

МЕТОД РАСЧЕТА КОЭФФИЦИЕНТА УСИЛЕНИЯ СХОДЯЩИХСЯ ЗВУКОВЫХ ВОЛНОВЫХ ПУЧКОВ

Б. Д. Тартаковский

Описывается приближенный метод вычисления зависимости коэффициентов усиления фокусирующих систем от совокупного действия неравномерности распределения амплитуды по волновому фронту в сочетании с фазовой аберрацией.

Приводятся графики вычисленных нормированных функций, представляющих собой обобщение интегралов Френеля для расчета таких систем и графики, иллюстрирующие роль неравномерности амплитуды и фазовой аберрации различных форм.

В ряде работ, преимущественно Розенбергом [1], были рассчитаны коэффициенты усиления звукового давления и колебательной скорости в фокусе различных звуковых фокусирующих систем, характеризующихся неравномерным распределением амплитуды по волновому фронту. Полученные функциональные зависимости коэффициентов усиления от отдельных параметров этих систем позволили найти их оптимальные величины и сравнить между собой различные фокусирующие системы по их предельно возможным коэффициентам усиления [2].

Дальнейшее развитие и усложнение приборов ультразвуковой оптики делает однако затруднительным, если не невозможным, аналитическое интегрирование сложных функциональных выражений, характеризующих распределение амплитуды по волновому фронту. Кроме того, во многих практических случаях расчета ультразвуковых фокусирующих систем приходится учитывать наличие, хотя и небольшой, сферической аберрации, что, естественно, еще больше усложняет интегрирование соответствующих выражений.

В связи с этим, ниже излагается приближенный метод вычисления коэффициентов усиления фокусирующих систем, позволяющий охарактеризовать зависимость коэффициента усиления от совокупного действия неравномерности распределения амплитуды по волновому фронту в сочетании с фазовой аберрацией независимо от того, какая фокусирующая система создает сходящийся волновой пучок.

Суть этого метода заключается в том, что вначале численно, в приближении геометрической оптики, рассчитывается распределение амплитуды по волновому фронту и фазовая (волновая) аберрация. Затем эти «точные» числовые функции приближенно заменяются суммой членов ряда, для которого выполнено интегрирование и вычислены соответствующие таблицы. Это позволяет с необходимой для практики точностью определить коэффициент усиления любой радиально-симметричной звуковой фокусирующей системы и оценить его зависимость от отдельных параметров системы.

Согласно [3], коэффициенты усиления звукового давления K_p и колебательной скорости K_v радиально-симметричного сходящегося волнового пучка определяются формулами:

$$K_p = ikFe^{-ikF} \int_0^{\alpha_{\max}} \Phi(\alpha) e^{-i\psi(\alpha)} \sin \alpha d\alpha, \quad (1)$$

$$K_v = ikFe^{-ikF} \int_0^{\alpha_{\max}} \Phi(\alpha) e^{-i\psi(\alpha)} \sin \alpha \cos \alpha d\alpha, \quad (2)$$

где k — волновое число; F — фокусное расстояние (радиус сходящегося волнового пучка), α — угол, образуемый лучом, проведенным из элемента интегрируемой поверхности в фокус с осью пучка; $\Phi(\alpha)$ — радиально-симметричная функция распределения амплитуды звукового давления (или пропорциональной ей колебательной скорости) по волновому сходящемуся фронту, отличающемуся от сферической поверхности на величину фазовой аберрации $\psi(\alpha)$ радиан.

Формулы (1), (2) могут быть представлены в виде

$$K_{p,v} = K_{p,v}^* \left[\frac{1}{x} \int_0^{x_m} e^{-i(\psi_2 x^2 - \psi_3 x^3 + \dots)} (1 + \Phi_1 x + \Phi_2 x^2 + \dots) dx \right], \quad (3)$$

где $K_{p,v}^* = ikFxe^{-ikF}$ — коэффициент усиления по звуковому давлению или колебательной скорости безабберационного волнового пучка с равномерным распределением амплитуды по фронту. При вычислении K_p следует принимать $x = 1 - \cos \alpha$, при вычислении K_v $x = \frac{\sin^2 \alpha}{2}$; Φ_1, Φ_2, \dots , ψ_2, ψ_3, \dots представляют собою коэффициенты полиномов, заменяющих функции $\Phi(\alpha)$, $\psi(\alpha)$. Член $\psi_2 x^2$ определяет собой фазовую аберрацию, соответствующую сферической аберрации 3-го порядка. Последующие члены этого ряда дают аберрацию более высоких порядков. В звуковых фокусирующих системах благодаря не очень большому отношению диаметра зрачка к длине волны аберрация этих порядков мала. Поэтому можно приближенно принять

$$\exp[-i(\psi_2 x^2 + \psi_3 x^3 + \psi_4 x^4 + \dots)] = \exp[-i\psi_2 x^2] \{1 - i(\psi_3 x^3 + \psi_4 x^4 + \dots) + \frac{i^2}{2!} (\psi_3 x^3 + \psi_4 x^4 + \dots)^2 - \dots\}. \quad (4)$$

Подстановка (4) в (3) дает

$$K_{p,v} = K_{p,v}^* \left[\frac{1}{x} \int_0^{x_{\max}} e^{-i\psi_2 x^2} (1 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots) dx, \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} a_1 &= \Phi_1; \quad a_2 = \Phi_2; \quad a_3 = \Phi_3 - i\psi_3; \quad a_4 = \Phi_4 - i(\Phi_1\psi_3 + \psi_4); \\ a_5 &= \Phi_5 - i(\Phi_1\psi_4 + \psi_5 + \Phi_2\psi_3); \\ a_6 &= \Phi_6 - i(\Phi_1\psi_5 + \Phi_2\psi_4 + \Phi_3\psi_3 + \Phi_6) + \frac{i^2}{2!} \psi_3^2; \dots \end{aligned}$$

Обозначив

$$\begin{aligned} P_1(x) &= \int_0^{x_m} e^{-i\psi_2 x^2} (1 + a_2 x^2 + a_4 x^4 + \dots) dx, \\ P_2(x) &= \int_0^{x_m} e^{-i\psi_2 x^2} (a_1 x + a_3 x^3 + \dots) dx, \end{aligned} \quad (6)$$

получим

$$K_{p,v} = K_{p,v}^* \cdot \frac{1}{x} [P_1(x) + P_2(x)]. \quad (7)$$

Подстановкой $\phi_2 x^2 = \frac{\pi}{2} u^2$ преобразуем ряд P_1 к виду:

$$P_1(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2\phi_2}} \int_0^{u_m} e^{-\frac{i\pi u^2}{2}} \left(\sum_{p=0}^{\infty} b_{2p} u^{2p} \right) du, \quad (6a)$$

где $b_{2p} = (\pi/2\phi_2)^p a_{2p}$, $a_0 = 1$.

Можно показать справедливость следующей рекуррентной формулы, необходимой для интегрирования ряда $P_1(x)$:

$$\int e^{-\frac{i\pi u^2}{2}} u^{2p} du = \frac{i}{\pi} \left[e^{-\frac{i\pi u^2}{2}} u^{2p-1} - (2p-1) \int e^{-\frac{i\pi u^2}{2}} u^{2(p-1)} du \right]. \quad (8)$$

Проинтегрировав (7), получим при замене u на x

$$P_1(x) = x \left[\sum_{p=0}^{\infty} \frac{a_{2p} x^{2p}}{2p+1} Z_{2p} - iz \sum_{p=0}^{\infty} \frac{a_{2p} x^{2p}}{2p+3} Z'_{2p} \right],$$

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} C(z), \quad Z'_0 = \frac{3}{z} \sqrt{\frac{\pi}{2z}} S(z),$$

$$Z_2 = \frac{3}{2z} \left[\sin z - \sqrt{\frac{\pi}{2z}} S(z) \right], \quad Z'_2 = \frac{5}{2z^2} \left[\sqrt{\frac{\pi}{2z}} C(z) - \cos z \right], \quad (9)$$

$$Z_4 = \frac{5}{2z} \left\{ \sin z - \frac{3}{2z} \left[\sqrt{\frac{\pi}{2z}} C(z) - \cos z \right] \right\},$$

$$Z'_4 = \frac{7}{2z^2} \left\{ \frac{3}{2z} \left[\sin z - \sqrt{\frac{\pi}{2z}} S(z) \right] - \cos z \right\},$$

$$Z_{2p} = \frac{2p+1}{2z} \left[\sin z - \frac{z(2p-1)}{2p+1} Z'_{2(p-1)} \right],$$

$$Z'_{2p} = \frac{2p+3}{2z^2} [Z_{2(p-1)} - \cos z], \quad p \geq 2,$$

нормированные функции, приведенные к единице при $z = \phi_2 x^2 = 0$.

Функции Z_0 и Z'_0 являются действительной и мнимой составляющими интеграла Френеля, остальные — характеризуют изменение коэффициента усиления, связанное с неравномерным распределением амплитуды по волновому фронту в совокупности с фазовой aberrацией и в этом смысле являются обобщенными интегралами Френеля. Индекс этих функций соответствует индексу коэффициентов полинома P_1 .

Ряд $P_2(x)$ подстановкой $u = -i\phi_2 x^2$ приводится к виду:

$$P_2 = \frac{1}{2} \int_0^{u_m} e^u \sum_{p=0}^{\infty} b_{2p+1} u^p du, \quad (10)$$

где $b_{2p} = a_{2p+1} (i/\phi_2)^{p+1}$.

Воспользовавшись табличным интегралом $\int e^u u^p du = e^u \sum_{r=0}^p (-1)^{p-r} \frac{p! u^r}{r!}$,

получим далее

$$P_2(x) = x \left[\sum_{p=0}^{\infty} \frac{a_{2p+1} x^{2p+1}}{2(p+1)} Z_{2p+1} - iz \sum_{p=0}^{\infty} \frac{a_{2p+1} x^{2p+1}}{2(p+2)} Z'_{2p+1} \right], \quad (11)$$

где, подобно (9), $z = \phi_2 x^2$, а $Z_1 = \frac{\sin z}{z}$; $Z'_1 = 2 \frac{1 - \cos z}{z^2}$; $Z_3 = 2 \left(\frac{\sin z}{z} - \frac{1 - \cos z}{z^2} \right)$; $Z'_3 = \frac{3}{z^2} \left(\frac{\sin z}{z} - \cos z \right)$; $Z_{2p+1} = (p+1) \frac{\sin z}{z} - p Z'_{2p-1}$; $Z'_{2p+1} = \frac{p+2}{z^2} (Z_{2p-1} - \cos z)$.

Подстановка (9), (10) в (6) дает общее решение для коэффициента усиления в фокусе пучка, характеризуемого неоднородным распределением амплитуды и фазовой аберрацией:

$$K_{p,v} = K_{p,v}^* \left\{ \sum_{p=0}^{\infty} \frac{a_p x^p}{p+1} Z_p - iz \sum_{p=0}^{\infty} \frac{a_p x^p}{p+3} Z'_p \right\}, \quad (12)$$

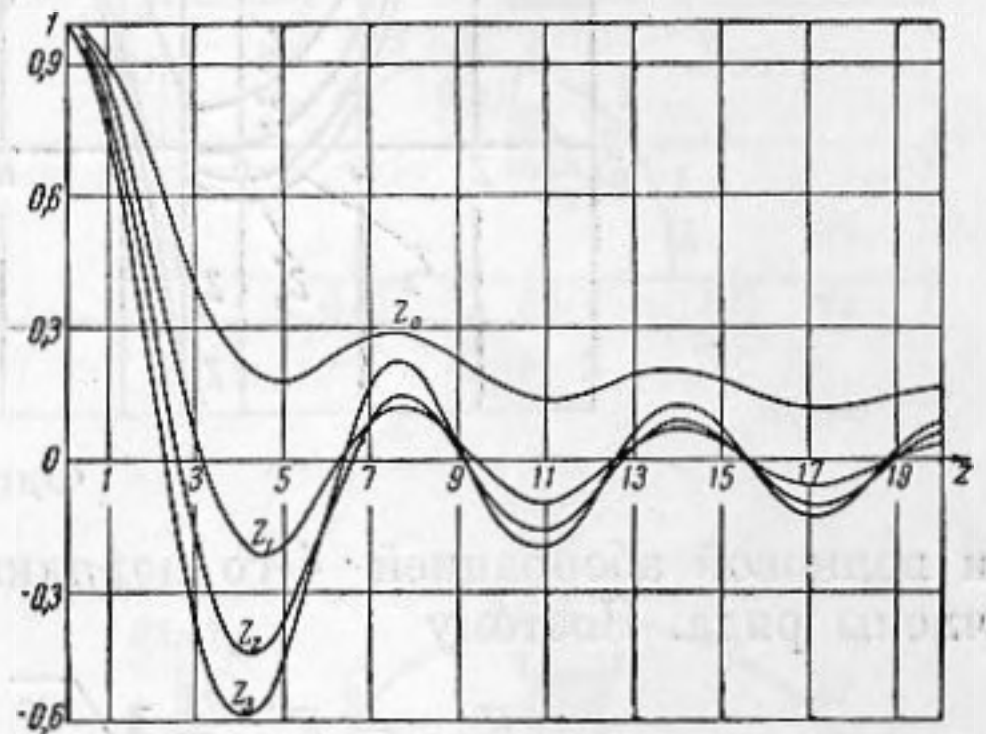
где функции $Z_{2p}(z)$ определяются из (9) (фиг. 1), а $Z_{2p+1}(z)$ из (11) (фиг. 2).

Для определения коэффициентов полиномов a_1, a_2, \dots необходимо численно задать $\Phi(x)$ и $\phi(x)$ в каждом конкретном случае и затем аппроксимировать их полиномами.

Одним из наиболее простых и в то же время достаточно точных методов является приравнивание функции $\Phi(x_p)$ в некоторых произвольно выбираемых точках x_p сумме ряда $\sum_{q=0}^p a_q x^q$. Количество членов этого ряда определяется желательным числом точек сравнения. Таким образом, получается система уравнений

$$\sum_{p=0}^n a_p x_q^p = \Phi(x_q) \quad (13)$$

$(q = 0, 1, 2, \dots, n),$



Фиг. 1

коэффициенты которых $a_p = D_p/D$ вычисляются при помощи определителей. Определитель знаменателя

$$D = \begin{vmatrix} x_0^0 & x_0^1 & x_0^2 & \dots & x_0^p \\ x_1^0 & x_1^1 & x_1^2 & \dots & x_1^p \\ x_2^0 & x_2^1 & x_2^2 & \dots & x_2^p \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_p^0 & x_p^1 & x_p^2 & \dots & x_p^p \end{vmatrix}.$$

Определители числителей D_p получаются из D заменой столбца x_i^p на свободные члены $\Phi(x_q)$.

Для расчета фокусирующих систем, характеризуемых не слишком большой сферической аберрацией (т. е. аберрацией, которая с достаточной степенью точности может быть представлена (4)) можно удержать в (13) члены со степенью p не выше 2.

Рассмотрим некоторые частные случаи. Для волнового пучка с неравномерным распределением амплитуды по волновому фронту и малой сферической аберрацией, разлагая (12) в ряд по степеням z , получим, ограничившись первыми двумя членами,

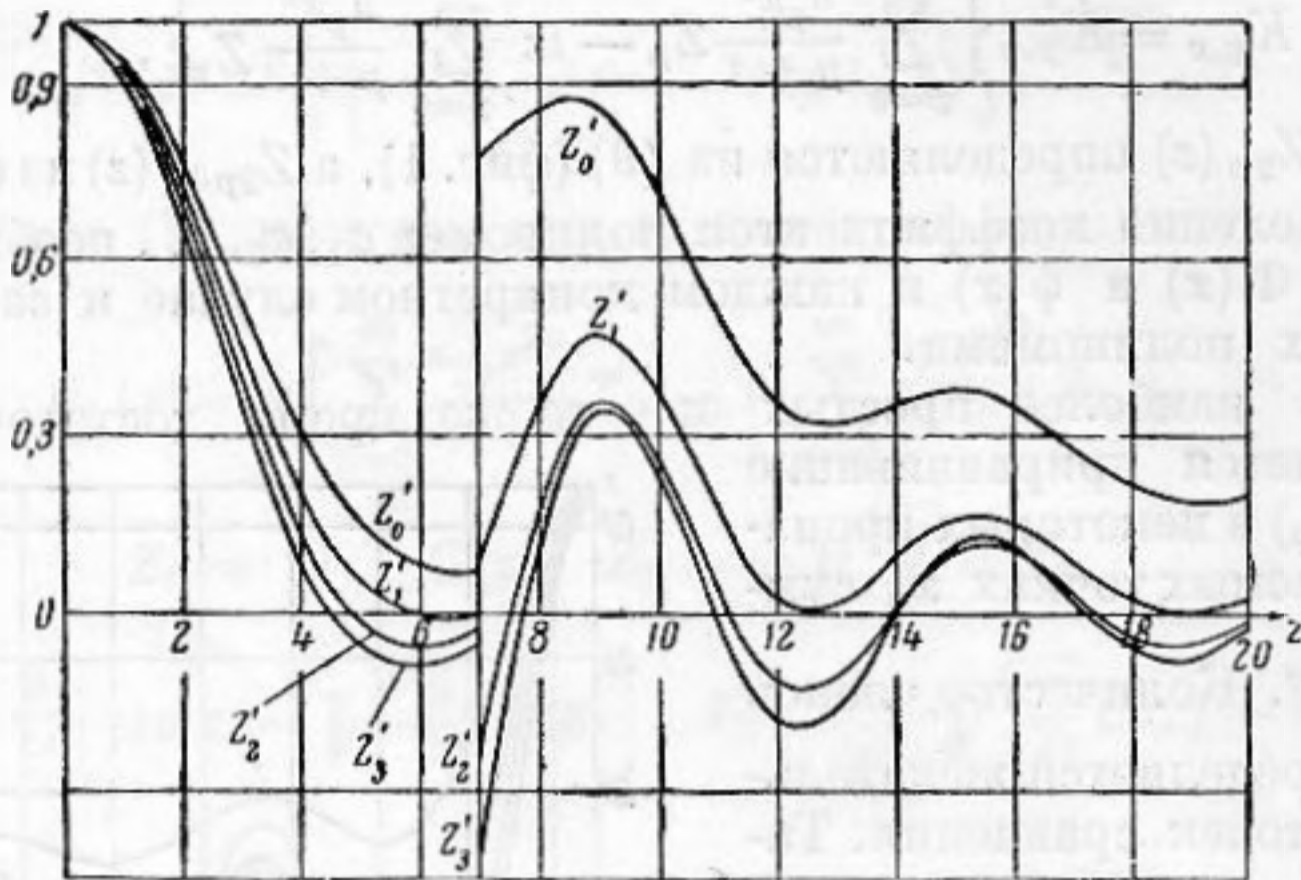
$$K_{p,v} = K_{p,v}^* \left(1 + \frac{a_1 x}{2} + \frac{a_2 x^2}{3} + \dots \right). \quad (12a)$$

Если $z < 0,1$, (12а) позволяет получить результат с погрешностью меньше 2%.

Для параксиального волнового пучка, характеризуемого неравномерным распределением амплитуды по волновому фронту и фазовой aberrацией 4-го порядка, коэффициент усиления равен

$$K_{p,v} = K_{p,v}^* \frac{1}{x} \left[Z_0 + \frac{a_1 x}{2} Z_1 - i Z'_0 \right]. \quad (14)$$

При расчете коэффициента усиления широкоугольного волнового пучка, характеризуемого постоянной амплитудой по волновому фронту



Фиг. 2

и волновой aberrацией 4-го порядка, отличны от нуля только первые члены ряда. Поэтому

$$K_{p,v} = K_{p,v}^* \frac{1}{x} \sqrt{\frac{\pi}{2z}} [C(z) - iS(z)]. \quad (15)$$

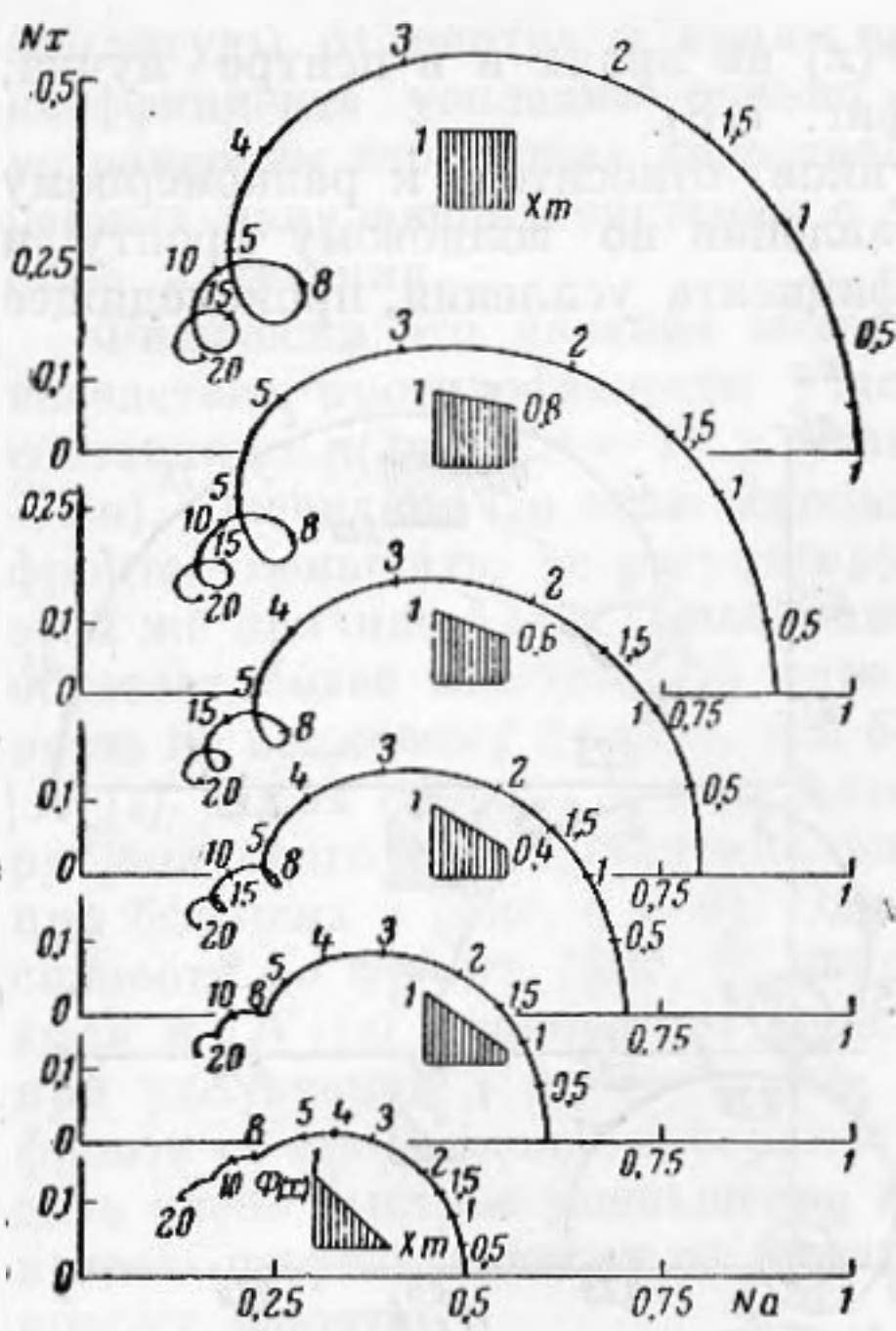
Если фазовая aberrация более четвертого порядка велика, аналитический метод определения коэффициента усиления, хотя и возможен, но затруднителен. В этом случае целесообразно исследовать графический метод расчета, заменив (1) суммой:

$$K_{p,v} \approx ikFx_m e^{-ikF} \frac{1}{n} \sum_{q=0}^n \Phi(x_q) e^{-i\psi(x_q)}. \quad (16)$$

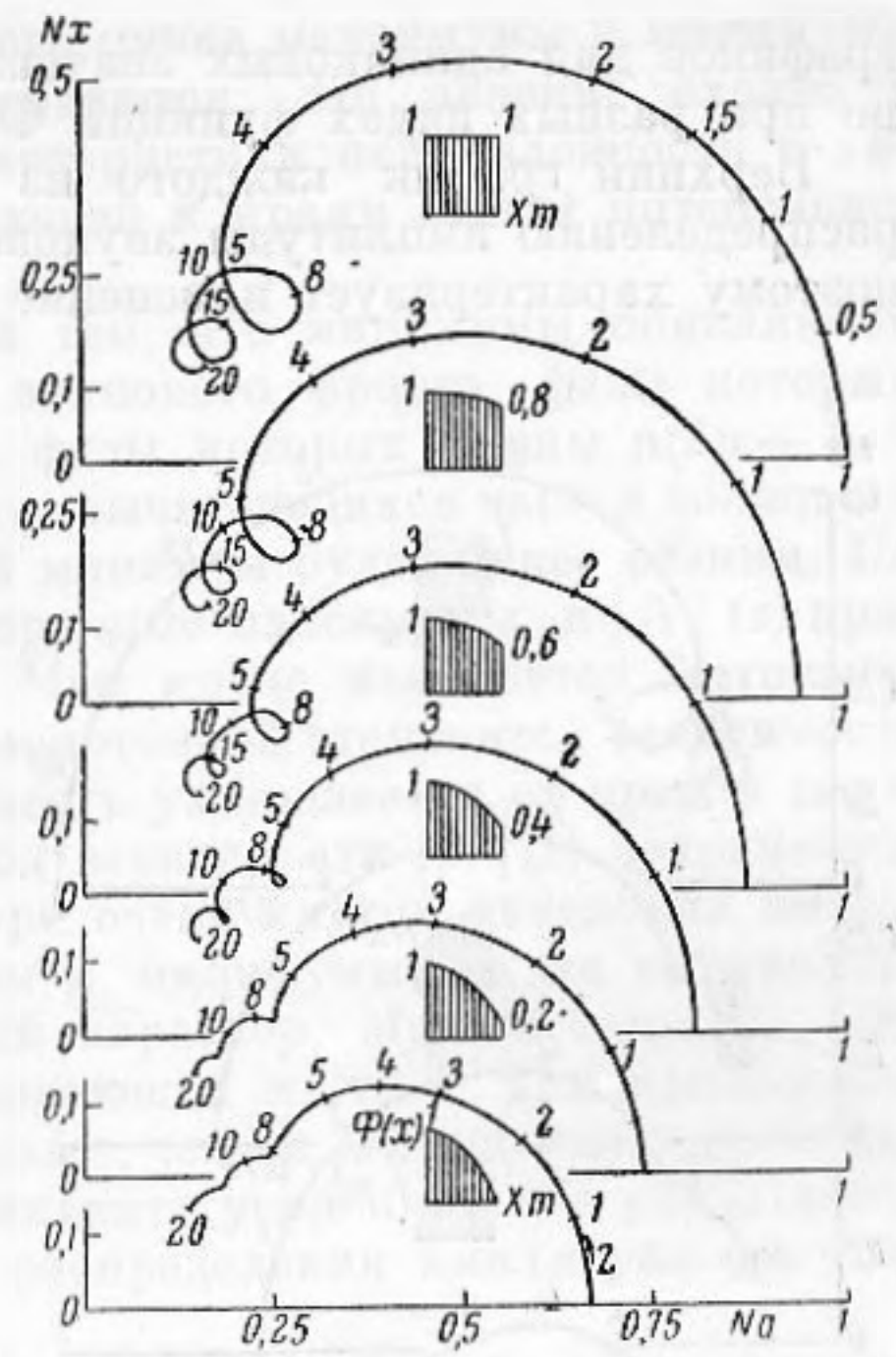
где x_q — точки, характеризуемые средними значениями абсциссы в промежутках Δx ; n — число отрезков Δx на длине x_m , выбранное таким образом, чтобы приблизиться с заданной степенью точности к кривым $\Phi(x)$, $\psi(x)$.

Найдя методом проб или аналитически максимум $K_{p,v}$, можно определить расположение фокуса пучка, как известно, несовпадающего с параксиальным фокусом.

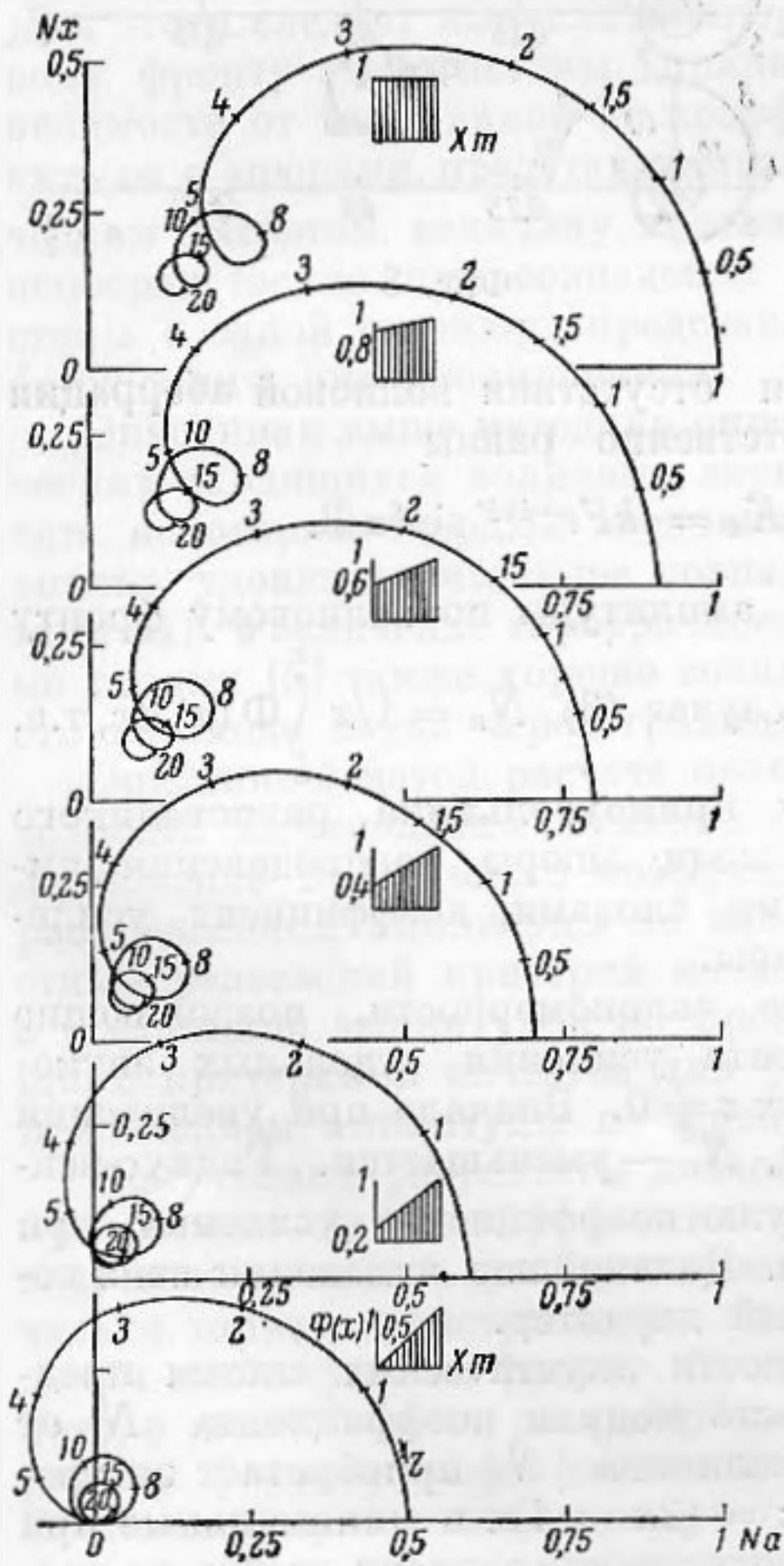
Для количественной оценки совместного влияния неравномерности распределения амплитуды и фазовой aberrации на изменение коэффициента усиления нами вычислена параметрическая зависимость $N = K_{p,v}/K_{p,v}^*$ от z и вида функции $\Phi(x)$ (фиг. 3 — 8). По горизонтальной и вертикальной оси графиков отложены значения активной и реактивной составляющей N , значения аргумента z указаны около кривых $N(z)$. У каждого графика приведена соответствующая ему эпюра распределения амплитуды по волновому фронту (заштрихованная вертикально). На отдельных рисунках приводятся семейства графиков для одних и тех же функций $\Phi(x) = 1 - x$ и $\Phi(x) = 1 - x^2$ при различных значениях функций на краях и в середине пучка (рис. 3 — 6) и семейства



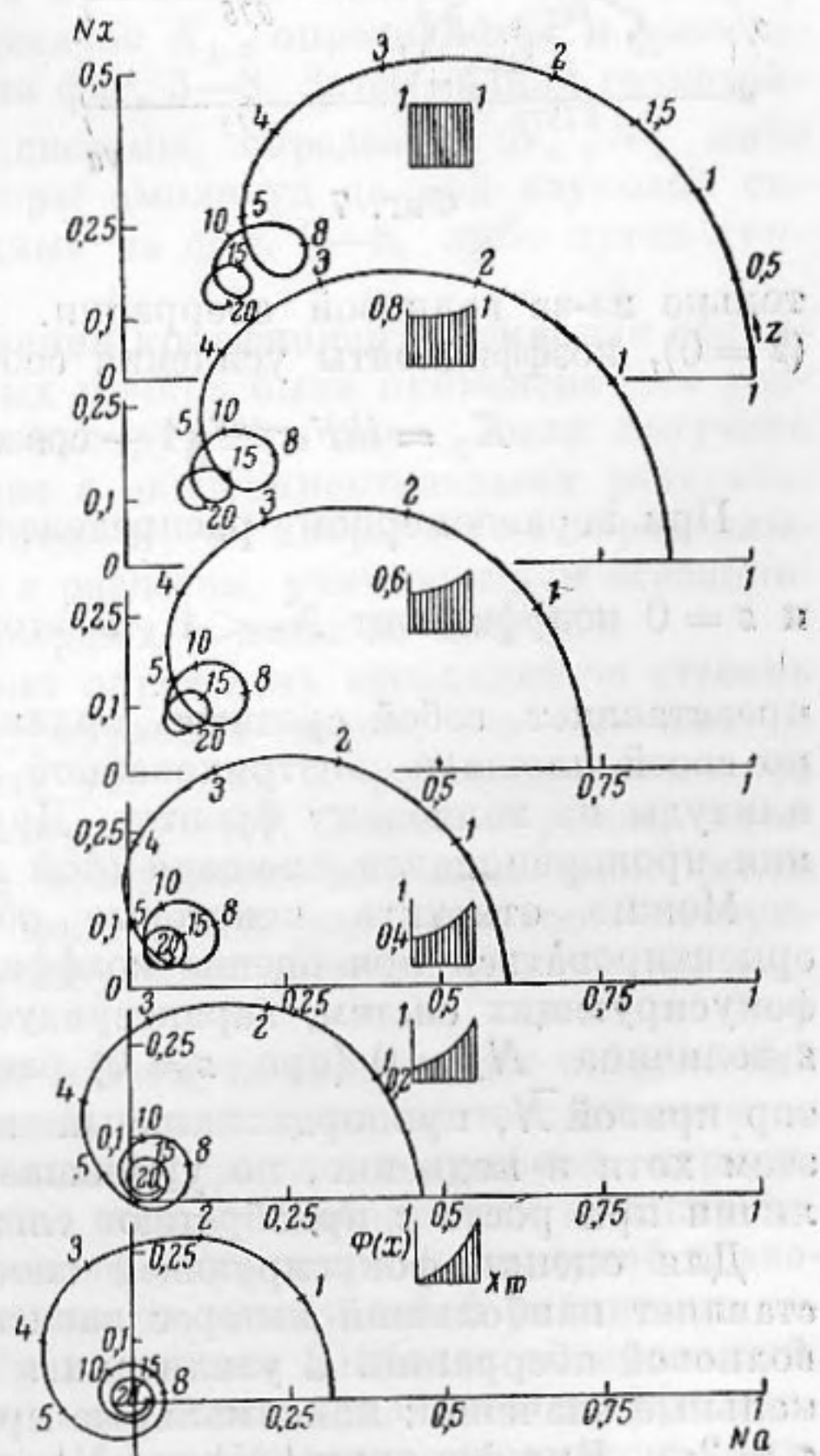
Фиг. 3



Фиг. 5



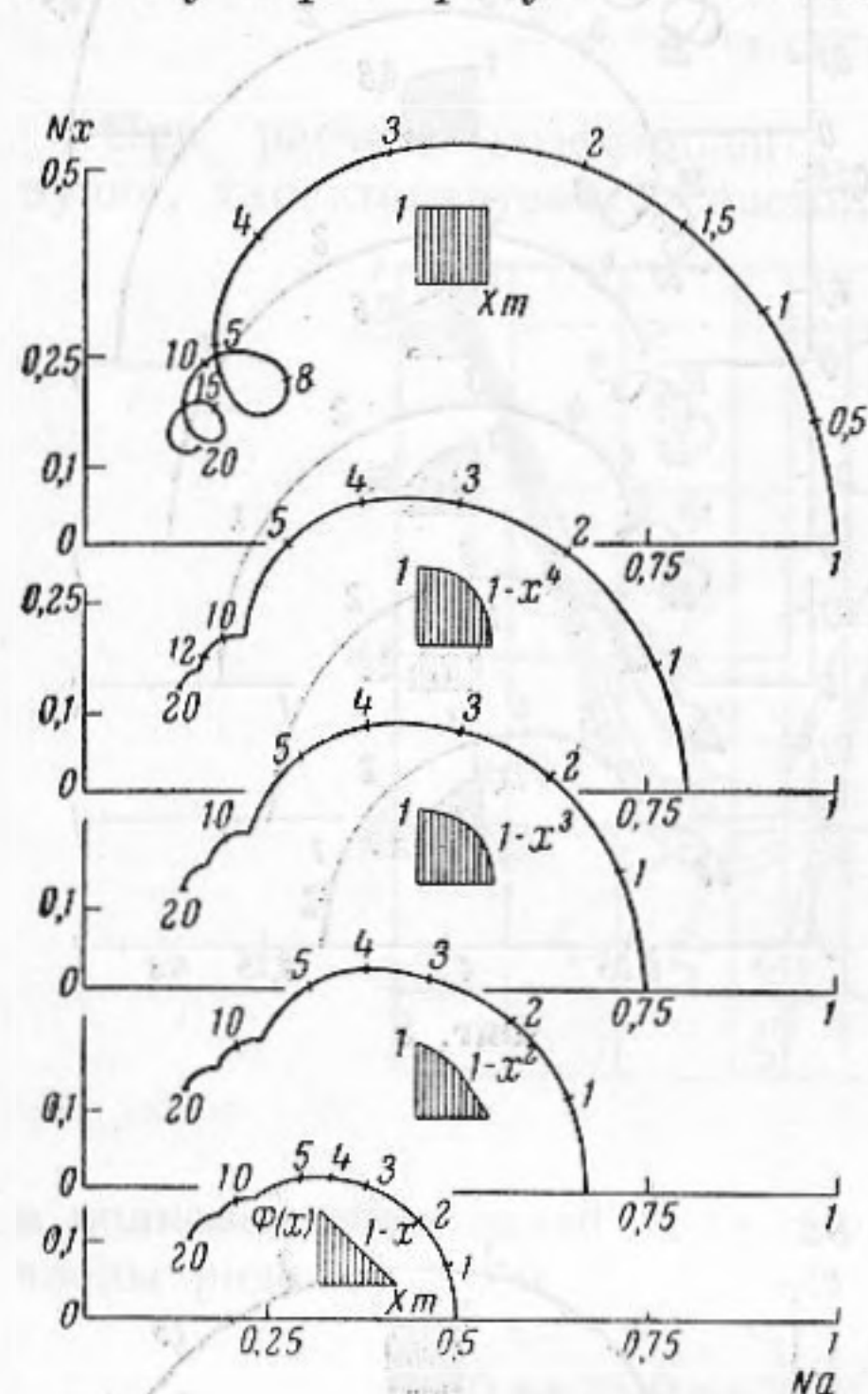
Фиг. 4



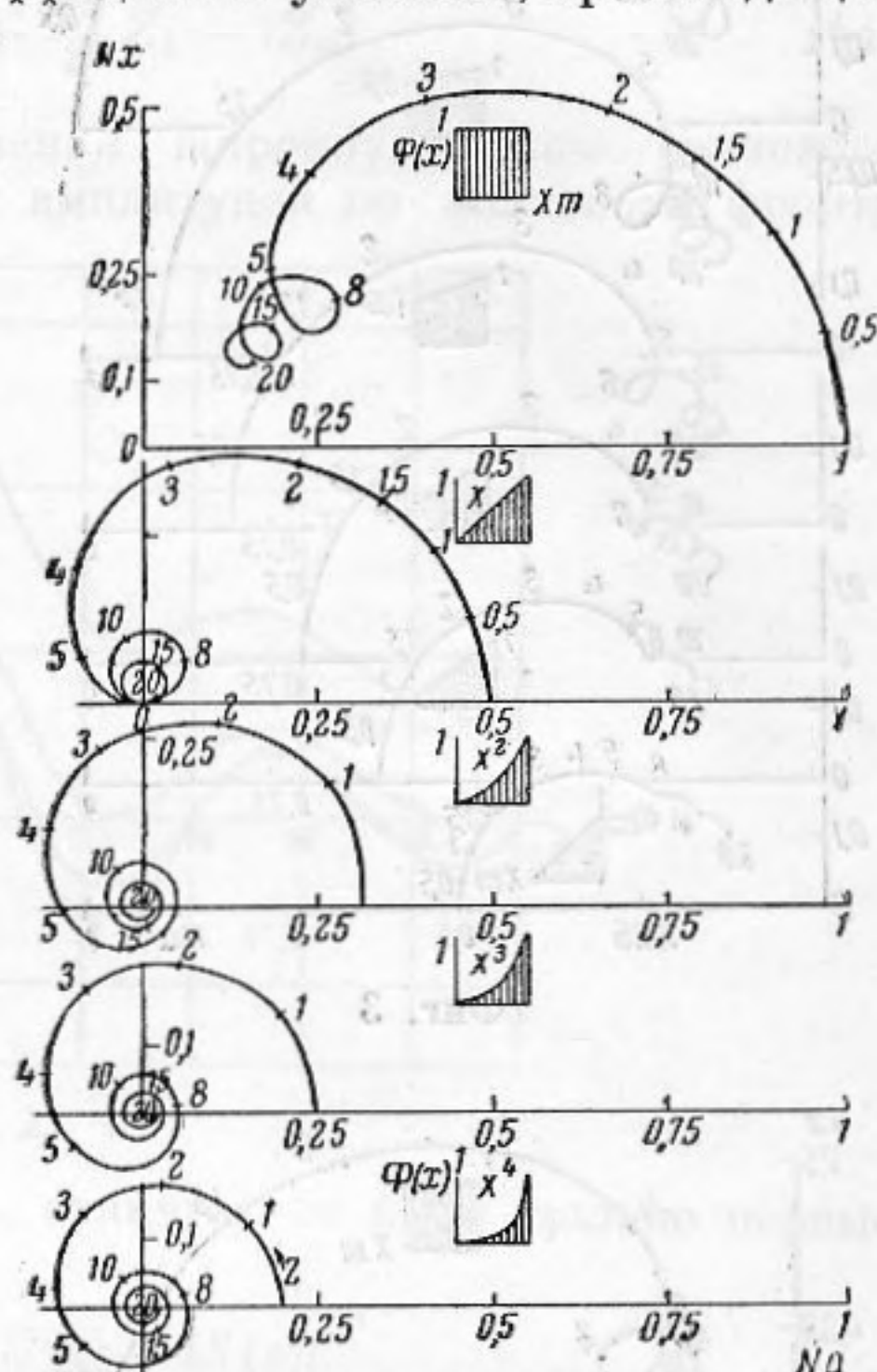
Фиг. 6

графиков для одинаковых значений $\Phi(x)$ на краях и в центре пучка, но при разных видах функций $\Phi(x)$ (фиг. 7, 8).

Верхний график каждого из рисунков относится к равномерному распределению амплитуды звукового давления по волновому фронту и поэтому характеризует изменение коэффициента усиления, происходящее



Фиг. 7



Фиг. 8

только из-за волновой абберации. При отсутствии волновой абберации ($z = 0$), коэффициенты усиления соответственно равны

$$K_p = ikFe^{-ikF}(1 - \cos \alpha), \quad K_v = ikFe^{-ikF} \sin^2 \alpha / 2.$$

При неравномерном распределении амплитуды по волновому фронту и $z = 0$ коэффициент $N_a < 1$. В этом случае (3) $N_a = 1/x \int_0^x \Phi(x) dx$, т.е. представляет собой среднюю ординату прямоугольника, равновеликого по своей площади заштрихованной площади эпюры распределения амплитуды по волновому фронту. Другими словами, коэффициент усиления пропорционален площади этой эпюры.

Можно отметить некоторые общие закономерности, позволяющие ориентироваться при оценке коэффициента усиления отдельных звукофокусирующих систем, характеризуемых $z \neq 0$. Вначале при увеличении z величина $N_x = 0$ (при $z = 0$) растет, N_a — уменьшается. Радиус-вектор кривой \bar{N} , пропорциональный модулю коэффициента усиления, при этом хотя и медленно, но уменьшается. Дальнейшие изменения этих величин при росте z приобретают сложный характер.

Для оценки фокусирующей способности акустических систем представляет наибольший интерес зависимость модуля коэффициента N от волновой абберации. С увеличением z величина $|N|$ приобретает экстремальные значения: максимальные при $z = (2n - 1)\pi$ и минимальные при $z = 2n\pi$. Вид функции $|N| = |N|(z)$ существенно зависит от формы распределения амплитуды по волновому фронту. В частности, при уменьшении

амплитуды от центра к краям волнового пучка максимумы и минимумы коэффициента усиления сильно сглаживаются. Это явление сходно с устранением вторичных лепестков характеристики направленности в линейных излучающих системах с убывающей к краям линий интенсивностью излучения.

Физически это явление объясняется тем, что минимумы появляются вследствие противофазности участков волнового фронта, фазы которых составляют $\pi(2n \div 2n - 1)$ и участков, фазы которых равны $\pi(2n - 1 \div \div 2n)$. Очевидно, что если интенсивность вычитающихся частей волнового фронта уменьшить, то результирующий минимум будет менее резким. По этой же причине будут ослаблены и вторичные максимумы, и $|N|(z)$ приобретает более монотонный характер. Чем круче изменяется интенсивность по волновому фронту, тем более монотонной становится зависимость $|N|(z)$. В тех случаях, когда интенсивность уменьшается от края к центру волнового пучка, экстремальный ход зависимости $|N|(z)$ сохраняется при больших z (фиг. 4 и 6). Однако при очень крутом изменении интенсивности по фронту (фиг. 8) максимумы и минимумы все же выравниваются и $|N|(z)$ приобретает монотонный характер. Можно отметить, что при увеличении z до значений, превышающих π , т. е. при отклонении фронта от сферической поверхности больше, чем на $\lambda/2$, начинает происходить очень быстрое уменьшение коэффициента усиления. Это уменьшение в свою очередь зависит от характера распределения амплитуды по волновому фронту.

Графики фиг. 3—8 могут быть использованы для приближенной оценки коэффициента усиления любой из акустических фокусирующих систем. Для этого следует вычислить эпюру распределения амплитуды по волновому фронту этой системы, принимая $x = 1 - \cos\alpha$ или $x = \sin^2\alpha/2$ в зависимости от того, какой из коэффициентов $K_{p,v}$ определяется, и сопоставить ее с эпюрами, представленными на фиг. 3—8. Затем, найдя геометрическим расчетом величину z данной системы, определить \bar{N} , $|N|$ либо непосредственно при совпадении эпюры амплитуд данной звуковой системы с одной из эпюр, представленных на фиг. 3—8, либо путем приближенного интерполирования.

Описанная выше методика определения коэффициента усиления сферических сходящихся волновых звуковых пучков была применена для расчета некоторых твердых звуковых фокусирующих линз. Было получено вполне удовлетворительное совпадение с экспериментальными результатами [4]. Увеличение «прозрачности» линз путем покрытия их переходными слоями [5] также хорошо совпало с расчетом, учитывающим особенности перехода звука через границы твердых и жидких сред [6].

Описанный метод расчета позволяет определить необходимую степень точности изготовления звуковых фокусирующих систем, обеспечивающую достижение предельного коэффициента усиления (определяемого эпюрой распределения амплитуды по волновому фронту). Таким образом, известный рэлеевский критерий качества поверхности параксиальной линзы с постоянной амплитудой по фронту может быть дополнен соответствующими критериями качества для фокусирующих систем с различным распределением амплитуды по фронту.

Полученные результаты позволяют избежать громоздких вычислений при определении коэффициентов усиления различных систем: становится возможным, используя приведенные выше формулы и графики, ограничиться только геометрическим расчетом волновой аберрации и распределения амплитуды по фронту. Существенное упрощение вычислений позволяет, в свою очередь, рассмотреть и сравнить между собой различные варианты фокусирующих систем и выбрать из них наиболее оптимальный. Возможно осуществить также и обратный расчет: задаваясь коэффициентом усиления, определить необходимые геометрические параметры фокусирующей системы. Например, возможно определить, какой выигрыш

получится от замены сферических поверхностей звуковой фокусирующей линзы на эллиптические, устраняющие сферическую абберацию [1].

Автор выражает благодарность Л. Д. Розенбергу за постоянное внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Д. Розенберг. Звуковые фокусирующие системы. М.—Л., Изд-во АН СССР, 1949.
2. Л. Д. Розенберг. Об условиях получения наибольшей концентрации ультразвука. Докл. АН СССР, 1954, 94, 5, 845—848; О концентраторах ультразвука. Тр. Комиссии по акустике АН СССР, 1955, 8, 102—113.
3. Б. Д. Тартаковский. О дифракции звуковых волн в сходящихся пучках. Акуст. ж., 1958, 4, 4, 355—360.
4. Б. Д. Тартаковский. Экспериментальное исследование дифракции в фокусе звуковых линз. Докл. АН СССР, 1951, 78, 6, 1119—1122.
5. Г. И. Каминир, Б. Д. Тартаковский. Экспериментальное исследование ультразвуковых переходных слоев. Акуст. ж., 1956, 2, 2, 254—260.
6. Б. Д. Тартаковский. О переходе звуковых волн через границы твердых и жидких сред. Ж. техн. физ., 1951, 21, 10, 1194—1201.

Акустический институт АН СССР
Москва

Поступила в редакцию
18 февраля 1959 г.