АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том V | 1959 | Вып. 4

О СТРУКТУРЕ ПОЛЯ В ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ВОЛНОВОДАХ СЛОЖНОГО СЕЧЕНИЯ

В. В. Меркулов

Методом конформных преобразований задача решения волнового уравнения в двумерной области со сложными границами сведена к задаче решения волнового уравнения с переменными коэффициентами в области с простыми границами. Интегрирование полученного уравнения проведено при помощи теории возмущений, причем малым параметром является отношение расстояния между соответствующими точками границ сложной и простой областей к «масштабу неоднородностей» границ сложной области. В качестве примера вычислено поле волны E_{11} в прямоугольном волноводе с вогнутой верхней стенкой.

В настоящее время для расчета структуры поля и собственных длин волн в волноводах сложных сечений применяются в основном или вариационные методы, или методы теории возмущений.

Вариационные методы являются достаточно эффективными при нахождении собственных длин волн в волноводах произвольных сечений, однако вычисление структуры поля этими методами достаточно громоздко. Разработанные же методы теории возмущений удобны для расчета лишь в случаях, когда сечение волновода по форме мало отличается от области, решение для которой известно. В частности, в работе [1] при вычислении собственных функций и собственных значений на сечение наложено условие, чтобы оно полностью заключалось внутри области, для которой известно решение краевой задачи. Беря в качестве нулевого приближения решение для невозмущенной области, метод требует малости отличия возмущенных и невозмущенных сечений волновода.

В настоящей работе рассматривается возможность использования методов теории возмущений для определения структуры поля и собственных длин волн цилиндрических волноводов, форма сечения которых значительно отличается от сечений волноводов простых форм.

Рассмотрим цилиндрический волновод произвольного поперечного сечения, неограниченно простирающийся вдоль оси z. Введем обозначения: S — площадь поперечного сечения волновода, x и y — текущие координаты в плоскости сечения, L — ограничивающий сечение контур, Σ — боковая поверхность волновода.

Предположим, что стенки волновода идеально отражающие; среда, заполняющая волновод, однородна и не поглащает энергии; внутри волновода отсутствуют источники поля; поле меняется по закону $e^{i\omega t}$.

В случае звуковых колебаний потенциал Π поля скоростей в волноводе удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$\Delta\Pi + k^2\Pi = 0 \tag{1}$$

с граничным условием

$$\left.\frac{\partial\Pi}{\partial n}\right|_{\Sigma} = 0, \tag{2}$$

где n — внутренняя нормаль к Σ.

Как известно, в обобщенно-цилиндрических координатах решение уравнений Максвелла также сводится к решению уравнения (1) для однокомпонентного вектора Герца с граничными условиями

$$\Pi|_{\Sigma} = 0 \quad (TM\text{ — волны}),$$

$$\left.\frac{\partial \Pi}{\partial n}\right|_{\Sigma} = 0 \ (TE \text{ — волны}). \tag{3}$$

Через функцию Π поперечно-магнитные $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{H}_1$ и поперечно-электрические $\mathbf{E}_2$, $\mathbf{H}_2$ поля в волноводе выражаются формулами:

$$\mathbf{E}_1 = \nabla \frac{\partial \Pi}{\partial z} + k^2 \Pi \mathbf{i}_z, \quad \mathbf{H}_1 = ik \operatorname{rot}(\mathbf{i}_z \Pi),$$

$$\mathbf{E}_2 = -ik \operatorname{rot}(\mathbf{i}_z \Pi), \ \mathbf{H}_2 = \nabla \frac{\partial \Pi}{\partial z} + k^2 \Pi \mathbf{i}_z,$$

где $\mathbf{i}_z$ — единичный вектор в направлении z. Граничное условие (3) соответствует в акустике абсолютно податливым границам.

Таким образом, задача распространения как звуковых, так и электромагнитных колебаний в волноводе сводится к нахождению решений уравнения (1), удовлетворяющих на стенках волновода граничным условиям (2) или (3). Будем искать решение уравнения (1) в виде

$$\Pi = \psi_m(x, y) Z_m(z). \tag{4}$$

После подстановки (4) в (1) находим, что $\psi_m(x, y)$ является собственной функцией следующей задачи:

$$\Delta_2 \psi_m + \varkappa_m^2 \psi_m = 0 \text{ внутри } S, \tag{5}$$

$$\psi_m|_L = 0 \text{ или } \left.\frac{\partial \psi_m}{\partial n}\right|_L = 0, \tag{6}$$

где Δ_2 — двумерный оператор Лапласа, а функция $Z_m(z)$ определяется из уравнения

$$\frac{d^2 Z_m}{dz^2} + (k^2 - \varkappa_m^2) Z_m = 0.$$

Строгие решения уравнения (5) известны лишь для тех немногих областей S, в которых переменные уравнения разделяются. Во всех других случаях мы вынуждены ограничиваться приближенными решениями.

В частности, введем вместо x и y новые переменные ξ и η по формуле $x + iy = F(\zeta)$, где $F(\zeta)$ — аналитическая функция комплексного переменного $\zeta = \xi + i\eta$.

В новых координатах области S будет соответствовать область S_0, ограниченная контуром L_0, причем, если уравнение контура L в плоскости x, y определялось выражением $G(x, y) = \text{const}$, то в плоскости ξ, η контур L_0 будет удовлетворять соотношению $G[\operatorname{Re} F(\zeta), \operatorname{Im} F(\zeta)] = \text{const}$. Соответственно, уравнение (5) и граничные условия (6) запишутся в виде [2]

$$\Delta_2 \psi_m + \varkappa_m^2 |F'(\zeta)|^2 \psi_m = 0 \text{ внутри } s_0, \tag{7}$$

$$\psi_m|_{L_0} = 0 \text{ или } \left.\frac{\partial \psi_m}{\partial n}\right|_{L_0} = 0. \tag{8}$$

Естественно, что соответствие областей S_0 и S предполагается взаимно однозначным.

Таким образом, задача решения уравнения (5) с граничными условиями (6) в области S эквивалентна задаче интегрирования уравнения (7) с граничными условиями (8) в области S_0.

Будем считать, что функцию $F(\zeta)$ можно представить в виде

$$F(\zeta) = \zeta + h\,\Phi(\mu\zeta), \tag{9}$$

где $\Phi(\mu\zeta)$ удовлетворяет условию $|\Phi(\mu\zeta)| \leqslant 1$, h — постоянная, характеризующая величину отклонения $F(\zeta)$ от ζ, μ — параметр, определяющий быстроту изменения функции $\Phi(\mu\zeta)$.

В соответствии с (9) уравнение (7) можно переписать следующим образом:

$$\Delta_2\psi_m + \varkappa_m^2 \{1 + 2\varepsilon \operatorname{Re}\Phi'(\mu\zeta) + \varepsilon^2 [(\operatorname{Re}\Phi'(\mu\zeta))^2 + (\operatorname{Im}\Phi'(\mu\zeta))^2]\} \psi_m = 0, \quad (10)$$

где

$$\varepsilon = h\mu, \quad (11)$$

и производная берется по аргументу функции $\Phi(\mu\zeta)$.

Предположим, что $|\varepsilon| \ll 1$ и при $\varepsilon = 0$ нам известно решение $\psi_{m,0}$ уравнения (10) в области S_0 с граничными условиями

$$\psi_{m,0}|_{L_0} = 0 \text{ или } \frac{\partial\psi_{m,0}}{\partial n} = 0.$$

Тогда интегрирование уравнения (11) при граничных условиях (8) можно провести методами теории возмущений [3].

Допустим что задача для $\psi_{m,0}$ имеет только простые собственные значения, и полагаем соответственно этому

$$\psi_m = \psi_{m,0} + \varepsilon\psi_{m,1} + \ldots \quad (12)$$

$$\varkappa_m^2 = \varkappa_{m,0}^2 + \varepsilon\varkappa_{m,1}^2 + \ldots \quad (13)$$

Ограничиваясь первым приближением, после подстановки рядов (12) и (13) в (11) получим уравнения:

$$\Delta_2\psi_{m,0} + \varkappa_{m,0}^2\psi_{m,0} = 0, \quad (14)$$

$$\Delta_2\psi_{m,1} + \varkappa_{m,0}^2\psi_{m,1} = -2\varkappa_{m,0}^2 \operatorname{Re}\Phi'(\mu\zeta)\psi_{m,0} - \varkappa_{m,1}^2\psi_{m,0}. \quad (15)$$

Будем искать решение уравнения (15) в виде

$$\psi_{m,1} = \sum_{j=1}^{\infty} a_{mj}\psi_{j,0}. \quad (16)$$

Помножив уравнение (14) (заменив в нем индекс m через l) на $\psi_{m,1}$, а (15) на $\psi_{l,0}$, вычитая (14) из (15) и интегрируя полученное уравнение по основной области, получим после учета формулы Грина и соотношения (16)

$$\varkappa_{m,1}^2 = d_{mm},\ a_{mj} = \frac{d_{mj}}{\varkappa_{m,0}^2 - \varkappa_{j,0}^2}, \text{ где } d_{mj} = -2\varkappa_{m,0}^2 \int \operatorname{Re}\Phi'(\mu\zeta)\psi_{m,0}\psi_{j,0}\,ds.$$

Значение a_{mm}, определяемое из условия нормировки $\int\psi_m^2\,ds = 1$, равно нулю.

Таким образом,

$$\psi_{m,1} = \sum_{j=1}^{\infty}{}' \frac{d_{mj}}{\varkappa_{m,0}^2 - \varkappa_{j,0}^2}\psi_{j,0}, \quad (17)$$

причем штрих у знака суммы указывает, что следует опустить член с индексом $j = m$. Соответственные формулы могут быть легко получены для приближений высших порядков.

Полученные выражения определяют с точностью до членов первого порядка малости решение уравнения (10) в области S_0. Следовательно, после перехода от переменных ξ и η к старым переменным x и y мы будем знать с той же степенью точности решение уравнения (5) в области S.

Пределы применимости полученных формул ограничены условием $|\varepsilon| \ll 1$, где величина ε определяется выражением (11). Легко видеть, что $|\varepsilon|$ будет гораздо меньше единицы не только в случаях, когда деформации сечения волновода малы ($h \ll 1$), но и при больших отличиях границ сечения волновода от невозмущенных ($h \gg 1$), если деформации границ плавные ($\mu \ll 1$).

В качестве примера рассмотрим случай, когда на плоскости ζ задана прямоугольная область с границами $\xi = 0, a$; $\eta = b_1, b_2$ и $\Phi(\mu\zeta) = \cos\zeta$.

На плоскости x, y границы соответствующей области легко найти из уравнений (9), записываемых в данном случае в виде

$$x = \xi + h\cos\xi\,\mathrm{ch}\,\eta,$$
$$y = \eta - h\sin\xi\,\mathrm{sh}\,\eta.$$

Форма границы при $h = 0{,}1$, $a = \pi$, $b_1 = 0{,}8$, $b_2 = 1$ показана на фигуре (сплошная линия). Из фигуры видно, что данная граница может характеризовать прогиб стенок волновода, форма которого показана пунктиром.

Учитывая, что при граничном условии $\psi_{m,0}|_{L_0} = 0$ собственные функции и собственные значения уравнения Гельмгольца для исходной прямоугольной области в плоскости ξ, η определяются соотношениями:

$$\psi_{m,0}(\xi,\eta) = \sin\frac{m_1\xi}{a}\sin\frac{m_2\pi}{b_2 - b_1}(\eta - b_1), \quad (m_1,\ m_2 = 1, 2, \ldots)$$

$$\varkappa^2_{m,0} = \pi^2\left[\frac{m_1^2}{a^2} + \frac{m_2^2}{(b_2 - b_1)^2}\right],$$

а

$$\operatorname{Re}\Phi'(\zeta) = -\sin\xi\,\mathrm{ch}\,\eta,$$

для ψ_m после вычисления по формуле (17) получаем, согласно (12), выражение:

$$\psi_m(\xi,\eta) = \psi_{m,0}(\xi,\eta) + \frac{h\varkappa^2_{m,0}}{2}(b_2 - b_1)^2 \sum_{j_1=1}^{\infty}{}' \sum_{j_2=1}^{\infty}{}' \frac{1}{\varkappa^2_{m,0} - \pi^2\left[\frac{j_1^2}{a^2} + \frac{j_2^2}{(b_2 - b_1)^2}\right]} \times$$

$$\times\left[\frac{1 - (-1)^{m_1 - j_1}\cos a}{1 - \frac{\pi^2}{a^2}(m_1 - j_1)^2} + \frac{1 - (-1)^{m_1 + j_1}\cos a}{-1 + \frac{\pi^2}{a^2}(m_1 + j_1)^2}\right] \times$$

$$\times\left\{\mathrm{ch}\,b_1\,\mathrm{sh}\,(b_2 - b_1)\left[\frac{(-1)^{m_2 - j_2}}{\pi^2(m_2 - j_2)^2 - (b_2 - b_1)^2} - \frac{(-1)^{m_2 + j_2}}{\pi^2(m_2 + j_2)^2 + (b_2 - b_1)^2}\right] + \right.$$

$$\left. + \mathrm{sh}\,b_1\left[\frac{1 - (-1)^{m_2 + j_2}\,\mathrm{ch}\,(b_2 - b_1)}{\pi^2(m_2 + j_2)^2 + (b_2 - b_1)^2} - \frac{1 - (-1)^{m_2 - j_2}\,\mathrm{ch}\,(b_2 - b_1)}{\pi^2(m_2 - j_2)^2 + (b_2 - b_1)^2}\right]\right\}.$$

Соответственно, собственные значения будут определятся формулой

$$\varkappa^2_m = \varkappa^2_{m,0}\left\{1 + \frac{8h(1 - \cos a)(\mathrm{sh}\,b_2 - \mathrm{sh}\,b_1)\pi^4 m_1^2 m_2^2}{(4\pi^2 m_1^2 - a^2)\left[4\pi^2 m_2^2 + (b_2 - b_1)^2\right]}\right\},$$

позволяющей легко провести расчет для произвольных h, a, b_1, b_2, m_1 и m_2.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ph. M. Morse, H. Feshbach. Methods of theoretical physics. P. II, New York, 1953.
2. Л. В. Канторович и В. И. Крылов. Приближенные методы высшего анализа. М.— Л., Гостехиздат, 1952.
3. Р. Курант и Д. Гильберт. Методы математической физики. Т. 1, изд. 2, М.— Л., Гостехиздат, 1951.

Москва

Поступила в редакцию 25 февраля 1959 г.