

ТЕРМИЧЕСКОЕ ЗАТУХАНИЕ ЗВУКА В СУСПЕНЗИИ ВЫСОКОЙ
КОНЦЕНТРАЦИИ*Н. Л. Бызова, В. С. Нестеров*

Задача о термических потерях во взвеси высокой концентрации решается при помощи схематизированной модели из твердых шариков, окруженных жидкими сферическими оболочками. Получены формулы для комплексной сжимаемости, скорости и затухания звука в функции частоты, геометрических и термодинамических параметров взвеси. Выяснены пределы пригодности ранее опубликованных теорий, не учитывающих взаимодействия между частицами. Выполнен ряд конкретных расчетов. Роль тепловых потерь весьма невелика в случае взвеси минеральных частиц в воде и заметна в случае сухого кварцевого песка, насыщенного воздухом.

Поглощение звука в эмульсиях и суспензиях в течение последних лет привлекало внимание многих исследователей. В теоретических работах при этом изучались две основные причины активных потерь звуковой энергии: вязкость жидкости и теплообмен между взвесью и взвешивающей жидкостью. Обычно принимают, что концентрация взвеси не велика, и производят расчет для отдельной частицы, находящейся в безграничной жидкости, а затем, считая частицы невзаимодействующими друг с другом, суммируют эффект, вызываемый отдельными частицами.

В настоящей работе, тесно примыкающей к работам [1—3], делается попытка оценить влияние тепловых потерь в суспензии высокой концентрации, т. е. в условиях небольших расстояний между частицами, когда их взаимодействием пренебрегать нельзя. Оценка влияния вязкости в такой суспензии производится в работе [4].

Интересующие нас качественные и ориентировочные количественные соотношения в реальных суспензиях с хаотически расположенными частицами различной формы могут быть получены путем замены реальной суспензии идеализированной смесью жидкости с одинаковыми частицами подходящих размеров и формы*.

Пусть смесь состоит из одинаковых твердых шариков и жидкости между ними, и пусть расстояния между шариками невелики. В случае тесного расположения шарики могут касаться друг друга. Если шарики расположены по узлам кубической решетки, пористость смеси не может быть меньше 47,6%. При наиболее тесном расположении частиц по узлам ромбоэдрической решетки пористость не может быть меньше 26%.

Пусть в смеси распространяется звуковая волна, длина которой велика по сравнению с размерами частиц. В этом случае можно считать, что в пределах объема смеси, содержащего весьма большое количество частиц, давление в каждый данный момент времени одинаково, но изменяется со временем гармонически. Периодическое изменение давления сопровождается соответствующим изменением температуры, причем обе фазы смеси вследствие разницы тепловых параметров нагреваются различно. Поэтому между фазами должен установиться переменный во времени теплообмен. При симметричном расположении и полной идентичности всех шариков,

* К подобному приему прибегали очень многие исследователи, начиная с Рейли (первое решение задачи о пористых звукопоглотителях) и Сликтера (одно из первых решений задачи о фильтрации жидкости через грунт).

около каждого из них можно мысленно провести разграничивающую поверхность, тепловой поток через которую равен нулю. Форма этой поверхности, вообще говоря, довольно сложная. Мы выделим одну такую ячейку, состоящую из твердого шарика и окружающей его жидкой оболочки, и заменим оболочку сложной формы простой — в виде сферического жидкого слоя, concentрически облегающего твердый шарик. Объем жидкой оболочки при этом оставим неизменным. Будем считать, что на наружную границу жидкой оболочки действует переменное всестороннее давление и рассчитаем среднюю сжимаемость шарика и жидкого слоя, приняв во внимание теплообмен между ними. В силу полной идентичности всех шариков сжимаемость смеси в целом должна быть близка к сжимаемости системы шарик — оболочка. Основной причиной некоторого отклонения может служить огрубление, допускаемое при замене жидкой оболочки сложной формы сферическим слоем. По рассчитанной таким способом сжимаемости в дальнейшем могут быть вычислены скорость и затухание.

Температурное поле, возникающее в жидкой оболочке и в твердой частице благодаря звуковой волне, описывается уравнением [1—3]

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\kappa}{c\rho} \nabla^2 T - \frac{\theta\alpha}{c\rho} \frac{\partial p}{\partial t} = 0, \quad (1)$$

где T — мгновенное значение температуры, κ — теплопроводность, ρ — плотность, c — теплоемкость при постоянном давлении, θ — средняя абсолютная температура среды, α — температурный коэффициент расширения, p — давление звуковой волны. Параметры и переменные величины, относящиеся к жидкой оболочке, отметим индексом 1, а относящиеся к твердому шарика — индексом 2.

Будем считать процесс синусоидальным во времени и примем во внимание сферическую симметрию нашей системы. На границе между шариком и жидкостью следует учесть непрерывность температуры и теплового потока, а на внешней границе жидкой оболочки, согласно принятой выше симметрии всех частиц, тепловой поток надо положить равным нулю. При этих условиях частное решение задачи выражается в виде температурных волн, распространяющихся в шарике и оболочке и описываемых формулами:

1) в жидкой оболочке

$$T_1 = \rho\theta \left\{ \frac{\alpha_1}{c_1\rho_1} + \frac{a}{r} \left(\frac{\alpha_2}{c_2\rho_2} - \frac{\alpha_1}{c_1\rho_1} \right) \frac{\kappa_2}{\kappa_1} [B \operatorname{sh} \lambda_1 (b-r) + C \operatorname{ch} \lambda_1 (b-r)] \right\}, \quad (2)$$

2) в шарике

$$T_2 = \rho\theta \left[\frac{\alpha_2}{c_2\rho_2} + \frac{a}{r} \left(\frac{\alpha_2}{c_2\rho_2} - \frac{\alpha_1}{c_1\rho_1} \right) A \operatorname{sh} \lambda_1 r \right], \quad (3)$$

где a — радиус твердого шарика, b — внешний радиус жидкой оболочки, r — радиальная сферическая координата, λ_1 и λ_2 — волновые числа температурных волн, выражающиеся так:

$$\lambda_i = \sqrt{\frac{j\omega c_i \rho_i}{\kappa_i}} = \lambda'_i (1 + j); \quad \lambda'_i = \sqrt{\frac{\omega c_i \rho_i}{2\kappa_i}}, \quad (4)$$

где $i = 1, 2$. Постоянные интегрирования A , B и C зависят от ω , λ_1 , λ_2 , a , b , κ_1/κ_2 и определяются по граничным условиям.

Дальнейший расчет может быть произведен согласно схеме, принятой в работе [3]. Для этого введем относительное сжатие всей системы,

которое с учетом теплового расширения выражается в виде

$$S = \frac{1}{v_1 + v_2} \left(\int_{v_1} S_1 dv + \int_{v_2} S_2 dv \right), \quad (5)$$

где v_2 и v_1 — объемы шарика и оболочки, $S_i = \beta_i p - \alpha_i T$ — сжатие сферических элементов шарика и оболочки в отдельности, β_i — изотермический коэффициент сжимаемости, $\eta = \frac{b^3 - a^3}{b^3}$ — пористость среды.

На основании (5) легко рассчитывается средняя сжимаемость в статических условиях с учетом теплового расширения:

$$M = M_2(1 - \eta) + M_1\eta,$$

где $M_i = \frac{S_i}{p} = \beta_i - \frac{\alpha^2 \theta}{\rho_i c_i}$ — сжимаемость шарика и жидкого слоя в отдельности.

Наконец, приняв во внимание теплообмен между фазами, т. е. используя выражения (2—4) и учтя граничные условия, мы получим интересующую нас среднюю сжимаемость системы при синусоидальном изменении звукового давления в виде

$$\bar{M}(\omega) = M \left[1 - \frac{3\theta(1 - \eta) \kappa_2 \varphi^2}{M} \frac{j\Psi'}{a^2 \omega} \right]. \quad (6)$$

Здесь $\varphi = \frac{\alpha_2}{c_2 \rho_2} - \frac{\alpha_1}{c_1 \rho_1}$, а в виде величины Ψ'/ω выделена зависимость сжимаемости от периодического теплообмена. Величина Ψ' , в свою очередь, является сложной функцией волновых аргументов температурных волн в шарике и оболочке и выражается так:

$$\Psi' = \frac{\left(\frac{\text{th } \lambda_2 a}{\lambda_2 a} - 1 \right) \left[-1 + (1 - \lambda_1^2 ab) \frac{\text{th } \lambda_1 (b - a)}{\lambda_1 (b - a)} \right]}{\frac{\kappa_2}{\kappa_1} \left[\frac{b}{b - a} - \frac{\text{th } \lambda_1 (b - a)}{\lambda_1 (b - a)} \right] \left(1 - \frac{\text{th } \lambda_2 a}{\lambda_2 a} \right) - \frac{\text{th } \lambda_2 a}{\lambda_2 a} \left[-1 + (1 - \lambda_1^2 ab) \frac{\text{th } \lambda_1 (b - a)}{\lambda_1 (b - a)} \right]}. \quad (7)$$

Сопоставляя друг с другом формулы (4), (7) и (6), мы приходим к выводу, что сжимаемость смеси шариков и жидкости является сложной комплексной функцией частоты. Как и в случаях, разобранных в работах [1—3], комплексность сжимаемости обязана своим происхождением необратимому теплообмену между твердой и жидкой фазой.

Если просто сложить массы шарика и оболочки, то средняя плотность смеси ρ окажется равной

$$\rho = \rho_1 \eta + \rho_2 (1 - \eta). \quad (8)$$

В работе [4] показано, что вследствие относительного движения жидких и твердых частиц формула (8) пригодна лишь в пределах некоторого частотного диапазона. Для того, чтобы не вносить дополнительных трудностей, в дальнейшем будем считать выражение (8) справедливым при всех частотах.

Воспользовавшись зависимостями (6) и (8), получим комплексное волновое число в смеси

$$k_{\pm} - j\delta = \omega \sqrt{\rho \bar{M}} \left[1 - \frac{3(1 - \eta) \theta \varphi^2 \kappa_2}{M} \frac{j\Psi'}{a^2 \omega} \right]^{1/2}. \quad (9)$$

Если второе слагаемое в скобках мало, т. е. при

$$\frac{30(1-\eta)\varphi^2\kappa_2}{Ma^2\omega} |\Psi| \ll 1,$$

то затухание выражается приближенной формулой:

$$\delta = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{\rho}{M}} \frac{(1-\eta)\theta\varphi^2\kappa_2}{a^2} \operatorname{Re} \Psi,$$

или

$$\frac{\delta}{k} = \frac{3}{2} \frac{(1-\eta)\theta\varphi^2\kappa_2}{M} \frac{\operatorname{Re} \Psi}{a^2\omega}. \quad (10)$$

Частотная зависимость δ/k заключена в функции $\operatorname{Re} \Psi/\omega$. В предельных случаях очень больших и очень малых частот ее нетрудно оценить. При больших частотах, когда $\lambda_2 a \gg 1$ и $\lambda_1(b-a) \gg 1$, зависимость от частоты имеет вид:

$$\frac{\delta}{k} = \frac{3}{2\sqrt{2}} \frac{\theta\varphi^2(1-\eta)}{M} \frac{(\kappa_1\kappa_2\rho_1\rho_2c_1c_2)^{1/2}}{\sqrt{c_1\rho_1\kappa} + \sqrt{c_2\rho_2\kappa_2}} \frac{1}{a\sqrt{\omega}}. \quad (11)$$

При малых частотах ($\lambda_2 a \ll 1$; $\lambda_1(b-a) \ll 1$) имеем

$$\frac{\delta}{k} = \frac{1}{6} \frac{\theta\varphi^2(1-\eta)}{M} \frac{(c_2\rho_2)^2}{\kappa_2} \frac{\frac{1}{5} + \frac{\kappa_2}{\kappa_1} \frac{1}{\eta\xi^2}}{\left[1 + \frac{c_2\rho_2}{c_1\rho_1} \left(\frac{\xi-1}{\xi}\right)^3 \frac{1}{\eta}\right]^2} a^2\omega, \quad (12)$$

где

$$\xi = b(\bar{b}-a).$$

Таким образом, характер предельных зависимостей от размеров частиц и частоты, как, впрочем, и следовало ожидать, получается таким же, как и в случаях, разобранных в работах [1-3]. При промежуточных значениях волновых аргументов частотная зависимость затухания имеет сложный вид. Из формулы (7) нетрудно видеть, что имеются две критические частоты ω_1 и ω_2 , определяемые равенствами $\lambda_2 a = 1$ и $\lambda_1(b-a) = 1$. В области критических частот имеется максимум поглощения.

Зависимость от размеров входит в формулу (10) только в виде $a^2\omega$ (Ψ зависит только от отношения размеров оболочки и шарика). Поэтому, если вместо частоты в качестве аргумента ввести $\lambda_1 a = \sqrt{\omega/\omega_2}$, то в формулу (10) зависимость от размеров не войдет. Это значит, что размеры частичек сказываются на положении максимума затухания, но не на его величине. Вообще при изменении размеров частичек вся кривая зависимости δ/k от частоты только растягивается или сжимается вдоль оси ω .

Как и в случаях [1-3], в разбираемой системе имеет место термическая дисперсия. На низких частотах скорость стремится к предельному значению

$$c = \frac{1}{\sqrt{\rho M}} \left[1 - \frac{(1-\eta)\theta\varphi^2}{2M} \frac{1}{1 + \frac{c_2\rho_2}{c_1\rho_1} \left(\frac{\xi-1}{\xi}\right)^3 \frac{1}{\eta}} \right] \quad (13)$$

и на высоких частотах — к значению

$$c_b = \frac{1}{\sqrt{\rho M}}. \quad (14)$$

В данных формулах плотность считается постоянной. Фактически в системах рассматриваемого типа плотность сама является функцией частоты, что приводит к появлению второго типа дисперсии, накладываю-

щейся на дисперсию термическую [4]. При экспериментальном определении дисперсии надо иметь в виду, что в некоторых случаях вязкоинерционная дисперсия может перекрывать термическую.

Интересно произвести сравнение предельных зависимостей в рассматриваемом случае с предельными формулами, полученными в работе [3]. Здесь рассмотрена совершенно аналогичная задача. Различие в постановке задачи состоит только в том, что

при расчете температурных волн окружающая шарик среда считалась бесконечной. Результаты работы [3] применимы, таким образом, при малых концентрациях. Формула для отношения δ/k при высоких частотах в этом случае совпадает с нашей формулой (11).

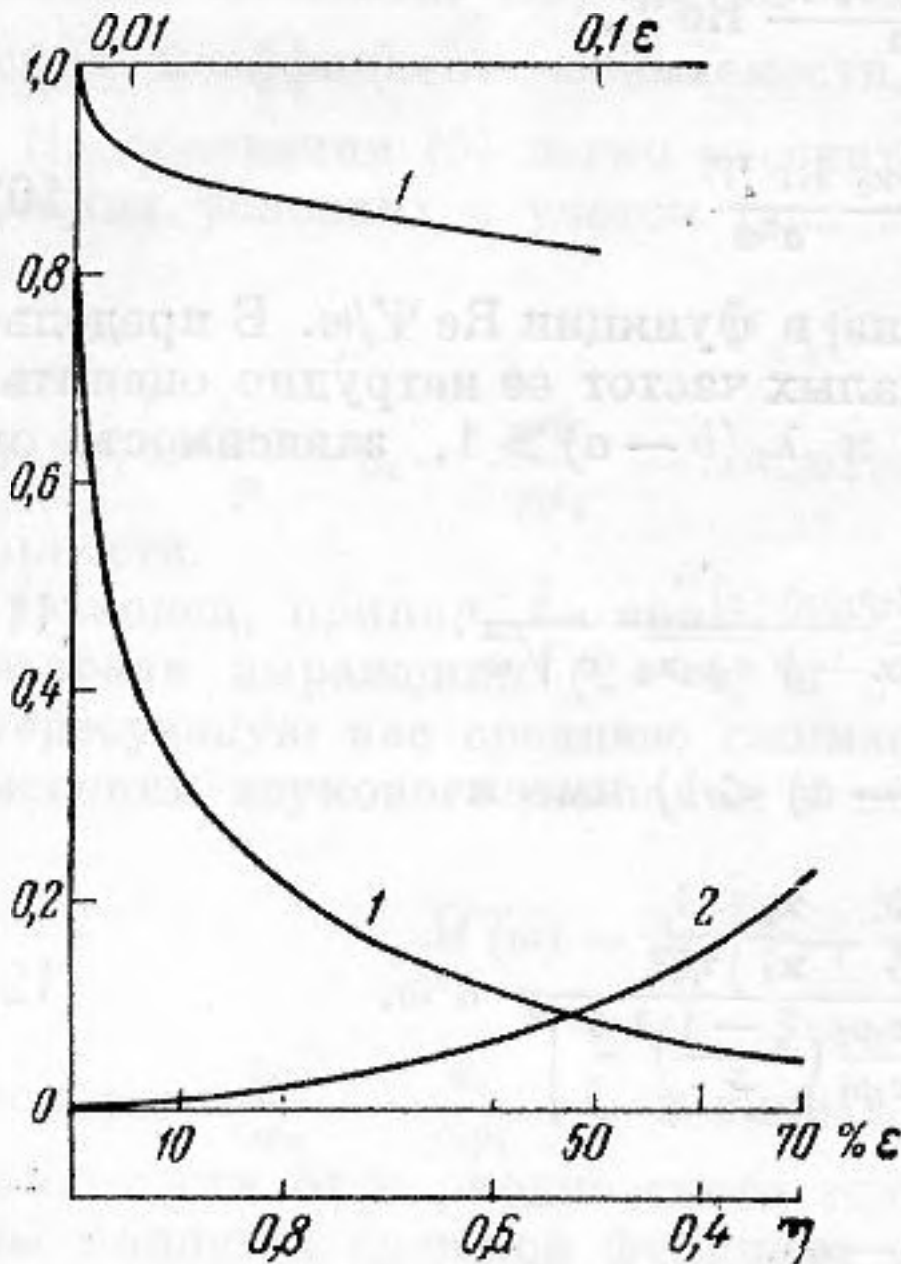
Для низких частот вместо множителя из формулы (12), имеющего вид

$$\frac{1}{5} + \frac{\kappa_2}{\kappa_1} \frac{1}{\eta \xi^2} \left[1 + \frac{c_2 \rho_2}{c_1 \rho_1} \left(\frac{\xi - 1}{\xi} \right)^3 \frac{1}{\eta} \right]^2,$$

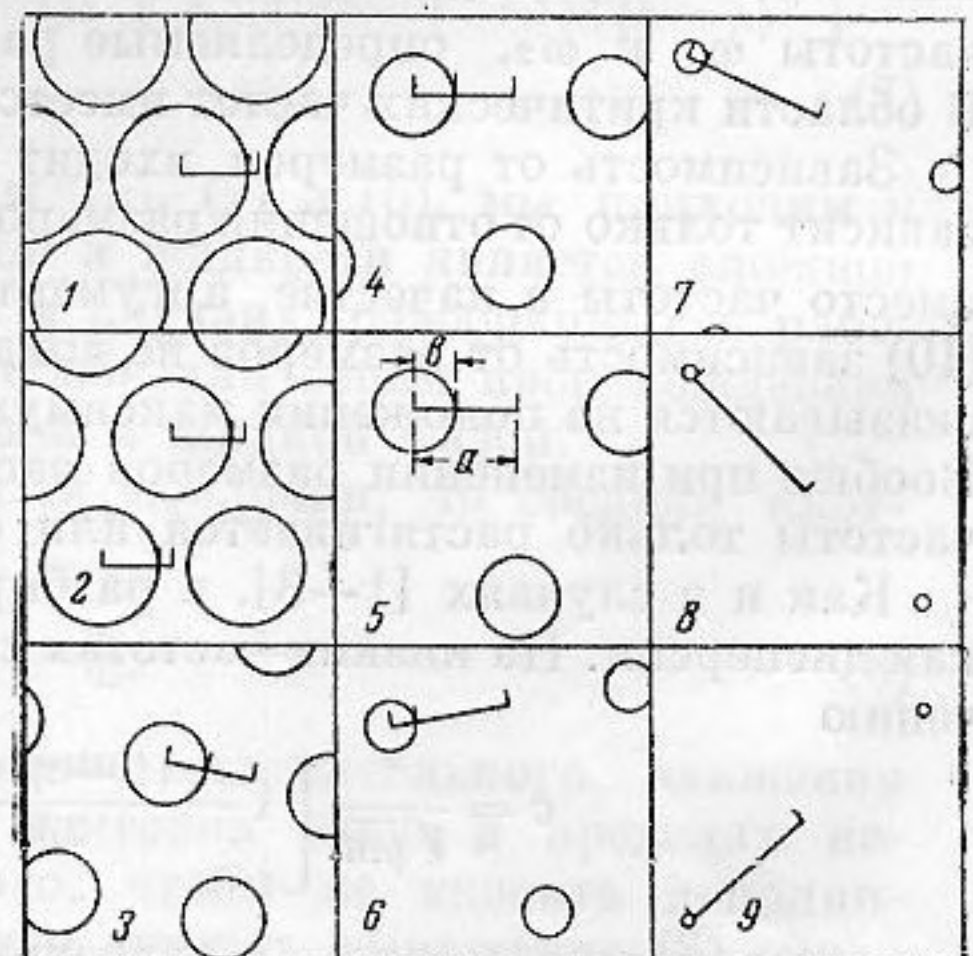
в разобранным Исаковичем случае имеем $1/5 + \kappa_2/\kappa_1$.

Фиг. 1.

1 — $\frac{1}{\eta \cdot \xi^2}$, 2 — $\left(\frac{\xi - 1}{\xi} \right)^3 \frac{1}{\eta}$. Сверху дан участок очень малых концентраций в более крупном масштабе



Величина поправочных коэффициентов $1/\eta \xi^2$ и $(\xi - 1/\xi)^3 1/\eta$ в зависимости от пористости η или объемной концентрации ϵ приводится на фиг. 1. На фигуре видно, что величина $1/\eta \xi^2$ в случае, рассчитанном Исаковичем, равная единице, очень быстро убывает с ростом концентрации и уже при незначительных [концентрациях] порядка 0,1% ее влияние при благоприятном сочетании параметров сред ($\kappa_2/\kappa_1 \geq 0,2$) может оказаться заметным. Это на первый взгляд неожиданное обстоятельство объясняется тем, что пористость или же объемная концентрация пропорциональны от-



Фиг. 2. Взаимное расположение шариков при различных концентрациях ϵ . Линейные размеры шарика и оболочки даны отрезками прямых:

1 — $\epsilon = 70\%$, $\eta = 0,3$; 2 — $\epsilon = 50\%$; $\eta = 0,5$; 3 — $\epsilon = 20\%$, $\eta = 0,8$; 4 — $\epsilon = 10\%$, $\eta = 0,9$; 5 — $\epsilon = 5\%$, $\eta = 0,95$; 6 — $\epsilon = 1\%$, $\eta = 0,99$; 7 — $\epsilon = 0,1\%$; 8 — $\epsilon = 0,01\%$; 9 — $\epsilon = 0,001\%$

ношению третьих степеней линейных размеров шарика и оболочки, в то время как температурный эффект, связанный с длиной температурной волны в одной и другой средах, пропорционален их линейным размерам. Действительно, при малых концентрациях, т. е. при $b - a \gg a$, имеем $1/\eta \xi^2 = 1 - 2a/(b - a) + \dots$, в то время как $\eta = 1 - (a/(b - a))^3 + \dots$

На фиг. 2 даны сравнительные размеры шариков и промежутков между ними для разных значений η .

Отметим здесь, что для эмульсии бензола в воде $\kappa_2/\kappa_1 = 0,245$, так что уже при концентрации 0,1% расчет по формуле Исаковича дает ошибку в 10% по сравнению с расчетом по формуле (12). Для взвеси водяных шариков в воздухе $\kappa_2/\kappa_1 = 23,8$, и влияние близости шариков при низких частотах еще заметнее. Кроме того, в этом случае $c_2\rho_2/c_1\rho_1 = 3,33 \times 10^3$, так что поправка в знаменателе формулы (12) также велика вплоть до очень небольших концентраций. Отметим также, что влияние рассматриваемого эффекта на дисперсию значительно меньше, чем на затухание, как это следует из формулы (13).

Таблица 1

| параметр | Материал | | | | |
|---|-----------------------|----------------------|----------------------|-----------------------|----------------------|
| | вода | кварц | ортоклаз | кальцит | воздух |
| ρ г/см ³ | 1,00 | 2,65 | 2,5 | 2,72 | $1,25 \cdot 10^{-3}$ |
| c кал/г·град | 1,00 | 0,166 | 0,145 | 0,188 | 0,24 |
| κ кал/сек·см·град | $1,36 \cdot 10^{-3}$ | $2,38 \cdot 10^{-2}$ | $1,00 \cdot 10^{-2}$ | $0,95 \cdot 10^{-2}$ | $5,7 \cdot 10^{-5}$ |
| $\alpha = \frac{1}{v} \frac{dv}{dT}$ град ⁻¹ | $2,0 \cdot 10^{-4}$ | $5,7 \cdot 10^{-5}$ | $1,5 \cdot 10^{-5}$ | $1,0 \cdot 10^{-5}$ | 0,00367 |
| $\beta = 1/v(dv/d\rho)_T$ см ² /дин | $4,55 \cdot 10^{-11}$ | $2,7 \cdot 10^{-12}$ | $2,1 \cdot 10^{-12}$ | $1,35 \cdot 10^{-12}$ | 10^{-6} |

По формуле (9) был проведен расчет для нескольких случаев различных мелкозернистых сред, пропитанных водою. Предполагалось поочередно, что твердая фаза обладает свойствами кварца, известняка, кальцита и ортоклаза. Был сделан также расчет для случая, когда оболочкой служит воздух, а частица обладает свойствами кварца. Необходимые для расчета параметры материалов были взяты по справочнику [5]. В табл. 1

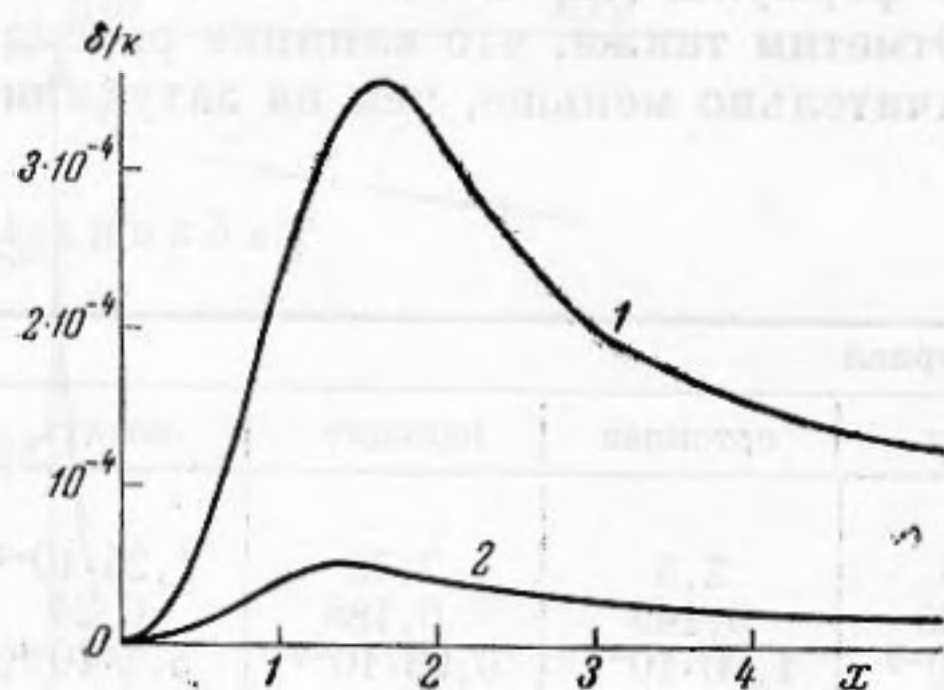
Таблица 2

| Материал частицы | кварц | кальцит | кальцит | кальцит | ортоклаз | кварц |
|--|--------------------------|----------------------|--------------------------|----------------------|----------------------|-----------------------|
| пропитка | вода | вода | | | вода | воздух |
| η | 0,4 | 0,4 | 0,5 | 0,6 | 0,6 | 0,4 |
| $\delta/k \cdot a^2 \omega / \text{Re } \Psi'$ | $3,65 \cdot 10^{-5}$ | $9,95 \cdot 10^{-5}$ | $6,65 \cdot 10^{-5}$ | $4,41 \cdot 10^{-5}$ | $3,57 \cdot 10^{-5}$ | 75,0 |
| $\omega_2 a$ | $10,82 \cdot 10^{-2}$ | $3,72 \cdot 10^{-2}$ | $3,72 \cdot 10^{-2}$ | $3,72 \cdot 10^{-2}$ | $5,50 \cdot 10^{-2}$ | $10,82 \cdot 10^{-2}$ |
| $\omega_1 a$ | $8,40 \cdot 10^{-2}$ | $8,40 \cdot 10^{-2}$ | $4,03 \cdot 10^{-2}$ | $2,10 \cdot 10^{-2}$ | $2,10 \cdot 10^{-2}$ | 11,6 |
| $\delta/k (x \gg 1)$ | $0,89 \cdot 10^{-4}$ | $9,20 \cdot 10^{-4}$ | $6,14 \cdot 10^{-4}$ | $4,07 \cdot 10^{-4}$ | $2,49 \cdot 10^{-4}$ | 0,0905 |
| | x | x | x | x | x | x^* |
| $\delta/k (x \ll 1)$ | $0,69 \cdot 10^{-4} x^2$ | | $2,78 \cdot 10^{-4} x^2$ | | | $0,150 (x^*)^2$ |

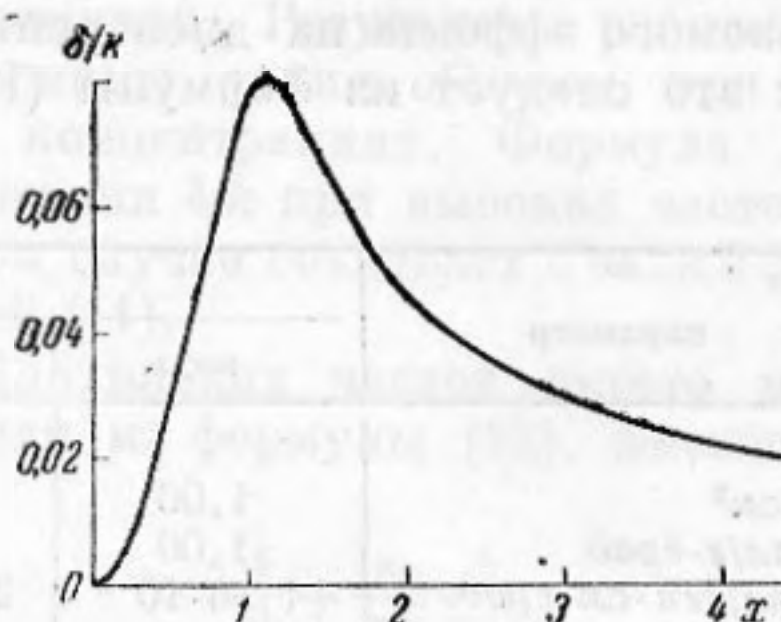
$$x = \sqrt{\frac{\omega}{\omega_2}}; \quad x^* = \sqrt{\frac{\omega}{\omega_1}}; \quad a \text{ может меняться от } 10 \text{ см}^{-4} \text{ до } 10 \text{ см}^{-1}$$

они даны в единой системе единиц. Данные и результаты для каждого расчета приведены в табл. 2. Во всех рассчитанных нами случаях, за исключением комбинации кварц — воздух, обе критические частоты оказались близкими одна к другой.

Вид зависимости δ/k от $x = \sqrt{\omega/\omega_2}$ в области критических частот был вычислен для случая $\eta = 0,4$, когда твердой фазой является кварц, и $\eta = 0,5$ для кальцита. Результаты расчета показаны на фиг. 3. Был также проделан расчет для комбинации кварц — воздух. В этом случае критические частоты расположены достаточно далеко одна от другой, но сочетание параметров таково, что первый максимум сглаживается и остается только второй (см. фиг. 4).



Фиг. 3. δ/k в зависимости от $x = \sqrt{\omega/\omega_1}$:
1 — для частиц кальцита в воде, 2 — для частиц кварца в воде



Фиг. 4. δ/k в зависимости от $x = \sqrt{\omega/\omega_1}$ для частиц кварца в воздухе

При ознакомлении с приведенными на фиг. 3 кривыми и с данными табл. 2, прежде всего бросается в глаза весьма небольшая величина мнимой части объемного модуля упругости. Даже в случае кальцита, дающего наибольшее значение δ/k , эта величина на максимуме не превышает $4 \cdot 10^{-4}$. При всех остальных частотах и в других комбинациях эта величина становится существенно меньшей. Причина здесь достаточно ясна — вследствие весьма малого отличия c_p/c_v от 1 как у воды, так и у взятых в расчет минералов, количество выделяющегося в них при прохождении звуковой волны тепла незначительно; изотермический процесс почти не отличается от адиабатического, из-за чего малы и термические потери. Если сопоставить термические потери в этих средах с потерями вязкими, то нетрудно убедиться, что доминировать в них должны потери, обязанные своим происхождением определенному сочетанию вязкости, плотности и частоты [4]. Иначе обстоит дело в случае кварца — воздуха. Величина δ/k имеет максимальное значение $8 \cdot 10^{-2}$, что по порядку сравнимо с потерями вязкого происхождения [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. P f r i a m. Zur thermischen Dämpfung in kugelsymmetrisch schwingenden Gasblasen. Akust. Zeitschr. 1940, 5, 4, 202—212.
2. Н. L a u e r. Akust. Beihelte, 1951, 1, 12—24.
3. М. А. И с а к о в и ч. О распространении звука в эмульсиях. Ж. эксп. и теор. физ., 1948, 18, 10, 907.
4. В. С. Н е с т е р о в. Вязко-инерционная дисперсия и затухание звука в суспензии высокой концентрации. Акуст. ж., 1959, 5, 3, 337—344.
5. Ф. Б е р ч, Д. Ш е р е р, Г. С п е й с е р. Справочник для геологов по физическим константам. М., ИЛ, 1949.

Кафедра акустики
Московского государственного
университета

Поступила в редакцию
25 января 1958 г.