

П Р О В О Д И М О С Т Ъ Г Р У П П Ы О Т В Е Р С Т И Й

В. С. Нестеров

Формула проводимости отверстий по Фоку применяется к частным случаям различного расположения одиночных отверстий в звукопроводах, а также для вычисления проводимости нескольких отверстий, объединенных в группу. Приведены результаты экспериментальной проверки, показавшей пригодность предлагаемых формул для расчета акустических свойств группы отверстий.

Элементами многих акустических систем являются отверстия, через которые проходит звук. Простым примером служит входное отверстие резонатора, более сложными — многочисленные отверстия в некоторых типах акустических фильтров, сгруппированные отверстия в микрофонах и тому подобное. Ниже дается попытка оценки акустических свойств нескольких или многих отверстий, объединенных в группу.

Проводимость одиночного отверстия в перегородке, поставленной поперек трубы

Для описания акустических свойств отверстий, как известно, пользуются так называемой «проводимостью» или же «присоединенной массой». В случае постоянного потока несжимаемой жидкости, набегающего нормально на бесконечно протяженную, идеально тонкую пластинку, присоединенная масса m и проводимость отверстия K равны [1]:

$$m = \rho \frac{\sigma^2}{K}; K = d, \tag{1}$$

где ρ — плотность среды, σ — площадь отверстия, d — его диаметр. Если пластина обладает конечной толщиной l , то проводимость становится равной

$$K = \frac{1}{l/\sigma + 1/d}. \tag{2}$$

Более сложной является задача о проводимости отверстия в перегородке, поставленной поперек трубы (фиг. 1), которую в 1940 г. впервые решил Фок [2]. По Фоку проводимость круглого отверстия в центре бесконечно тонкой перегородки, поставленной поперек трубы, равна

$$K = d/M(\xi), \tag{3}$$

где $\xi = d/D$ (d — диаметр отверстия, D — диаметр трубы); $M(\xi)$ — функция Фока, определяемая степенным рядом

$$M(\xi) = 1 + a_1\xi + a_2\xi^2 + a_3\xi^3 + \dots \tag{4}$$

с коэффициентами: $a_1 = -1,40925$; $a_2 = 0$; $a_3 = +0,33818$; $a_4 = 0$; $a_5 = +0,06793$; $a_6 = -0,02287$; $a_7 = +0,03015$; $a_8 = -0,01641$; $a_9 = +0,01729$; $a_{10} = -0,01248$; $a_{11} = +0,01205$; $a_{12} = -0,00985$ и так далее.

Ряд (4) быстро сходится при $d \ll D$ и медленно — при $d \rightarrow D$ (т. е. при $\xi \rightarrow 1$). Предельными являются случаи: а) $K = d$ при $\xi \rightarrow 0$, когда

проводимость по Фоку совпадает с формулой Рейли (1), б) $K = \infty$ при $\xi = 1$, когда присоединенная масса исчезает.

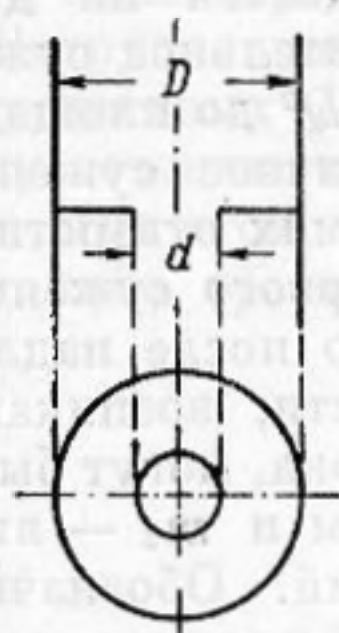
Если учесть конечную толщину перегородки, то проводимость отверстия вместо (2) должна определяться формулой

$$\frac{1}{K} = \frac{l}{\sigma} + \frac{M(\xi)}{d}. \quad (5)$$

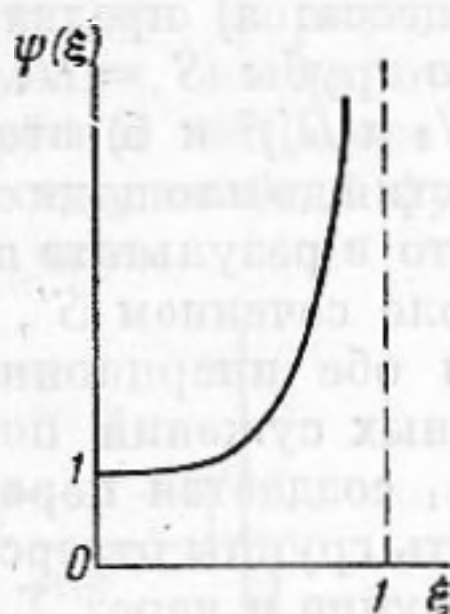
На фиг. 2 изображена функция, обратная ряду Фока:

$$\psi(\xi) = \frac{K}{d} = \frac{1}{M(\xi)}, \quad (6)$$

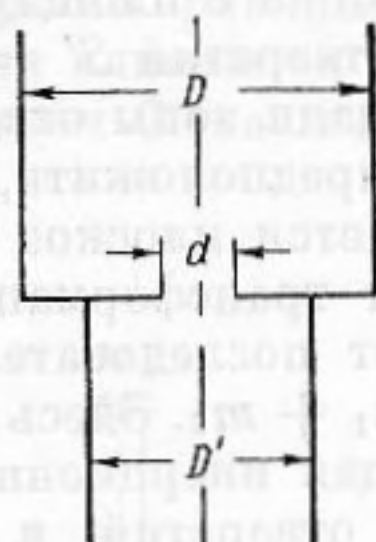
показывающая увеличение проводимости в трубе по сравнению с проводимостью отверстия в бесконечно протяженной перегородке.



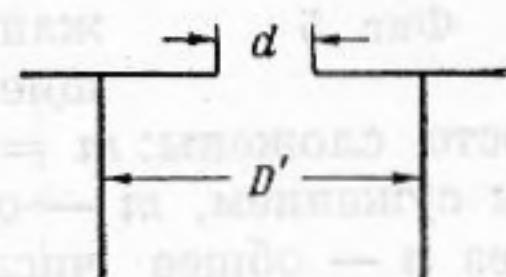
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

Выполненные нами измерения [3] показали очень хорошее согласие формулы Фока (3) с экспериментом. Для всех практически интересных случаев ряд Фока можно приближенно заменить трехчленом

$$M(\xi) = 1 - 1,41\xi + 0,41\xi^3, \quad (7)$$

дающим правильное значение функции $M(\xi)$ при $\xi = 1$ *.

Нетрудно написать выражения для проводимости в некоторых частных случаях. Так, например, проводимость отверстия, прорезанного в бесконечно тонкой перегородке, разделяющей две трубы различных диаметров D и D' (фиг. 3), должна определяться формулой:

$$\frac{1}{K} = \frac{1}{2d} [M(\xi) + M(\xi')], \quad (8)$$

где $\xi = d/D$ и $\xi' = d/D'$. Если $d = D'$, т. е. имеет место простой переход от одного сечения к другому, то проводимость места резкого сужения трубы будет равна

$$K = 2d/M(\xi). \quad (9)$$

В случае, изображенном на фиг. 4 (труба диаметром D' сообщается с полупространством при помощи отверстия в бесконечно протяженной перегородке $D = \infty$), проводимость отверстия должна равняться

$$K = \frac{2d}{1 + M(\xi)}. \quad (10)$$

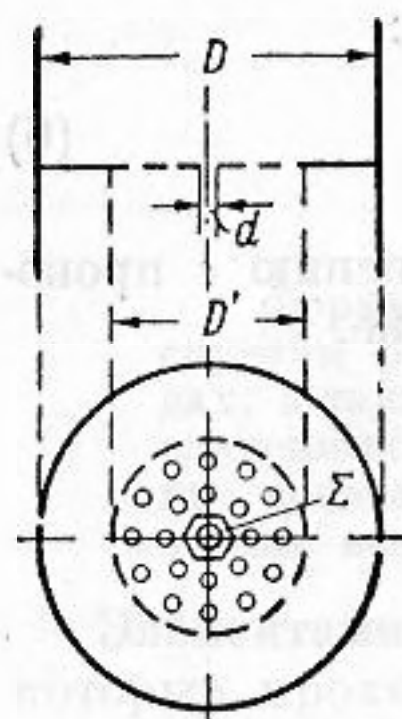
Конечная толщина перегородок в формулах (8)—(10) должна учитываться добавлением члена l/σ , аналогично (6).

* В работе автора [3] в приближенной формуле для $M(\xi)$ содержится опечатка, которая должна быть исправлена согласно формуле (7).

Проводимость группы отверстий *

Рассмотрим группу одинаковых круглых отверстий, прорезанных в центральной части перегородки, поставленной поперек трубы (фиг. 5).

Пусть диаметр отверстий равен d , диаметр круга, занятого отверстиями, — D' (уточнение этого размера будет дано ниже) и диаметр трубы — D . Строгое решение этой задачи следовало бы искать аналогично решению



Фиг. 5

задачи Фока с надлежащим усложнением граничных условий. Мы воспользуемся значительно более простым приемом, который приводит к формулам, хорошо согласующимся с результатами непосредственных измерений.

Будем считать, что прохождение звука через рассматриваемую группу отверстий распадается на два последовательных процесса: а) предварительное сужение потока с площадью трубы $S = 1/4 \pi D^2$ до площади зоны отверстий $S' = 1/4 \pi (D')^2$ и б) вторичное сужение с площади зоны отверстий до площади самих отверстий. Если предположить, что в результате первого сужения получается плоское поле сечением S' , то после надлежащей трансформации обе инерционности, возникающие от последовательных сужений потока, могут быть

просто сложены: $m = m_1 + m_2$. Здесь m_1 создается первым и m_2 — вторым сужением, m — общая инерционность группы отверстий. Обозначим через n — общее число отверстий в группе и через Σ — площадь единичной ячейки в зоне отверстий, так что

$$n \cdot \Sigma = S'. \quad (11)$$

Вводя обозначение $\xi = \sqrt{\sigma/\Sigma}$, получим массу одного отверстия равной $\rho \sigma^2 [l/\sigma + M(\xi)/d]$, поскольку предполагаемое плоское поле внутри S' можно разбить воображаемыми твердыми перегородками вдоль потока на отдельные трубки сечением Σ , в центре каждой из которых сделано по одному отверстию сечением σ . Нетрудно видеть, что на всю площадь S' приходится общая масса отверстий,

$$m_2 = \frac{\rho (S')^2}{n} \left[\frac{l}{\sigma} + \frac{M(\xi)}{d} \right]. \quad (12)$$

Присоединенная масса, возникающая в результате предварительного сужения потока от S до S' , равна

$$m_1 = \frac{\rho (S')^2 M(\xi')}{D'}, \quad (13)$$

где $\xi' = D'/D$. Складывая (12) и (13), получим полную массу

$$m = \frac{\rho (S')^2}{n} \left[\frac{l}{\sigma} + \frac{M(\xi)}{d} + \frac{nM(\xi')}{D'} \right]. \quad (14)$$

Таким образом, проводимость группы определяется формулой

$$\frac{1}{K} = \frac{1}{n} \left[\frac{l}{\sigma} + \frac{M(\xi)}{d} + \frac{nM(\xi')}{D'} \right]. \quad (15)$$

Пересчитывая (14) на единицу площади сечения всей трубы S и выражая результат в долях ρc среды, получим инерционный параметр группы отверстий в виде

$$M = \frac{S}{cn} \left[\frac{l}{\sigma} + \frac{M(\xi)}{d} + \frac{nM(\xi')}{D'} \right]. \quad (16)$$

* Основные формулы настоящего параграфа были получены автором в 1941—1943 гг. [4—5]. Близкий вопрос о проводимости многих одинаковых отверстий в плоском экране разбирался Г. Д. Малюжинцем [6].

Эта величина может вставляться в различные расчетные формулы. Например, в случае резонатора, показанного на фиг. 6, безразмерный импеданс должен равняться

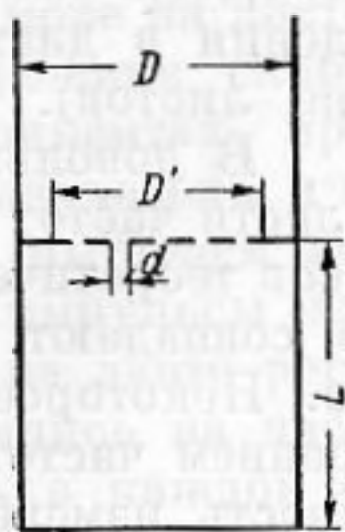
$$Z = i \left\{ \frac{\omega S}{cn} \left[\frac{l}{\sigma} + \frac{M(\xi)}{d} + \frac{nM(\xi')}{D'} \right] - \text{ctg} \frac{\omega L}{c} \right\}. \quad (17)$$

Последнее слагаемое в (15) можно также выразить через диаметр трубы:

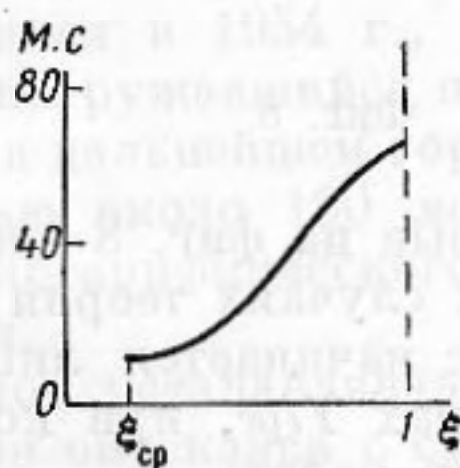
$$\frac{nM(\xi')}{D'} = \frac{n\xi M(\xi_{\text{ср}}/\xi)}{\xi_{\text{ср}} D},$$

где ξ имеет прежнее значение, а $\xi_{\text{ср}} = \sqrt{n\sigma/S}$.

Нетрудно видеть, что формулы (15)–(17) дают правильное значение в предельных случаях, когда отверстия равномерно распределены по всему сечению трубы и когда все они сливаются в одно большое отверстие. При этом, в силу свойств функции Фока, в (15) исчезает либо второй, либо третий член.



Фиг. 6



Фиг. 7

Величины D' и S' до сих пор не были определены, поскольку неизвестно, где надо проводить внешнюю границу зоны занятой отверстиями. Если на долю одного отверстия, не считая наружного ряда, приходится площадка Σ см², то примем формулу (11) за определение S' . Отсюда $D' = 2\sqrt{n\Sigma/\pi}$. Как показывают непосредственные измерения проводимости группы отверстий, это определение дает приемлемую величину D' .

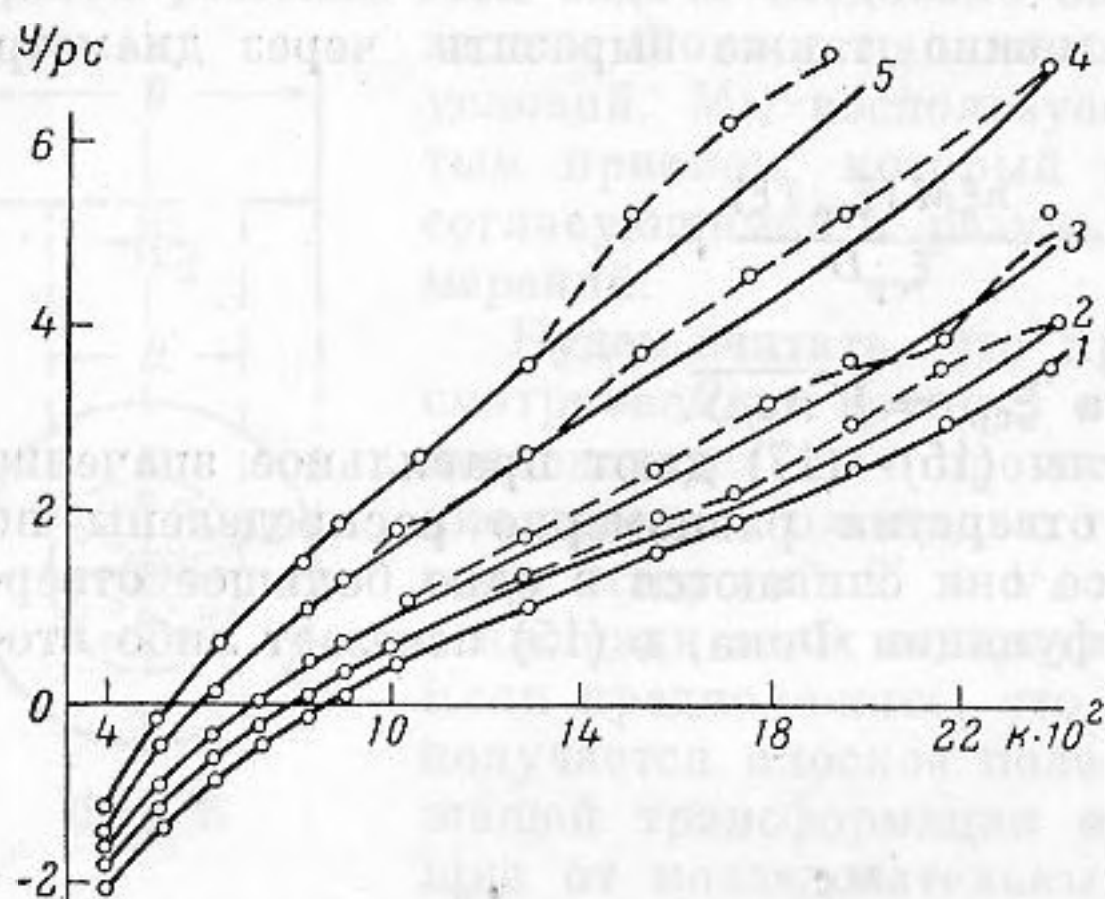
На фиг. 7 в качестве примера приведена кривая, рассчитанная согласно (16), показывающая изменение инерционного параметра Mc (c — скорость звука) 45 отверстий $d = 0,4$ см, сначала равномерно расположенных по сечению трубы ($D = 16,5$ см), а затем постепенно сдвигаемых к центру перегородки. В качестве независимого переменного взято $\xi = \sqrt{\sigma/\Sigma}$, изменяющееся от $\xi = \xi_{\text{ср}}$ при равномерном распределении всех 45 отверстий по сечению трубы вплоть до 1 при слиянии всех отверстий в одно. При равномерном распределении инерционный параметр равен 12,2. Когда отверстия группируются на половине площади ($S' = 0,5 S$) инерционность повышается до 13,5, т. е. на 10%. Группировка отверстий на 0,25 общего сечения трубы увеличивает инерционность до 17,3 (приблизительно на 40%). Наконец, объединение всех отверстий в одно повышает инерционность до 67,6.

Экспериментальная проверка

Проверка формул (15) и (16) была произведена путем измерения импеданса воздушных резонаторов, собранных согласно схеме фиг. 6. С этой целью нижний конец трубы диаметром $D = 12$ см и длиной около 3 м закрывался цилиндрическим резонатором того же диаметра как и труба. Устьем

резонаторов служили отверстия в перегородке, отделявшей резонатор от трубы. Измерение производилось общеизвестным методом стоячих волн.

На фиг. 8 приведена часть результатов измерений. Здесь в функции волнового числа k изображен безразмерный реактанс системы $Y/\rho c$. Сплошные кривые вычислены согласно (17), точки и штриховые линии — результаты измерений. Основные данные о резонаторах сведены в таблицу,



Фиг. 8

в последних двух столбцах которой показаны волновые числа, соответствующие резонансу. Из них $k_{\text{теор}}$ рассчитано по формуле (17), $k_{\text{эксп}}$ — получено экспериментально. Графика, аналогичного фиг. 7, мы не приводим, поскольку экспериментально осуществленные группы отверстий не образуют точной серии (между отдельными образцами имеются некоторые расхождения в диаметрах и толщине листов).

В довольно широкой области частот около резонансов теоретические и экспериментальные кривые на фиг. 8 очень хорошо совпадают. Положение резонансов во всех случаях теория дает точно. Некоторое расхождение в кривых для $Y/\rho c$ начинается лишь с повышением частоты и при значительных величинах $Y/\rho c$, при которых точность измерения нашей установки начинает падать.

Таблица

№ резонатора	Глубина $L, \text{см}$	Количество отверстий n	Диаметр отверстий $d, \text{см}$	Диаметр зоны отверстий $D', \text{см}$	Толщина перегородки $l, \text{см}$	$k_{\text{теор}} \cdot 10^2$	$k_{\text{эксп}} \cdot 10^2$
1	10,5	19	0,65	12,0	0,23	8,15	8,15
2	10,5	19	0,65	7,45	0,23	7,70	7,70
3	10,5	19	0,65	5,50	0,22	7,05	7,10
4	10,5	19	0,61	3,97	0,23	6,10	5,90
5	10,5	1	3,00	3,00	0,23	5,35	5,35

Поскольку теория дает правильное значение импеданса и собственных частот резонансных систем, инерционность которых создается группой отверстий, постольку формулы (14)—(16) можно считать пригодными для расчета инерционных свойств и проводимости сгруппированных отверстий.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дж. В. Стратт (Рэлей). Теория звука, т. II, гл. 16, М.—Л., ОГИЗ, 1944.
2. В. А. Фок. Теоретическое исследование проводимости круглого отверстия в перегородке, поставленной поперек трубы. Докл. АН СССР, 1941, 31, 9, 875—878.
3. В. С. Нестеров. Экспериментальное исследование проводимости круглого отверстия в перегородке, поставленной поперек трубы. Докл. АН СССР, 1941, 31, 9, 879—882.
4. В. С. Нестеров. К вопросу о проводимости отверстий в плоском экране. ТО Отдела акустики СДС, 1941.
5. В. С. Нестеров. Резонансные звукопоглощающие системы (диссертация). Физический институт им. П. Н. Лебедева АН СССР, 1943.
6. Г. Д. Малюжинец. Проводимость отверстий в плоском экране (диссертация). МГУ, 1938.

Кафедра акустики Московского государственного университета

Поступила в редакцию
15 апреля 1958 г.