкеля и Бесселя первого рода. Штрих означает дифференцирование по аргументу $\tau = \frac{\omega^2 \rho_s a}{\mu}$, σ — коэффициент Пуассона.

Представляя перемещения и давления в виде рядов

$$\left.\begin{aligned} u_r(r, \varphi, z) &= \sum_{n=0}^{\infty} U_n(r) \cos n\varphi \exp[ik \operatorname{sm} \Theta z]; \\ u_\varphi(r, \varphi, z) &= \sum_{n=1}^{\infty} V_n(r) \sin n\varphi \exp[ik \sin \Theta z]; \\ u_z(r, \varphi, z) &= \sum_{n=0}^{\infty} W_n(r) \cos n\varphi \exp[ik \sin \Theta z]. \\ p_i(a, \varphi, z) + p_r(a, \varphi, z) &= \sum_{n=0}^{\infty} G_n \cos n\varphi \exp[ik \sin \Theta z] \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

и пользуясь для определения $U_n(r)$ методом [3], получим после подстановки значения $u_r(a, \varphi, z)$ в (2) для звукового поля выражение:

$$p(r, \varphi, z) = p_i(r, \varphi, z) + p_r(r, \varphi, z) +$$
$$+ \rho c \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n^2 i^n \frac{H_n^{(1)}(k \cos \Theta r)}{\cos^2 \Theta k \pi a [H_n^{(1)}(k \cos \Theta a)]^2 (Z_n + Z_{nn})} \cos n\varphi \exp[ik \sin \Theta z]. \quad (8)$$

В формуле (8) Z_n — механический импеданц цилиндра, Z_{nn} — импеданц излучения *,

$$Z_n = i \frac{2\mu}{\omega a} \frac{D_0}{[-k_1 a I_n'(k_1 a) D_1 + k_2 a I_n'(k_2 a) D_2 - 2n^2 k_1 a I_n(k_2 a) D_3]}, \quad (9)$$

$$Z_{nn} = i\rho c \frac{\varepsilon_n}{2\cos \Theta} \frac{H_n^{(1)}(k \cos \Theta a)}{H_n^{(1)\prime}(k \cos \Theta a)}. \quad (10)$$

$$D_1 = \begin{Vmatrix} 2n[I_n(k_2 a) - k_2 a I_n'(k_2 a)]; & [2k_2 a I_n'(k_2 a) - (2n^2 - k_2^2 a^2) I_n(k_2 a)]. \\ \left(1 - \frac{k_2^2}{k^2 \sin^2 \Theta}\right) k_2 a I_n'(k_2 a); & n I_n(k_2 a). \end{Vmatrix} \quad (11)$$

$$D_2 = \begin{Vmatrix} 2n[I_n(k_1 a) - k_1 a I_n'(k_1 a)]; & [2k_2 a I_n'(k_2 a) - (2n^2 - k_2^2 a^2) I_n(k_2 a)] \\ 2k_1 a I_n'(k_1 a); & n I_n(k_2 a). \end{Vmatrix} \quad (12)$$

$$D_3 = \begin{Vmatrix} [I_n(k_1 a) - k_1 a I_n'(k_1 a)]; & [I_n(k_2 a) - k_2 a I_n'(k_2 a)]; \\ 2 I_n(k_1 a); & \frac{k_2}{k_1}\left[1 - \left(\frac{k_2}{k \sin \Theta}\right)^2\right] I_n'(k_2 a). \end{Vmatrix} \quad (13)$$

---

* Таблицы импеданца излучения цилиндра приведены в [4].

$$D_0 = \begin{Vmatrix} \left[\left(n^2 - k_1^2a^2 - \frac{1}{2}\tau^2\frac{\sigma}{1-\sigma}\right) I_n(k_1a) - k_1a\, I'_n(k_1a)\right]; & [(n^2 - k_2^2a^2)\, I_n(k_2a) - \\ & - k_2aI'_n(k_2a)]; \\ n\,[I_n(k_1a) - k_2aI'_n(k_1a)]; & n\,[I_n(k_2a) - k_2aI'_n(k_2a)]; \\ k_1aI'_n(k_1a); & \left(\frac{1}{2} - \frac{k_2^2}{2k^2\sin^2\theta}\right) k_2aI'_n(k_2a); \\ & n\,[k_2aI'_n(k_2a) - I_n(k_2a)]; \\ & 2k_2aI'_n(k_2a) - (2n^2 - k_2^2a^2)\, I_n(k_2a); \\ & nI_n(k_2a); \end{Vmatrix} \tag{14}$$

$$k_1^2 = \frac{\omega^2\rho_s}{\lambda + 2\mu} - k^2\sin^2\Theta \tag{15}$$

и

$$k_2^2 = \frac{\omega^2\rho_s}{\mu} - k^2\sin^2\Theta. \tag{16}$$

Из выражения (18) видно, что поле рассеяния цилиндра представляет собой суперпозицию цилиндрических волн, амплитуды которых зависят от импеданца цилиндра Z_n. Если импеданц для всех форм колебаний оказывается бесконечно большим $Z_n \to \infty$ при $n = 0, 1, 2, \ldots$, то поле рассеяния, обусловленное колебаниями, отсутствует. Можно показать, что в другом крайнем случае, когда $Z_n = 0$ при $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$, полученное решение переходит в хорошо известное выражение, описывающее звуковое поле при рассеянии плоской волны абсолютно мягким цилиндром. Наконец, поле рассеяния упругого цилиндра может существенно отличаться от поля рассеяния абсолютно жесткого цилиндра, если импеданц одной или нескольких форм колебаний цилиндра окажется равным нулю. Это будет при выполнении условия

$$D_0 = 0. \tag{17}$$

Корни уравнения (17), как известно [5, 6], описывают скорости распространения нормальных волн в цилиндре. Так как скорости вынужденных колебаний в окружающей среде вдоль цилиндра и в цилиндре на границе равны и изменяются с изменением угла падения ($c_z = c/\sin\theta$), то механический импеданц Z_n оказывается равным нулю всякий раз, когда фазовая скорость в падающей волне вдоль цилиндра совпадает со скоростью одной из нормальных волн в цилиндре, то есть при углах падения, определяемых соотношением

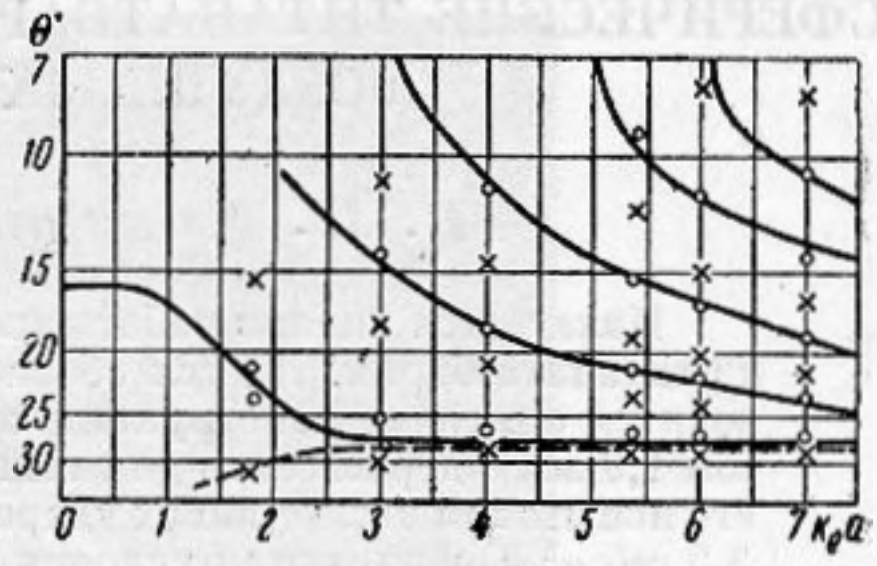
$$\sin\theta_n = \frac{c}{c_{z_n}} \tag{18}$$

где c_{z_n} — скорость нормальной волны номера n в цилиндре. Известно так же, что вдоль цилиндра могут распространяться нормальные волны двух типов — симметричные волны, аналогичные продольным волнам в сплошной среде, и антисимметричные волны, подобные волнам сдвига. Таким образом, всякий раз, когда падающая звуковая волна возбуждает в упругом цилиндре одну из свободных нормальных волн (симметричную или антисимметричную) поле рассеяния упругого цилиндра может существенно отличаться от поля рассеяния абсолютно жесткого цилиндра аналогичных размеров.*

* Возможен также случай, когда в цилиндре могут возбуждаться практически одновременно несколько нормальных волн. Это происходит при угле падения, когда фазовая скорость в падающей волне вдоль цилиндра совпадает со скоростью поверхностной волны в цилиндре, радиус которого велик по сравнению с длиной звуковой волны. В случае цилиндра большого радиуса скорости нормальных волн низких номеров практически совпадают со скоростью поверхностной волны.

На основании проведенного анализа можно сделать предположение, что и в случае рассеяния звука ограниченным цилиндром сильное незеркальное отражение звука должно наблюдаться всякий раз, когда в цилиндре возбуждается одна из свободных нормальных волн. Это предположение полностью подтверждается.

На фиг. 4 показаны результаты сопоставления углов незеркального отражения для алюминиевого цилиндра в воде, с теоретическими значениями, вычисленными на основании известных законов распространения нормальных волн в цилиндре. По горизонтальной оси отложены значения безразмерного параметра $k_l a = \omega a [\rho_в / E]^{1/2}$, характеризующего размеры цилиндра, по вертикальной — углы незеркального отражения. Кружочками и крестиками нанесены экспериментальные значения углов незеркального отражения. Линиями показаны теоретические кривые, представляющие собой по существу дисперсионные кривые для фазовых скоростей нормальных волн в упругом цилиндре, выраженные в угловом масштабе при помощи соотношения $\sin\theta = c/c_{zn}$. Сплошными линиями показаны зависимости, вычисленные на основании работы [6] и соответствующие симметричным нормальным волнам в цилиндре. Пунктиром показана зависимость, соответствующая антисимметричной нормальной волне, начальный участок которой при $k_l a < 1$ соответствует изгибной волне в тонком стержне. Эта нормальная волна, вместе с симметричной нормальной волной, начальный участок которой при $k_l a \leqslant 1$ соответствует продольной волне в тонком стержне, переходят при $k_l a > 1$ в поверхностную волну. Экспериментральные значения углов незеркального отражения, отмеченные кружочками, соответствуют симметричным нормальным волнам в цилиндре, отмеченные крестиками — антисимметричным волнам *. Таким образом, колебания упругого цилиндра могут играть существенную роль в рассеянии звука. В ряде случаев колебания цилиндра могут приводить к существенному изменению характеристики рассеяния, а в случае ограниченного цилиндра — к появлению значительного рассеяния в направлении, противоположном падающей волне.



Фиг. 4

Приношу глубокую благодарность С. Н. Рудакову за помощь в экспериментальной работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. М. Лямшев. Рассеяние звука твердым упругим цилиндром в жидкости. Отчет Акустического института АН СССР, 1957 г.
2. Л. М. Лямшев. Отражение звука тонкими пластинками и оболочками в жидкости. Изд-во АН СССР, М., 1955 г.
3. А. Ляв. Математическая теория упругости, ОНТИ НКТП, М.—Л., 1935, стр. 300—304.
4. M. Junger. The physical interpretation of the cutgoing wave in cylindrical coordinates, Физическое представление расходящейся волны в цилиндрических координатах. J. Acoust. Soc. America, 25, 1, 40—47 (1953).
5. G. Hudson, Dispersion of Elastic Waves in Solid Circular Cylinders, Дисперсия упругих волн в твердых круглых цилиндрах, Phys. Rev., 1, 46—51 (1953).
6. Hüter Th., Über die Fortleitung von Ultraschallen in festen Staben. Распространение ультразвука в твердых стержнях Zs. angew. Phys., 1, 275 (1949).

Акустический институт АН СССР
Москва

Поступила в редакцию
1 апреля 1958 г.

* Теоретические кривые углов незеркального отражения, соответствующие антисимметричным нормальным волнам, нами не рассчитывались, за исключением антисимметричной нормальной волны первого номера, ввиду значительной сложности расчетов.