АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том V 1959 Вып. 2

РАСЧЕТ ДИФРАКЦИИ СХОДЯЩЕЙСЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ НА ЦИЛИНДРЕ

И. Н. Каневский

Рассматривается дифракция сходящейся цилиндрической волны на бесконечном цилиндре, расположенном коаксиально с фронтом волны. Получено выражение для потенциала результирующего поля, а также асимптотическое выражение для интенсивности рассеянной волны и эффективного сечения рассеяния. Проведено сравнение со случаем рассеяния плоской волны на цилиндре, длина окружности которого мала по сравнению с длиной волны.

Рассмотрим бесконечную сходящуюся цилиндрическую волну, на оси которой расположен бесконечный цилиндр радиуса a; оси цилиндра фронта волны совпадают (см. фиг. 1). Потенциал в области оси системы в отсутствие цилиндра дается следующим выражением [1]:

$$\Phi_{\text{п}} = \sqrt{\frac{\pi f}{2k}}\, v_m \frac{2\alpha_m}{\pi} e^{-i\left(kf - \frac{3\pi}{4} + \omega t\right)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n e^{in\varphi} J_n(kr) \frac{\sin n\alpha_m}{n\alpha_m}. \tag{1}$$

Здесь α_m — угол раскрытия цилиндрического фронта, f — радиус кривизны фронта (фокусное расстояние цилиндрического концентратора). v_m — амплитуда скорости на расстоянии f от оси фронта (амплитуда нормальной колебательной скорости на поверхности концентратора), $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число, λ — длина волны в среде, ω—круговая частота колебаний, $J_n(kr)$ — функция Бесселя n-го порядка, r и φ — полярные координаты точки наблюдения с полюсом на оси цилиндрического фронта.

Отраженную от препятствия волну представим в виде

$$\Phi_{\text{о}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{in\varphi} H_n^{(1)}(kr)\, e^{-i\omega t}, \tag{2}$$

где $H_n^{(1)}(kr)$ — функция Ханкеля первого рода, n-го порядка; так как в дальнейшем будут рассматриваться функции Ханкеля только первого рода, индекс (1) опустим.

Рассмотрим решение для случая абсолютно жесткого цилиндрического препятствия. На его поверхности нормальная составляющая скорости обращается в нуль:

$$\left(\frac{\partial \Phi_{\text{п}}}{\partial r} + \frac{\partial \Phi_{\text{о}}}{\partial r}\right)_{r=a} = 0. \tag{3}$$

Определив при помощи (3) коэффициенты D_n, получим потенциал отраженной волны

$$\Phi_{\text{о}} = -\sqrt{\frac{\pi f}{2k}}\, v_m \frac{2\alpha_m}{\pi} e^{-i\left(kf - \frac{3\pi}{4} + \omega t\right)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n \frac{\sin n\alpha_m}{n\alpha_m} e^{in\varphi} \frac{J_n'(ka)}{H_n'(ka)} H_n(kr). \tag{4}$$

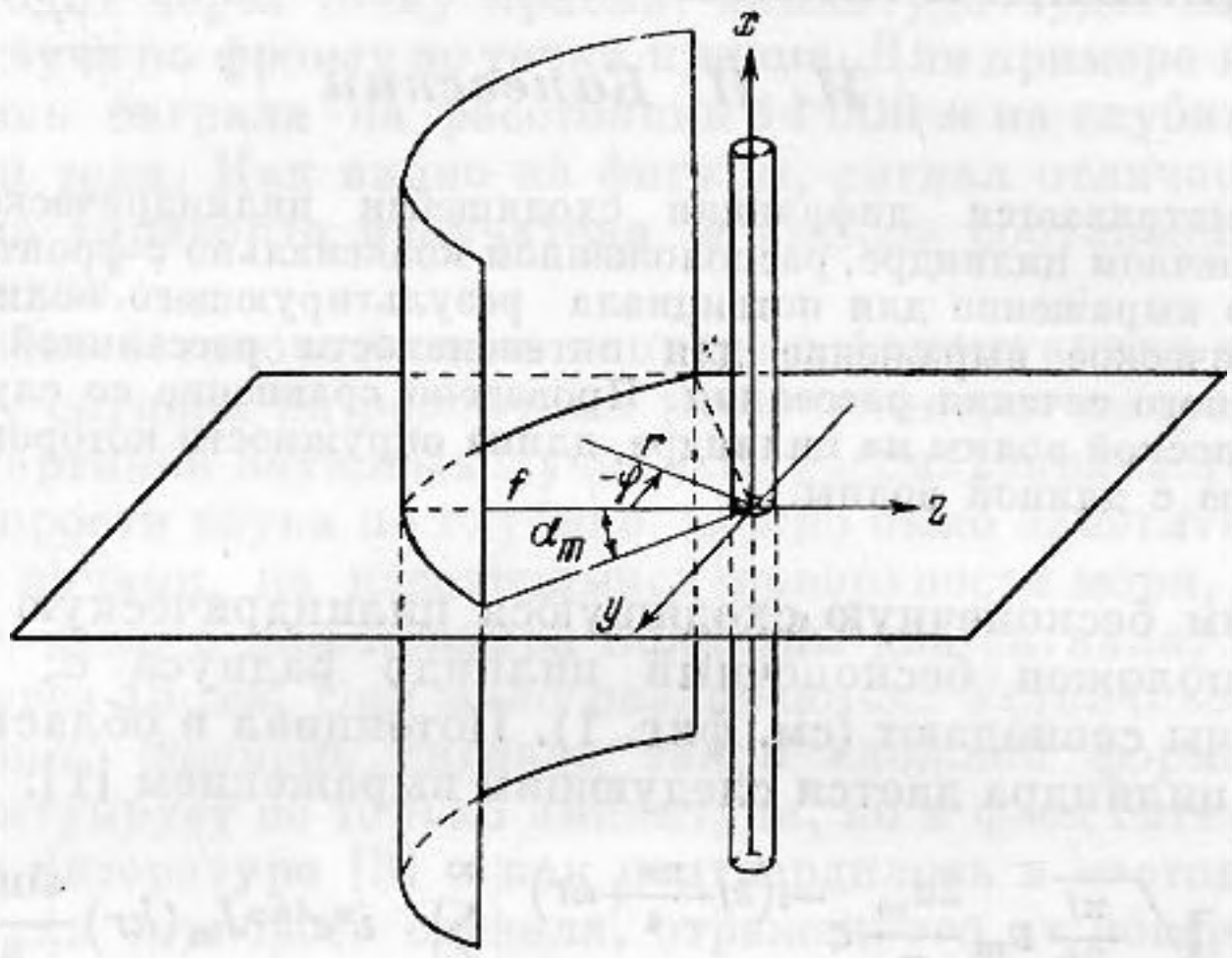
Здесь и в дальнейшем штрих означает производную по аргументу ka (или kr).

Полный потенциал выражается так:

$$\Phi = \sqrt{\frac{\pi f}{2k}}\, v_m \frac{2\alpha_m}{\pi} e^{-i\left(kf+\frac{\pi}{4}+\omega t\right)} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n i^n \frac{\sin n\alpha_m}{n\alpha_m} \cos n\varphi \left[J_n(kr) - \right.$$

$$\left. - \frac{J'_n(ka)}{H'_{n(ka)}} H_n(kr) \right],$$

где $\varepsilon_n = 1$ при $n = 0$ и $\varepsilon_n = 2$ при $n \neq 0$.



Фиг. 1

После несложных преобразований можно получить выражение для модуля полного потенциала в виде, наиболее удобном для численных расчетов:

$$|\Phi| = \sqrt{\frac{\pi f}{2k}}\, v_m \frac{2\alpha_m}{\pi} \left\{ \left[\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \frac{\sin n\alpha_m}{n\alpha_m} \cos n\varphi \left(A_n \cos n\frac{\pi}{2} + B_n \cos(n+1)\frac{\pi}{2} \right) \right] + \right.$$

$$\left. + \left[\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \frac{\sin n\alpha_m}{n\alpha_m} \cos n\varphi \left(A_n \sin n\frac{\pi}{2} + B_n \sin(n+1)\frac{\pi}{2} \right]^2 \right\}^{1/2}, \qquad (5)$$

где

$$A_n = \alpha_m(ka) J_n(kr) - \beta_n(ka) N_n(kr),$$
$$B_n = \beta_n(ka) J_n(kr) - \rho_n(ka) N_n(kr), \qquad (6)$$

причем

$$\beta_n(ka) = \frac{J'_n(ka) N'_n(ka)}{[J'_n(ka)]^2 + [N'_n(ka)]^2}, \quad \alpha_m(ka) = 1 - \rho_n(ka)$$

$$\rho_n(ka) = \frac{[J'_n(ka)]^2}{[J'_n(ka)]^2 + [N'_n(ka)]^2}, \qquad (7)$$

где $N_n(ka)$ — функция Неймана n-го порядка.

Радиальная составляющая скорости выражается так:

$$v_r = -\frac{\partial \Phi}{\partial r} = \sqrt{\frac{\pi f}{2k}}\, v_m \frac{2k\alpha_m}{\pi} e^{-i\left(kf+\frac{\pi}{4}+\omega t\right)} \times$$

$$\times \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n i^n \frac{\sin n\alpha_m}{n\alpha_m} \cos n\varphi \left[J'_n(kr) - \frac{J'_n(ka)}{H'_n(ka)} H'_n(kr) \right],$$

или по модулю

$$|v_r| = \sqrt{\frac{\pi f}{2k}}\, v_m \frac{2k\alpha_m}{\pi}\left\{\left[\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon_n \frac{\sin n\alpha_m}{n\alpha_m}\cos n\varphi\left(A'_n\cos n\frac{\pi}{2}+B'_n\cos(n+1)\frac{\pi}{2}\right)\right]^2+\right.$$

$$\left.+\left[\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon_n \frac{\sin n\alpha_m}{n\alpha_m}\cos n\varphi\left(A'_n\cos n\frac{\pi}{2}+B'_n\sin(n+1)\frac{\pi}{2}\right)\right]^2\right\}^{1/2}, \qquad (8)$$

где $A'_n = \alpha_m(ka)J'_n(kr) - \beta_n(ka)N'_n(kr)$, $B'_n = \beta_n(ka)J'_n(kr) - \rho_n(ka)N'_n(kr)$, а $\alpha_n(ka)$, $\beta_n(ka)$ и $\gamma_n(ka)$ даются выражениями (7).

Рассмотрим теперь потенциал отраженной волны. Для расчетов удобно воспользоваться следующим равенством [2]:

$$\frac{J'_n(ka)}{H'_n(ka)} = \varepsilon_n \sin\gamma_n e^{i(\pi/2-\gamma_n)}, \qquad (9)$$

где

$$\gamma_n = \operatorname{arc\,tg}\frac{J_{n+1}(ka)-J_{n-1}(ka)}{N_{n-1}(ka)-N_{n+1}(ka)},$$

$$\varepsilon_n = \begin{cases} 1 & \text{при } n=0 \\ 2 & \text{при } n\neq 0. \end{cases}$$

Вводя (9) в (4), представим потенциал отраженной волны в следующем виде:

$$\Phi_0 = \sqrt{\frac{\pi f}{2k}}\, v_m \frac{2\alpha_m}{\pi} e^{-i\left(kf-\frac{\pi}{4}+\omega t\right)} \sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon_n^2 \frac{\sin n\alpha_m}{n\alpha_m}\cos n\varphi\cdot\sin\gamma_n e^{i\left(n\frac{\pi}{2}-\gamma_n\right)} H_n(kr).$$

На достаточно больших расстояниях от оси системы применимо асимптотическое представление функции Ханкеля:

$$H_n(kr) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi kr}}\, e^{i\left(kr-n\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}.$$

Тогда

$$\Phi_0 = \sqrt{\frac{f}{r}}\cdot\frac{2\alpha_m}{\pi k} v_m \sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon_n^2 \frac{\sin n\alpha_m}{n\alpha_m}\cos n\varphi\cdot\sin\gamma_n e^{i[k(r-f)-\gamma_n-\omega t]}.$$

Так как отраженная волна рассматривается на достаточно больших расстояниях от оси системы, то интенсивность

$$I = \frac{\overline{p^2}}{2\rho c} = \frac{2f\rho c v_m^2\alpha_m^2}{\pi^2 r}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\varepsilon_n^2\varepsilon_q^2 \frac{\sin n\alpha_m}{n\alpha_m}\cdot\frac{\sin q\alpha_m}{q\alpha_m}\times$$

$$\times\sin\gamma_n\cdot\sin\gamma_q\cdot\cos n\varphi\cdot\cos q\varphi\cdot\cos(\gamma_n-\gamma_q), \qquad (10)$$

где p — амплитуда давления в отраженной волне.

Если длина окружности цилиндра мала по сравнению с длиной волны ($ka \ll 1$), то

$$\gamma_0 \approx \pi\left(\frac{ka}{2}\right)^2, \quad \gamma_n \approx -\frac{n\pi}{(n!)^2}\left(\frac{ka}{2}\right)^{2n}. \qquad (11)$$

В этом случае в (10) можно ограничиться нулевым и первым членами ряда; используя (11) и первые члены разложения в ряд синуса и косинуса, получим приближенное выражение для интенсивности отраженной волны:

$$I \approx \frac{2\rho c v_m^2 f\alpha_m^2}{r}\left(\frac{ka}{2}\right)^4\left[1-4\frac{\sin\alpha_m}{\alpha_m}\cdot\cos\varphi\right]^2.$$

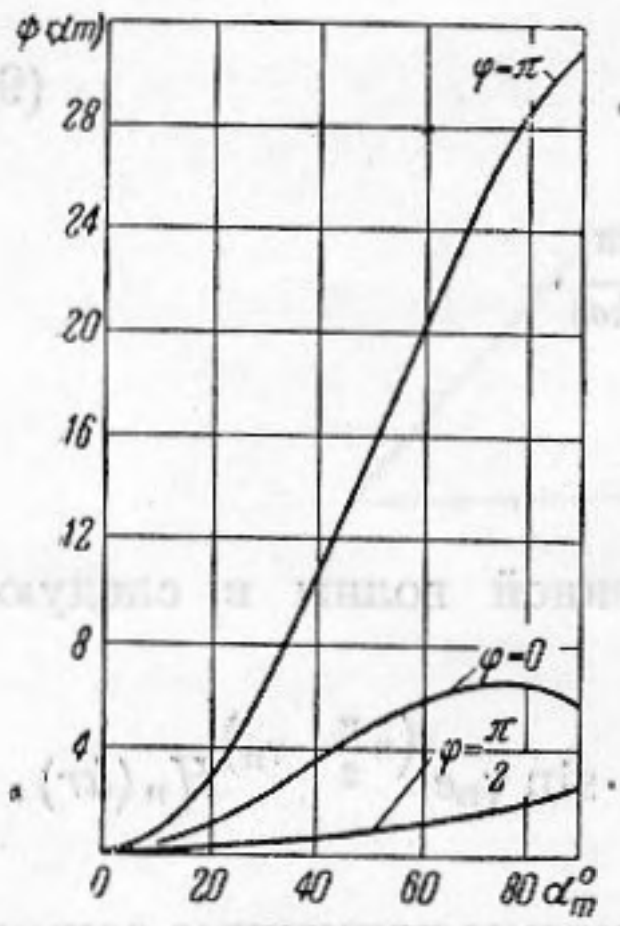
У поверхности цилиндра интенсивность подающей сходящейся волны равна

$$I_{\text{п}} = \frac{\rho c v_m^2}{2} \frac{f}{a}. \tag{12}$$

Тогда отношение интенсивности рассеянной волны к интенсивности падающей волны принимает вид:

$$I_{\text{о.ц}} = \frac{a}{r} \frac{k^4 a^4}{4} \alpha_m^2 \left[1 - 4 \frac{\sin \alpha_m}{\alpha_m} \cos \varphi \right]^2. \tag{13}$$

Сравним интенсивности рассеяния цилиндром сходящейся цилиндрической волны и плоской волны. Как известно, интенсивность волны, рассеянной цилиндром, при падении на него плоской волны равна [2]



Фиг. 2

$$I_0 = \frac{\rho c v_m^2}{2} \frac{\pi a}{r} \left(\frac{ka}{2}\right)^3 [1 - 2\cos \varphi]^2,$$

а средняя (по пространству) интенсивность падающей волны у поверхности цилиндра будет $\rho c v_m^2/\pi$. Тогда отношение интенсивности рассеянной волны к интенсивности падающей волны выразится так:

$$I_{\text{о.п}} = \frac{\pi^2 k^3 a^4}{16 r} [1 - 2 \cos \varphi]^2. \tag{14}$$

Выражения в квадратных скобках в формулах (13) и (14), определяющие зависимость интенсивности от азимутальной координаты, подобны по своей структуре, однако в случае рассеяния цилиндрической волны во втором слагаемом добавляется множитель $2(\sin \alpha_m/\alpha_m)$, определяющий зависимость интенсивности от угла раскрытия цилиндрического фронта. Естественно, что в случае рассеяния плоской волны этого множителя нет. Что касается сравнения частотных зависимостей, то здесь результаты существенно различны: в случае рассеяния цилиндрической волны интенсивность отраженной волны пропорциональна четвертой степени частоты; при рассеянии плоской волны она пропорциональна третьей степени частоты.

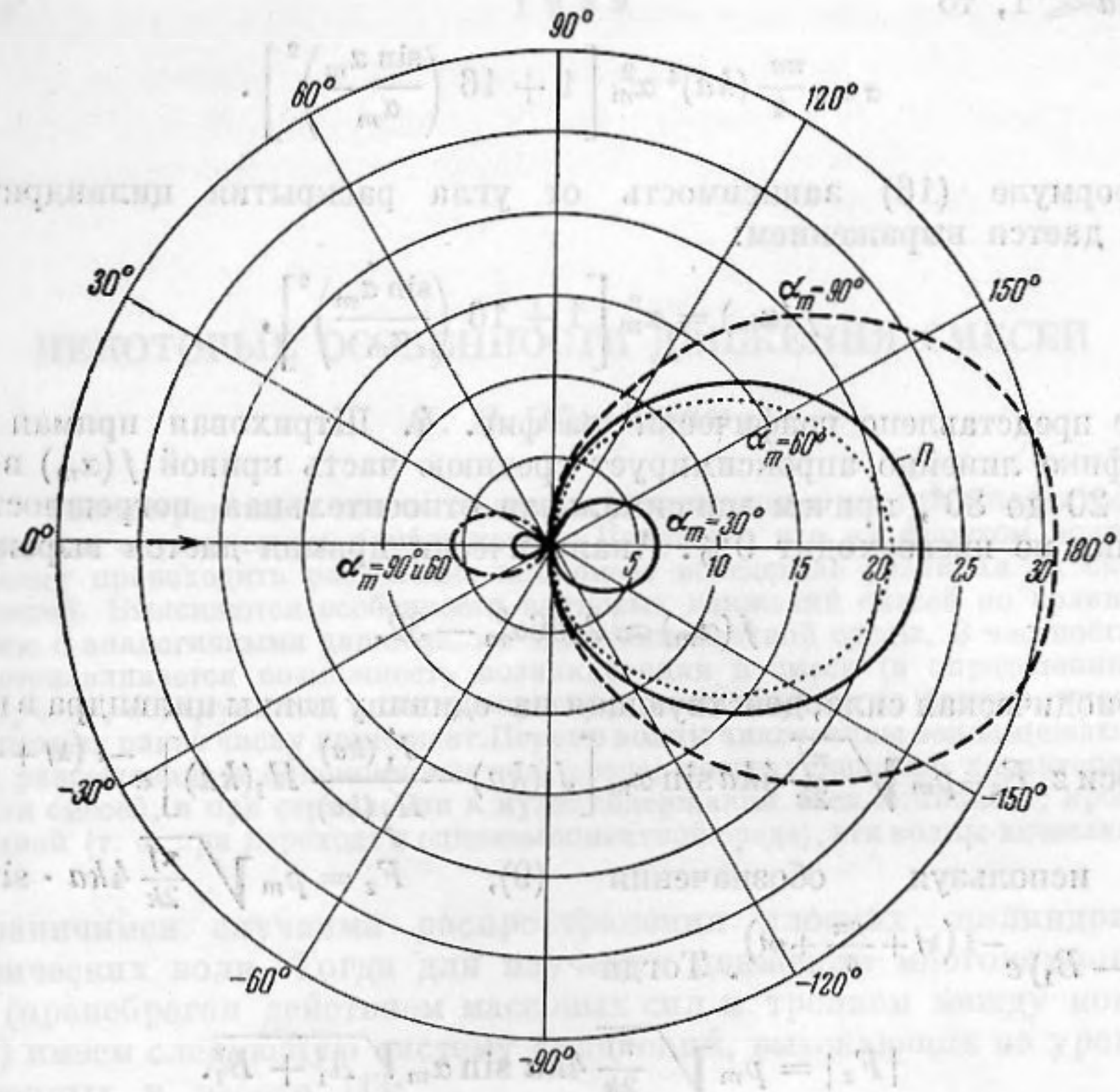
Зависимость интенсивности рассеянной волны от угла раскрытия цилиндрического фронта дается выражением:

$$\Psi(\alpha_m) = \alpha_m^2 \left[1 - 4 \frac{\sin \alpha_m}{\alpha_m} \cos \varphi \right]^2.$$

Графики этой зависимости для трех значений азимутальной координаты φ представлены на фиг. 2. Из графиков видно, что интенсивность рассеянной волны растет монотонно с увеличением α_m в направлениях $\varphi = \pi$ и $\varphi = \pi/2$ и проходит через максимум при $\alpha_m \approx 75°30'$ в направлении $\varphi = 0$. Рассеянная волна обладает наибольшей интенсивностью в направлении $\varphi = \pi$, т. е. рассеяние максимально в направлении падения сходящейся волны.

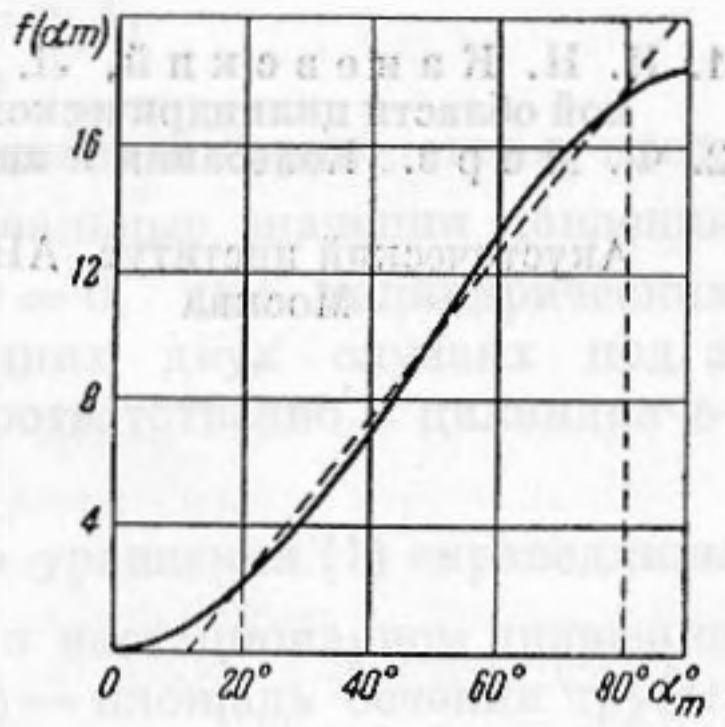
Интересно отметить, что для рассматриваемых значений угла раскрытия цилиндрического фронта α_m при $ka \ll 1$ всегда существует такое направление φ_0, при котором интенсивность рассеянной волны обращается в нуль, причем это направление лежит в пределах $-\pi/2 < \varphi_0 < \pi/2$. Действительно, $I = 0$, если выполняется условие:

$$\frac{\sin \alpha_m}{\alpha_m} = \frac{1}{4 \cos \varphi}, \tag{15}$$



Фиг. 3

Так как α_m изменяется в пределах $0 \leqslant \alpha_m < \pi/2$, то $\sin\alpha_m/\alpha_m > 0$, поэтому уравнение (15) имеет действительные корни лишь при $-\pi/2 < \varphi < \pi/2$. Из (15) следует, что чем меньше угол раскрытия α_m, тем меньше должен быть угол $|\varphi|$ между осью z и направлением на точку наблюдения, при котором интенсивность рассеянной волны обращается в нуль. На фиг. 3 приведены полярные диаграммы интенсивности рассеянной волны для значений углов раскрытия цилиндрического фронта $\alpha_m = 30$, 60 и 90°. Эти диаграммы построены при помощи выражения (13). Для сравнения на той же фигуре показана диаграмма рассеяния плоской волны (П). Все диаграммы построены в предположении, что интенсивность рассеянной волны рассматривается на одном и том же расстоянии r от оси цилиндра, а падающая волна дифрагирует на одинаковых цилиндрах радиуса a. При количественном сравнении необходимо значения полярного радиуса, полученного из диаграммы, умножить на ka. Стрелкой на фиг. 3 указано направление распространения падающих волн.



Фиг. 4

Найдем эффективное сечение рассеяния σ. По определению, эффективное сечение равно отношению рассеянной мощности к плотности потока энергии в падающей волне. Поэтому

$$\sigma = \frac{4a\alpha_m^2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \overline{\varepsilon_n^4} \left(\frac{\sin n\alpha_m}{n\alpha_m}\right)^2 \sin^2\gamma_n.$$

Если $ka \ll 1$, то

$$\sigma \approx \frac{\pi a}{4}(ka)^4 \alpha_m^2 \left[1 + 16\left(\frac{\sin \alpha_m}{\alpha_m}\right)^2\right]. \tag{16}$$

В формуле (16) зависимость от угла раскрытия цилиндрического фронта дается выражением:

$$f(\alpha_m) = \alpha_m^2 \left[1 + 16\left(\frac{\sin \alpha_m}{\alpha_m}\right)^2\right],$$

которое представлено графически на фиг. 4. Штриховая прямая линия на графике линейно апроксимирует среднюю часть кривой $f(\alpha_m)$ в пределах от 20 до 80°, причем максимальная относительная погрешность приближения не превосходит 9%. Аналитически прямая дается выражением:

$$f(\alpha_m) \approx 2{,}66\alpha_m^0 - 32.$$

Периодическая сила, действующая на единицу длины цилиндра в направлении оси z, $F_z = p_m \sqrt{\frac{\pi f}{2k}}\, 4ka \sin \alpha_m \left[J_1(ka) - \frac{J_1'(ka)}{H_1'(ka)} H_1(ka)\right] e^{-i\left(kf + \frac{\pi}{4} + \omega t\right)}$, или, используя обозначения (9), $F_z = p_m \sqrt{\frac{\pi f}{2k}}\, 4ka \cdot \sin \alpha_m \times \times (iA_1 - B_1) e^{-i\left(kf + \frac{3\pi}{4} + \omega t\right)}$. Тогда

$$|F_z| = p_m \sqrt{\frac{\pi f}{2k}}\, 4ka \sin \alpha_m \sqrt{A_1^2 + B_1^2}.$$

В заключение выражаю глубокую благодарность Л. Д. Розенбергу и Г. Д. Малюжинцу за большое внимание и интерес к данной работе, а также А. Е. Вильнеру и Т. М. Наместниковой за обсуждение некоторых результатов и критические замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. Н. Каневский, Л. Д. Розенберг. Расчет звукового поля в фокальной области цилиндрической фокусирующей системы. Акуст. ж., 1957, 3, 1, 46—61.
2. Ф. Морз. Колебания и звук. М., Гостехиздат, 1949.

Акустический институт АН СССР
Москва

Поступила в редакцию
9 мая 1958 г.