

ОТРАЖЕНИЕ И ПРЕЛОМЛЕНИЕ ЗВУКА НА УДАРНЫХ ВОЛНАХ

В. М. Которович

Рассматривается отражение и преломление малых возмущений, главным образом звуковых, на поверхностях разрыва в произвольной жидкости или газе*. На разрыве предполагаются выполняющимися условия Рэнкина — Гюгонио. Найдены коэффициенты отражения и прохождения звука, в простой геометрической форме представлены законы отражения и преломления. Приведены данные, которые могут быть получены при помощи звуковой «локации» разрывов.

Малые возмущения поверхности разрыва изучались в ряде работ по устойчивости поверхностей разрыва [2—6]. При этом выясняется судьба разрыва при возникновении в потоке, или на самом разрыве возмущения. Имеется и другая сторона вопроса: какова дальнейшая судьба возмущений, падающих на устойчивый разрыв.

Мы будем рассматривать плоские стационарные ударные волны, распространяющиеся в бесконечной невязкой жидкости, и падение на них монохроматической звуковой волны с волновым вектором \mathbf{k} , произвольно ориентированным относительно нормали к поверхности разрыва. Требуется найти все исходящие от разрыва возмущения, их волновые векторы (т. е. законы отражения или преломления) и отношение их амплитуд к амплитуде падающей волны. Исследование на устойчивость, как известно, приводит к неравенствам $v < s$, $\bar{v} > \bar{s}$, где v — скорость жидкости в системе, где прямая ударная волна покоится, s — скорость звука. Величины с чертой относятся к полупространству $\bar{\Pi}$, на которое набегаёт ударная волна, без черты — к полупространству Π , которое ударная волна оставляет за собой. Отсюда следует, что имеются две возможные постановки задачи. Звуковая волна падает из Π на передний фронт ударной волны, движущейся со сверхзвуковой скоростью. В силу этого, отражённая волна возникнуть не может. За поверхностью разрыва в Π возникает возмущение, содержащее прошедшую звуковую волну (прохождение звука через разрыв). Относительно $\bar{\Pi}$ ударная волна совершает дозвуковое движение, и возможно падение звука со стороны сжатой среды на разрыв. При этом не может образоваться прошедшая волна, а в возникающем возмущении присутствует отражённый звук (отражение звука от разрыва).

Прохождение звука через ударную волну при нормальном падении для случая идеального газа рассматривали Блохинцев [7] и Бургерс [8], которыми было показано (см. также [9]), что кроме прошедшей звуковой волны возникает так называемая энтропийная волна, представляющая собой возмущение энтропии, переносимое с током жидкости. Наклонное падение звука на ударные волны в идеальном газе (прохождение и отражение) рассматривалось Бриллюэном [10]. Им не учитывалась, однако, деформация поверхности разрыва падающей звуковой волной, что привело к ошибочным результатам при определении возникающих возмущений и их амплитуд. В настоящей работе рассматривается отражение и прелом-

* Краткое сообщение о результатах настоящей работы содержится в [1].

ление звука на ударных волнах в произвольной жидкости. Обсуждаются сведения о разрыве, которые можно получить по доплеровскому сдвигу частоты и коэффициентам отражения и прохождения звука. Рассматривается падение на ударные волны незвуковых возмущений*.

1. Отражение и преломление звука

Наряду с системой отсчета I, где невозмущенный разрыв покоится, введем системы II и III, в которых соответственно покоится невозмущенная среда в II и III. Ось y направим по нормали к разрыву в направлении гидродинамической скорости v . В системах I, II, III непрерывные на разрыве касательные компоненты скорости равны нулю.

Вследствие эффекта Доплера угол отражения от ударной волны $\theta^{(0)}$ не равен углу падения $\theta^{(n)}$, а отношение синусов угла падения $\bar{\theta}$ и угла преломления θ является функцией угла. Пусть волновой вектор звуковой волны \mathbf{k} лежит в плоскости xy , ω — частота звука в системе I. Зависимость ω от \mathbf{k} с учетом эффекта Доплера имеет вид [12]:

$$\omega - k_y v = s \sqrt{k_x^2 + k_y^2} = \omega_0 \quad [(1)]$$

(в III над всеми величинами ставим черту), где ω_0 и $\bar{\omega}_0$ — частоты колебаний соответственно в системах II и III. Выразим эти соотношения через угол $\theta = \arctg k_x/k_y$ и число Маха $M = v/s$. Мы считаем θ изменяющимся от 0 до π . Обычному определению угла падения (отражения) соответствует угол ϑ , приведенный в интервал $0, \pi/2$. При $\theta > \pi/2$ $\vartheta = \pi - \theta$. Закон отражения получаем, приравнявая ω и k_x для падающей и отраженной волны. Заметим, что для малых возмущений линеаризованные граничные условия должны удовлетворяться на плоскости невозмущенного разрыва. Отсюда, как и на обычной поверхности раздела [9], следует непрерывность тангенциальных компонент волнового вектора и частоты ω (в системе координат, где разрыв покоится) вне зависимости от конкретного вида граничных условий.

Закон отражения содержится в равенстве:

$$(1 + M \cos \theta^{(n)}) / M \sin \theta^{(n)} = (1 + M \cos \theta^{(0)}) / M \sin \theta^{(0)}. \quad (2)$$

Аналогично, закон преломления содержится в равенстве:

$$v(1 + M \cos \theta) / M \sin \theta = \bar{v}(1 + \bar{M} \cos \bar{\theta}) / \bar{M} \sin \bar{\theta}. \quad (3)$$

(2) и соответственно (3) представляют собой квадратные уравнения, при помощи которых можно выразить тригонометрические функции угла отражения или преломления через функции угла падения [10]. Законам отражения и преломления можно, однако, придать гораздо более удобный вид, если ввести угол ψ между направлением волнового вектора \mathbf{k} и скоростью звука $v + s$ в системе I, где разрыв покоится (фиг. 1):

$$\operatorname{ctg} \psi = \frac{\omega}{k_x v} = (1 + M \cos \theta) / M \sin \theta. \quad (4)$$

Закон отражения принимает вид:

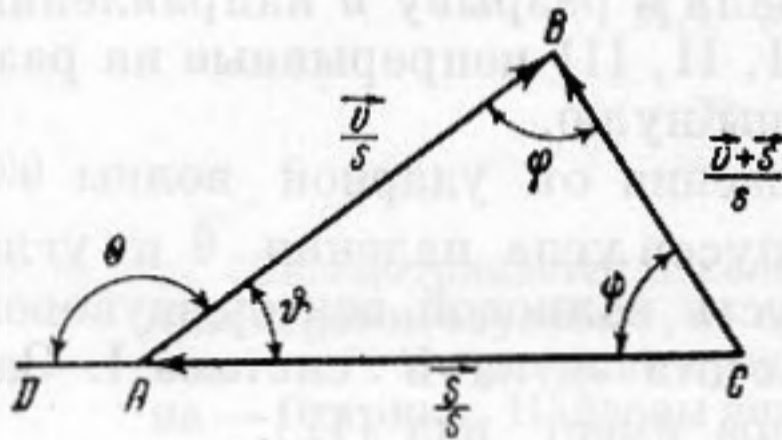
$$\psi^{(n)} = \psi^{(0)}. \quad (5)$$

* После того, как была сдана в печать заметка [1], вышла из печати работа Дьякова [11], где в рамках двумерной стационарной задачи построена теория столкновения слабых разрывов (в том числе и акустического типа) с ударными волнами. Нетрудно видеть, что выбором системы отсчета можно свести задачу о падении на ударную волну плоской монохроматической звуковой волны к двумерной стационарной задаче. Таким образом, ввиду отсутствия дисперсии, формулы для коэффициентов прохождения и отражения звука, выраженных через производные по адиабате Гюгонио (см. (5) заметки [1]), а также область резонанса, где эти коэффициенты обращаются в бесконечность, совпадают с полученными в работе Дьякова [11] для падающих возмущений, описываемых функциями Хевисайда. Сравнение с работой Дьякова приводится ниже.

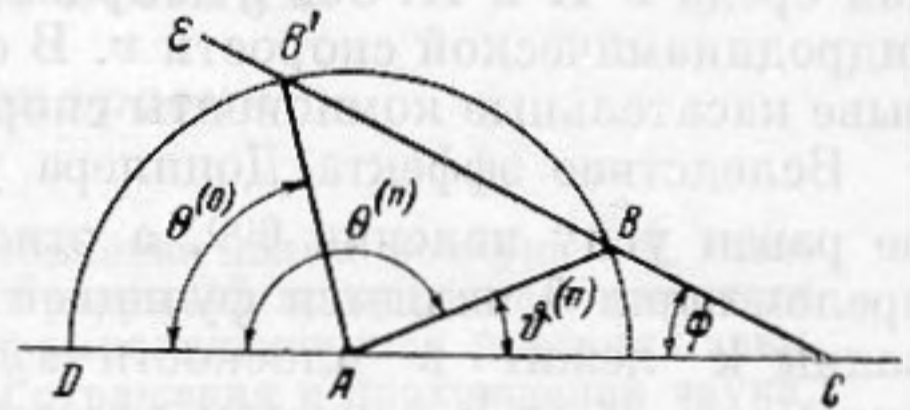
Закон преломления

$$\operatorname{tg} \psi / \operatorname{tg} \bar{\psi} = v/\bar{v}. \quad (6)$$

Из (5) следует элементарное построение угла отражения (фиг.2). Угол падения $\vartheta^{(n)}$ всегда меньше угла отражения, звуковой луч при отражении отклоняется от нормали к поверхности разрыва (в системе II). Заметим, что угол φ (фиг. 1) между скоростью звука в системе I $\bar{v} + s$ и скоростью v имеет смысл угла падения, определяемого по полной скорости звука в I. Очевидно, $\psi = \theta - \varphi$. Если понимать под φ его приве-



Фиг. 1



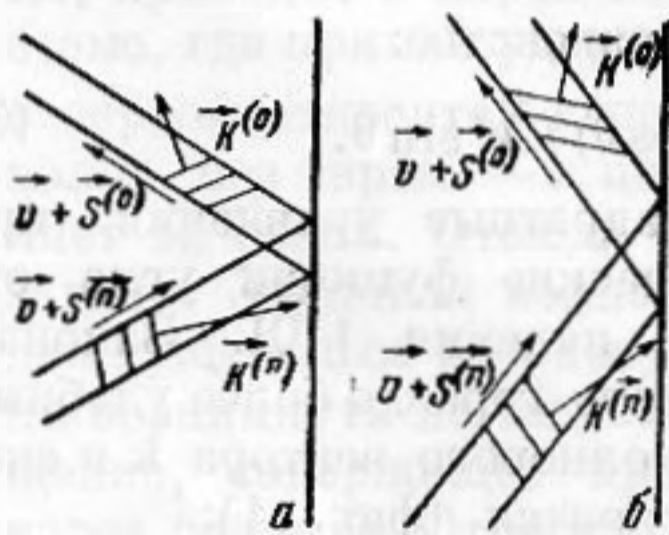
Фиг. 2

Фиг. 1. Треугольник Маха. Ось y направлена по скорости v

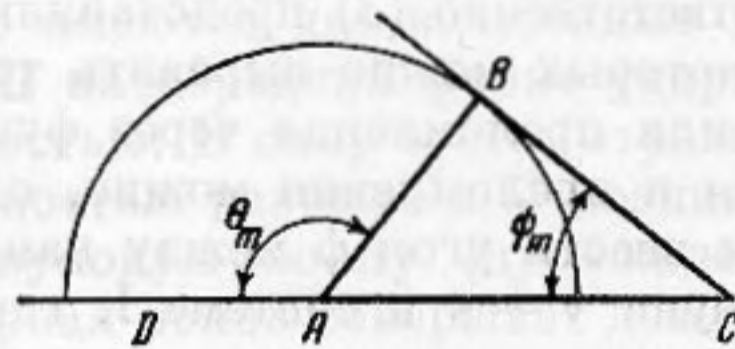
Фиг. 2. Построение треугольника Маха для отраженной волны, $\psi = \psi^{(n)} = \psi^{(0)}$; $AC = 1$. Окружность радиуса $M\varphi^{(n)} = \angle ABC$, $\varphi^{(0)} = \angle AB'C$. Приведенному в интервал острых углов $\varphi^{(n)}$ соответствует $\angle B'BA$

денное в интервал $0, \pi/2$ значение, то из (5) следует $\varphi^{(n)} = \varphi^{(0)}$ (фиг. 2). Таким образом, с точки зрения наблюдателя системы I, отражение звукового луча будет зеркальным, но с изменившимся значением скорости и незеркальным поворотом фазового фронта (фиг. 3, а, б).

С ростом $\vartheta^{(n)}$ растет ψ и $\theta^{(0)}$. Для $\psi > \operatorname{arctg} M$ $\theta^{(0)} > \pi/2$ (фиг. 4), что соответствует движению отраженной волны относительно неподвижной жидкости (система II) в ту же сторону, куда двигалась падающая волна ($k_y^{(0)} < 0$ так же как и $k_y^{(n)}$) и куда движется сам разрыв (фиг. 3, б). Падающая волна догоняет разрыв, а отраженная как бы отстает от него, продолжая двигаться в том же направлении, с точки зрения наблюдателя системы II. При дальнейшем увеличении ψ скорости падающей



Фиг. 3



Фиг. 4

Фиг. 3. Треугольник Маха для предельного угла падения $AC=1, AB=M$

Фиг. 4. Отражение звукового луча в системе I, движущейся вместе с ударной волной. В случае б) отраженная волна движется в том же направлении относительно покоящейся сжатой среды, что и сама ударная волна

и отраженной волн стремятся друг к другу и совпадают при максимально возможном $\vartheta_m = \operatorname{arcsin} M$. Соответствующие предельные значения $\vartheta^{(0)}$ и $\vartheta^{(n)}$ совпадают и равны $\vartheta_m = \operatorname{arccos} M$ (фиг. 3). Таким образом, углы падения меняются в пределах

$$0 \leq \vartheta^{(n)} < \operatorname{arccos} M. \quad (7)$$

Углу ϑ_m соответствует проекция скорости звука на нормаль к разрыву, равная скорости разрыва. Для $\vartheta^{(n)} > \vartheta_m$ звуковая волна не может до-

гнать разрыв. В этом содержание неравенства (7). Отметим, что значению ψ_m соответствует $\varphi = \pi/2$.

Рассмотрим теперь преломление звука. $\text{tg } \bar{\psi}$ меняется, очевидно, в пределах $0, \infty$. В этих же пределах, согласно закону (6), должен меняться и $\text{tg } \psi$. С ростом $\bar{\psi}$ от 0 до $\bar{\psi}_m = \text{arc tg } (\bar{v}/v M / \sqrt{1 - M^2}) \psi$ растёт от 0 до ψ_m , а угол преломления θ — соответственно от 0 до θ_m . Значения $|\text{tg } \bar{\psi}| > |\text{tg } \bar{\psi}_m|$ соответствуют комплексным значениям θ , при которых прошедшая звуковая волна вырождается в поверхностную волну, бегущую вдоль разрыва и затухающую в глубь жидкости. Поверхностные волны были найдены в работе Бриллюэна [10] («сопровождающие волны»). Они приходят на смену бегущей волне, когда $\text{tg}^2 \psi > \text{tg}^2 \psi_m$, или в размерных величинах

$$\omega^2 < k_x^2 (s^2 - v^2) \quad (8)$$

и система уравнений для ω_0 и k_y

$$\omega - k_y v = \omega_0, \quad \omega_0^2 = s^2 (k_x^2 + k_y^2) \quad (9)$$

не имеет вещественных решений в II. При выполнении (8) для решения, удовлетворяющего условию на $+\infty$, имеем

$$k_y/k_x = \text{tg}^2 \psi_m (-\text{ctg } \psi + \frac{i}{M} \sqrt{\text{ctg}^2 \psi_m - \text{ctg}^2 \psi}). \quad (10)$$

Из соотношения для прошедших волн ($\varphi \equiv \theta - \psi$)

$$M \sin \varphi = \sin \psi \quad (11)$$

следует, что $\sin \varphi$ у поверхностной волны ($\sin \psi > M$) остается вещественным, но становится большим единицы. Соответственно $\cos \varphi$ чисто мнимый

$$\cos \varphi = i \sin \psi \sqrt{\text{ctg}^2 \psi_m - \text{ctg}^2 \psi}. \quad (12)$$

2. Смещение частоты

Вследствие эффекта Доплера частота отраженного или прошедшего через ударную волну сигнала окажется несколько смещенной. Будем считать, что как приемник, так и передатчик покоятся относительно системы отсчета III, в которой жидкость неподвижна до прохождения по ней ударной волны.

Рассмотрим отражение звука. Частота генератора, равная в III Ω_1 , в I, где покоится поверхность разрыва, равна Ω . Приемник воспринимает в III частоту Ω'_1 . Смещение частоты

$$\frac{\Omega'_1 - \Omega_1}{\Omega_1} = \text{tg } \bar{\psi} \cdot \frac{\text{ctg } \theta^{(II)} - \text{ctg } \theta^{(0)}}{1 - \text{ctg } \theta^{(II)} \cdot \text{tg } \bar{\psi}}. \quad (13)$$

При нормальном падении

$$\frac{\Omega'_1 - \Omega_1}{\Omega_1} = 2 \frac{\bar{v}}{v} \cdot \frac{M}{(1 + M) \cdot \left(1 - M + \frac{\bar{v}}{v} M\right)}. \quad (14)$$

При прохождении звука через ударную волну смещение частоты обусловлено скачком волнового вектора на поверхности разрыва. Частота $\bar{\omega}_0$, излучаемая генератором, в системе I равна ω , а приемник воспринимает частоту ω' .

$$\omega' - \bar{\omega}_0 = \bar{v} (\bar{k}_y - k_y).$$

Подставляя сюда значения $k_y = \frac{\omega \cos \theta}{s + v \cos \theta}$, $\bar{k}_y = \bar{\omega}_0 \cos \bar{\theta} / \bar{s}$, найдем

$$\frac{\omega' - \bar{\omega}_0}{\bar{\omega}_0} = \bar{M} \cos \bar{\theta} (1 - \text{ctg } \theta / \text{ctg } \bar{\theta}). \quad (15)$$

При нормальном падении

$$\frac{\omega' - \bar{\omega}_0}{\bar{\omega}_0} = \bar{M} \left(1 - \frac{\bar{v}}{v} \cdot \frac{M}{\bar{M}} \cdot \frac{1 + \bar{M}}{1 + M} \right). \quad (16)$$

Смещение частот для данного угла зависит от трех безразмерных параметров M , \bar{M} , \bar{v}/v .

3. Малые возмущения в движущейся жидкости и граничные условия на разрыве

Как хорошо известно, в неподвижной жидкости малые возмущения давления и потенциала переносятся со скоростью звука, а возмущения энтропии и ротора скорости остаются неподвижными. В движущемся потоке все три типа возможных возмущений, кроме того, сносятся потоком. Будем считать возмущенные величины $\delta A \sim \exp i(kr - \omega t)$. Величины, относящиеся к звуковым возмущениям, обозначим индексом ⁽²⁾ в отличие от незвуковых возмущений с индексом ⁽¹⁾. Скорость потока v считаем направленной по оси y . Тогда для амплитуд возмущений нетрудно получить

$$\begin{aligned} \delta v_x^{(1)} + \frac{\omega}{vk} \delta v_y^{(1)} &= 0, & \delta p^{(1)} &= r \delta \sigma, \text{ где } r = (\partial p / \partial \sigma)_p, \\ \rho v \delta v_x^{(2)} &= M \sin \theta \delta p, & \rho v \delta v_y^{(2)} &= M \cos \theta \delta p, \\ \delta p &= \frac{1}{s^2} \delta p, & (\omega - vk_y^{(2)})^2 &= s^2 (k^2 + k_y^{(2)2}). \end{aligned} \quad (17)$$

Здесь σ и p соответственно энтропия единицы объема и давление,

$$\delta \sigma = \delta \sigma^{(2)}, \quad \delta p = \delta p^{(1)}, \quad k = k_x^{(1)} = k_x^{(2)}.$$

Известно, что нестационарное потенциальное изэнтропическое движение (каким является здесь звуковая волна), проходя через поверхность разрыва, вообще говоря, перестает быть потенциальным и изэнтропическим. Поэтому при падении звука на ударную волну возникает не только звук, но и энтропийные и вихревые «волны», которые представляют собой возмущения энтропии и ротора скорости, переносимые с током жидкости. Амплитуды возникающих волн находятся из граничных условий на поверхности разрыва. Если невозмущенный разрыв представляет собой плоскость $y = 0$, то уравнение разрыва, возмущенного падающей звуковой волной, в линейном приближении

$$[y = \eta \exp i(kx - \omega t)]. \quad (18)$$

Обычно в акустике деформация поверхности раздела приводит к эффектам $\sim \eta^2$. На неподвижной поверхности раздела достаточно переформулировать граничные условия (непрерывность скорости вместо непрерывности потока массы), чтобы деформация η уже не входила в линеаризованные граничные уравнения. Однако, ввиду наличия разрыва большой гидродинамической скорости v на ударной волне, деформация (18) приведет к эффектам $\sim \eta$ и должна учитываться в акустическом приближении *.

* В [10] не учитывалась деформация разрыва, в связи с чем были потеряны вихревые возмущения и так далее.

Условия Ранкина—Гюгонио непрерывности нормальной компоненты потока массы, импульса и энергии через поверхность возмущенного разрыва в системе, где этот разрыв покоится, дают:

$$\begin{aligned} [v\delta\rho + \rho\delta v_y] + i\omega\eta[\rho] &= 0, & [\delta v_x] + ik\eta[v] &= 0, \\ [\delta p + v^2\delta\rho + 2\rho v\delta v_y] &= 0, & [\delta w + v\delta v_y] + i\omega\eta[v] &= 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Здесь учтено, что нормаль и касательная к возмущенному разрыву имеют вид: $\mathbf{i}(-ik\eta, 1)$, $\mathbf{\tau}(1, ik\eta)$, а скорость возмущенного разрыва (в системе I) $\mathbf{D}(0, -i\omega\eta)$, w — тепловая функция, для которой $\delta w = T\delta\sigma + 1/\rho\delta p$. Квадратные скобки означают скачок величины на разрыве: $[A] = A - \bar{A}$. Вариации всех величин представляют собой сумму звуковых и незвуковых возмущений: $\delta A = \delta A^{(1)} + \delta A^{(2)}$. Частота ω в системе I и проекция волнового вектора \mathbf{k} остаются непрерывными на разрыве и равными соответствующим величинам в падающей волне. Граничные условия на невозмущенном разрыве

$$[\rho v] = 0 \quad (\rho v = j), \quad [p + \rho v^2] = 0, \quad [w + v^2/2] = 0. \quad (20)$$

4. Коэффициенты отражения и прохождения

В задаче о прохождении нас интересует отношение величины в прошедшей волне δA к величинам в падающей волне $\delta \bar{A}$. Закон преломления формулируется как закон тангенсов (6). Учитывая, что в $\bar{\Pi}$ имеется только падающая звуковая волна ($\delta \bar{v}^{(1)} = \delta \bar{\sigma} = 0$), получаем из (17)—(20)

$$\begin{aligned} \{(1 + M \cos \theta) - G(1 + M^2 + 2M \cos \theta)\} \delta p &= \\ = \{\bar{M}(\bar{M} + \cos \bar{\theta}) - G(1 + \bar{M}^2 + 2\bar{M} \cos \bar{\theta})\} \delta \bar{p}, \end{aligned} \quad (21)$$

где

$$G = \frac{1 - \frac{[v]}{v} \sin^2 \psi}{\frac{1}{l} - 2 \frac{[v]}{v} \sin^2 \psi}, \quad (22)$$

$$l = \frac{\rho T}{vr[v]} = \frac{c_p}{\beta} \frac{1}{[p]}; \quad c_p = T \left(\frac{\partial \sigma}{\partial T} \right)_p, \quad \beta = \left(\frac{\partial \frac{1}{\rho}}{\partial T} \right)_p. \quad (23)$$

При нормальном падении звука, движущегося навстречу ударной волне, $\sin \psi = 0$, $\cos \theta = \cos \bar{\theta} = 1$ и

$$(1 + M) \{1 - l(1 + M)\} \delta p = (\bar{M} + 1) \{\bar{M} - l(\bar{M} + 1)\} \delta \bar{p}. \quad (24)$$

Для идеального газа с отношением теплоемкостей γ

$$l = \frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1) \cdot (1 - M^2)} = \frac{2\gamma \bar{M}^2 - (\gamma - 1)}{2(\gamma - 1)(\bar{M}^2 - 1)}. \quad (25)$$

Подставляя (25) в (24), получаем известную формулу для прохождения звука через ударную волну в идеальном газе [9].

Для незвуковых возмущений получим

$$\delta v_y^{(1)} = -\frac{T}{v} \sin^2 \psi \cdot \delta \sigma, \quad (26)$$

$$\delta \sigma = -\frac{v}{T} [(1 + M^2 + 2M \cos \theta) \delta p] / \left(\frac{v^3 r}{T} - 2j \sin^2 \psi \right), \quad (27)$$

причем $\delta v_x^{(1)}$ находится по $\delta v_y^{(1)}$, согласно (17):

$$\delta v_x^{(1)} = -\operatorname{ctg} \psi \cdot \delta v_y^{(1)}. \quad (28)$$

В (27) δp должно быть выражено через $\delta \bar{p}$, согласно (21). При нормальном падении $\delta v_y^{(1)} = \delta v_x^{(1)} = 0$,

$$\delta \sigma = \frac{\bar{M} + 1}{rv^2} \cdot \frac{M\bar{M} - 1}{l(M + 1) - 1} \delta \bar{p}. \quad (29)$$

Подобным образом можно рассмотреть прохождение через ударную волну незвуковых возмущений. При этом возникает прошедшая звуковая волна, т. е. могут «прослушиваться» энтропийные и вихревые волны, имеющиеся в набегающем на разрыв потоке.

При отражении звука в полупространстве $\bar{\Pi}$ перед фронтом ударной волны поток невозмущен: $\delta \bar{p} = \delta \bar{\sigma} = \delta \bar{v} = 0$. В полупространстве Π за ударной волной различаем падающую волну $\delta A^{(n)}$ и отраженную $\delta A^{(0)}$. В падающей волне отсутствуют энтропийные и вихревые возмущения; амплитуды возникающих в отраженной волне возмущений $\delta \sigma$, $\delta v^{(1)}$ и $\delta p^{(0)}$ необходимо выразить через амплитуду падающей волны $\delta p^{(n)}$. Аналогично предыдущему, получаем

$$\begin{aligned} & \{(1 + M \cos \theta^{(n)}) - G(1 + M^2 + 2M \cos \theta^{(n)})\} \delta p^{(n)} = \\ & = - \{(1 + M \cos \theta^{(0)}) - G(1 + M^2 + 2M \cos \theta^{(0)})\} \delta p^{(0)}, \end{aligned} \quad (30)$$

где G то же, что и в (22). При нормальном падении $\psi = 0$, $\theta^{(0)} = 0$, $\theta^{(n)} = \pi$ и (30) переходит в

$$(1 - M) \{1 - l(1 - M)\} \delta p^{(n)} = - (1 + M) \{1 - l(1 + M)\} \delta p^{(0)}. \quad (31)$$

Соотношения между падающими и отраженными или преломленными волнами можно выразить также через производные вдоль адиабаты Гюгонио. Нижеследующие формулы соответствуют формулам работы Дьякова [11]. Из уравнения адиабаты Гюгонио $\rho = \rho(p; \bar{p}, \bar{p})$ получаем

$$\delta \rho = \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_H \delta p + \left(\frac{\partial \rho}{\partial \bar{p}} \right)_H \delta \bar{p} + \left(\frac{\partial \rho}{\partial \bar{p}} \right)_H \delta \bar{p}. \quad (32)$$

При отражении звука, когда $\delta \bar{\rho} = \delta \bar{p} = 0$,

$$\delta \rho = Q \delta p, \quad Q \equiv \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_H. \quad (33)$$

Используя (33) вместо последнего из уравнений (19), получаем

$$\{h + \cos(\psi - \theta^{(n)})\} \delta p^{(n)} = - \{h + \cos(\psi - \theta^{(0)})\} \delta p^{(0)}, \quad (34)$$

где

$$h = \frac{\cos \psi}{2M} \left\{ (1 + v^2 Q) - \frac{\bar{v}}{v} \operatorname{tg}^2 \psi (1 - v^2 Q) \right\}. \quad (35)$$

Заметим, что $\cos(\psi - \theta^{(0)}) = -\cos(\psi - \theta^{(n)})$ (фиг. 2). Если ввести удельный объем $V = 1/\rho$, то $v^2 Q \equiv -j^2 \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_H$. При нормальном падении получим

$$\left\{ 1 - 2M - j^2 \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_H \right\} \delta p^{(n)} = - \left\{ 1 + 2M - j^2 \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_H \right\} \delta p^{(0)}. \quad (36)$$

Амплитуды незвуковых возмущений согласно (26) и (28) найдем по $\delta \sigma$:

$$\delta \sigma = \frac{1}{r} \left(Q - \frac{1}{s^2} \right) (\delta p^{(n)} + \delta p^{(0)}), \quad (37)$$

причем $\delta p^{(0)}$ должно быть подставлено из (34).

Коэффициент прохождения также можно выразить через производные адиабаты Гюгонио. Но в этом случае, вместо (33) имеем

$$\delta p = Q\delta p + P\delta\bar{p}, \quad P = \frac{1}{s^2} \left(\frac{\partial p}{\partial \bar{p}} \right)_H + \left(\frac{\partial p}{\partial p} \right)_H. \quad (38)$$

Получаем следующее выражение для амплитуды прошедшей звуковой волны:

$$\{(1 + M \cos \theta) - R(1 + 2M \cos \theta + v^2 Q)\} \delta p = \\ = \{\bar{M}(\bar{M} + \cos \bar{\theta}) - R(1 + 2\bar{M} \cos \bar{\theta} + \bar{M}^2 - v^2 P)\} \delta\bar{p}, \quad (39)$$

где

$$R = \left(1 + \frac{v}{v} \operatorname{ctg}^2 \psi \right) / 2 \left(1 - \frac{v}{v} \right). \quad (40)$$

Нетрудно убедиться в том, что коэффициент при δp в (38) с точностью до множителя $\left(\frac{v}{v} - 1 \right) \frac{\cos \psi}{M} \cdot \operatorname{tg}^2 \psi$ совпадает с коэффициентом при $\delta p^{(0)}$ в (34) для отражения звука.

При нормальном падении (39) переходит в

$$\{1 + 2M + v^2 Q\} \delta p = \{(1 + \bar{M})^2 - v^2 P\} \delta\bar{p}. \quad (41)$$

Амплитуды незвуковых возмущений могут быть выражены через $\delta\sigma$:

$$\delta\sigma = \frac{1}{r} \left\{ \left(Q - \frac{1}{s^2} \right) \delta p + P\delta\bar{p} \right\}, \quad (42)$$

куда δp должно быть подставлено из (39).

Заметим, что для идеального газа

$$v^2 Q \equiv -j^2 \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_H = \frac{1}{M^2}, \quad (43)$$

$$v^2 P = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \frac{(\bar{M}^2 - 1)^2}{\bar{M}^2}. \quad (44)$$

Коэффициенты отражения и прохождения могут быть по абсолютной величине как больше, так и меньше единицы (усиление или ослабление звука). Так, коэффициент отражения по модулю больше единицы при $h < 0$ и меньше единицы при $h > 0$. Легко убедиться по (34) и (43), что последний случай имеет место для идеального газа.

5. Поверхностная волна. Обсуждение результатов

Поверхностная волна (раздел 1) возникает при $\bar{\theta}_m < \bar{\theta} < \bar{\theta}_{m'}$, когда $\operatorname{ctg}^2 \psi < \frac{1 - M^2}{M^2} \equiv \operatorname{ctg}^2 \psi_m$ (фиг. 5). Предыдущие выражения по-прежнему применимы, если рассматривать δp как значение комплексной амплитуды затухающей волны на поверхности разрыва. Коэффициент прохождения становится комплексным. Умножая (39) на $\left(1 - \frac{v}{v} \right) \frac{\cos \psi}{M} / M \operatorname{tg}^2 \psi$, приведем его к виду:

$$\frac{\delta p}{\delta\bar{p}} = \frac{1}{h + \cos \varphi} \cdot \left\{ H + \frac{\bar{M}}{M} \frac{\cos \bar{\theta} + \bar{M} \sin^2 \psi}{\cos \psi} \right\}, \quad (45)$$

где

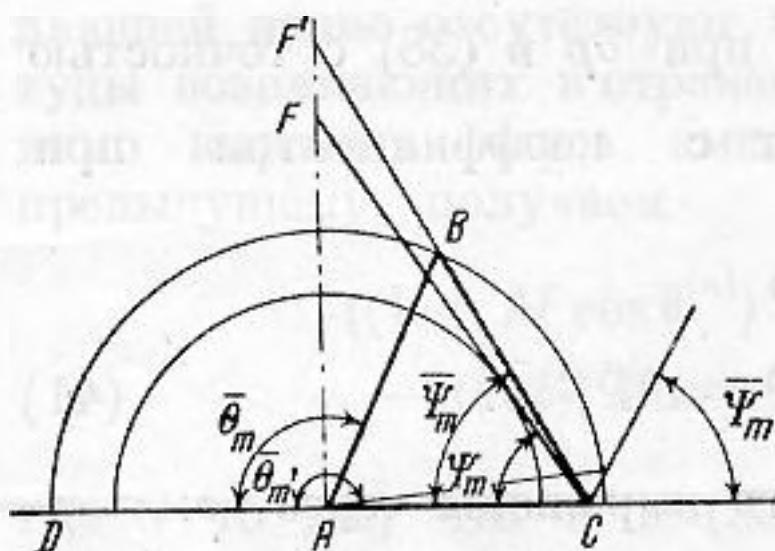
$$H = \frac{\cos \psi}{M} 2M \left\{ 1 + \bar{M}^2 - v^2 P + \frac{v}{v} \operatorname{tg}^2 \psi (1 - \bar{M}^2 - v^2 P) \right\},$$

а h дается (35). В случае поверхностной волны, согласно (12), $\cos \varphi$ чисто мнимый, остальные величины вещественны, что позволяет в (45)

немедленно отделить действительную и мнимую часть. Если не включать знак $\delta p / \delta \bar{p}$ в фазу, то сдвиг фазы при этом определяется углом

$$\Delta = \arctg \left\{ -\frac{\sin \psi}{h} \sqrt{\operatorname{ctg}^2 \psi_m - \operatorname{ctg}^2 \psi} \right\}. \quad (46)$$

Для сравнения с теорией взаимодействия малых стационарных разрывов с ударными волнами [11] перейдем в систему координат IV, движущуюся относительно системы I вдоль оси x со скоростью, равной фазовой скорости звуковой волны ω / k_x в данном направлении. В этой системе координат движение стационарно. Скорость невозмущенного течения имеет тангенциальную компоненту $v_x = \bar{v}_x = -\omega / k_x$. Введенный ранее угол ψ имеет смысл угла наклона линии тока: $\operatorname{ctg} \psi = -v_x / v_y$. Углом



Фиг. 5. Прохождение звука через разрыв. $AC=1$. Внутренняя окружность радиуса M , внешняя \bar{M} . При $\bar{\theta} < \bar{\theta}_m$ $\psi < \psi_m$ и луч из C , идущий под углом ψ , пересекает внутреннюю окружность (см. фиг. 2). При $\bar{\psi}_m < \psi < \pi - \bar{\psi}_m$ ($\bar{\theta}_m < \bar{\theta}_m'$) звук не проходит через разрыв, а образуется поверхностная волна

падения звука из разреженной среды, при которых возникает поверхностная волна ($\operatorname{ctg}^2 \psi < \frac{1-M^2}{M^2}$), соответствует дозвуковое течение за ударной волной ($v_x^2 + v_y^2 < s^2$) в системе координат, где движение стационарно. Падающая волна может проникнуть в область сжатия только в виде затухающей волны с глубиной затухания

$$1 / \Gamma m k_y = \frac{M \operatorname{ctg}^2 \psi_m}{k_x \sqrt{\operatorname{ctg}^2 \psi_m - \operatorname{ctg}^2 \psi}}. \quad (47)$$

Ввиду отсутствия дисперсии, формулы работы Дьякова [11], в которой, в частности, рассматривалось падение на ударную волну слабых ударных волн (или тангенциальных разрывов), описываемых единичными разрывными функциями, совпадают с соответствующими выражениями для коэффициентов отражения и прохождения звука (раздел 5) (через производные по адиабате Гюгонио), если под величиной скачка понимать амплитуду волны*. Коэффициенты отражения и прохождения при определенных значениях параметров обращаются в бесконечность. Это явление, названное «резонансом», рассматривалось С. П. Дьяковым, который указывал, что резонанс должен соответствовать спонтанному излучению разрывом отщепляющихся от него исчезающе слабых разрывов. В нашем рассмотрении резонанс соответствует излучению звука. Из (34) и (39) следует, что область резонанса определяется неравенствами

$$\frac{1 - \bar{v} / v \cdot \operatorname{tg}^2 \psi_m}{1 + \bar{v} / v \cdot \operatorname{tg}^2 \psi_m} < j^2 \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_H < 1 + 2M \quad (48)$$

и совпадает с областью спонтанного излучения звука [4—6]. Эта связь становится очевидной, если заметить, что характеристическое уравнение,

* Приведем для удобства связь с обозначениями работы [11]: φ , M^2 , v_x соответствуют $-\psi$, $M^2(1 + \operatorname{ctg}^2 \psi)$, $-v \operatorname{ctg} \psi$ настоящей статьи.

исследуемое в задаче об устойчивости, соответствует уравнению $K(\theta) = \infty$, где $K(\theta) = \delta p^{(0)} / \delta p^{(n)}$ или $\delta p / \delta \bar{p}$ (обращение в 0 детерминанта системы)*. В предельном газе резонанс невозможен. Коэффициенты отражения и прохождения звука могут обращаться в нуль. Соответствующие «углы Брюстера» имеются и для идеального газа. При падении звука на разрыв под таким углом возникает только энтропийно-вихревая волна.

Акустические измерения могут быть использованы для изучения ударных волн. Уже знание сдвига частот и коэффициентов прохождения и отражения при нормальном падении (14), (16), (24), (31) позволяет получить значения четырех безразмерных величин

$$M, \bar{M}, \bar{v}/v, l. \quad (49)$$

Используя известные $\bar{s}, \bar{\rho}, \bar{p}$, легко найти

$$v, \bar{v}, s, \rho, p, j, c_p/\beta. \quad (50)$$

Согласно (36) находим производную вдоль адиабаты Гюгонио $(\partial V/\partial p)_H$, а из (41) может быть найдена комбинация производных (38). Интерес представляет также измерение угловых зависимостей (5), (6). Заметим, что акустические измерения дадут мгновенные, а не усредненные значения параметров ударной волны.

Автор выражает благодарность Я. Б. Зельдовичу и С. В. Иорданскому за полезное обсуждение работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. М. Конторович. Отражение и преломление звука ударной волной. Ж. exper. и теорет. физ., 1957, 33, 6, 1527—1528.
2. Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц. Механика сплошных сред, М., ГТТИ, 1953, стр. 405.
3. Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц. Механика сплошных сред, стр. 142; С. И. Сыроватский. Неустойчивость тангенциальных разрывов в сжимаемой среде. Ж. эксперим. и теорет. физ., 1954, 27, 1, 121—123.
4. С. П. Дьяков. Об устойчивости ударных волн. Ж. exper. и теорет. физ., 1954, 27, 3, 288—295.
5. В. М. Конторович. К вопросу об устойчивости ударных волн. Ж. exper. и теорет. физ., 1957, 33, 6, 1525—1526.
6. С. В. Иорданский. Об устойчивости плоской стационарной ударной волны. Прикл. мат. и мех., 1957, 21, 4, 465—471.
Д. И. Блохинцев. Движущийся приемник звука. Докл. АН СССР, 1945, 47, 1, 22—25.
8. J. M., Burgers. On the transmission of sound waves through a shock wave. Proc. Ned. Akad. Wet., 1946, 49, 273—281.
9. Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц. Механика сплошных сред, стр. 409.
10. J. Brillouin. Réflexion et réfraction d'ondes acoustique par une onde de choc. Acustica, 1955, 5, 3, 149—163.
11. С. П. Дьяков. Взаимодействие ударных волн с малыми возмущениями, I, II, Ж. exper. и теор. физ., 1957, 33, 4, 948—974.
12. Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц. Механика сплошных сред, стр. 318.

Институт радиофизики и электроники АН УССР
Харьков

Поступила в редакцию
17 декабря 1957 г.

* По этой причине задача о падении на ударную волну резонансного возмущения не имеет решений, что, по-видимому, означает неустойчивость ударной волны в резонансе относительно расщепления на конечные разрывы. Этот вопрос, однако, требует специального рассмотрения.