АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том V 1959 Вып. 4

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЗВУКОВЫХ И ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

М. Д. Хаскинд

Рассматривается распространение звуковых и электромагнитных волн в полупространстве, на границе которого задан импеданц в виде произвольного комплексного числа. Решение основывается на введении функциональной комбинации, обращающейся в нуль на границе полупространства. Находятся выражения для потенциала звуковых и электромагнитных волн через эту функциональную комбинацию в различных случаях с учетом асимптотики, зависящей от конкретных значений импеданца.

Рассмотрим однородное полупространство $z \leqslant 0$. Потенциал $\varphi(x, y, z) \times \exp i\sigma t$ $(i = \sqrt{-1})$ звуковых или электромагнитных волн удовлетворяет волновому уравнению:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} + k^2\varphi = 0 \quad \left(k = \frac{\sigma}{c}\right) \tag{1}$$

и граничным условиям

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = V_n \text{ на } S, \tag{2}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} - \nu\varphi = 0 \text{ при } z = 0 \quad (\nu = \nu + i\nu_i), \tag{3}$$

где c — скорость распространения волн, V_n — заданная функция в точках поверхности S, излучающей и рассеивающей волны, и ν — произвольно заданный комплексный параметр, через который определяется взаимодействие с граничащей средой.

Разъясним смысл условия (3) в акустическом и в электромагнитном случаях в отдельности. В акустическом случае давление p связано с потенциалом скоростей $\varphi \exp i\sigma t$ звуковых волн соотношением $p = -\rho i\sigma\varphi \exp i\sigma t$, где ρ — плотность жидкости и условие (3) означает, что на границе жидкости $z = 0$ задан нормальный импеданц $z_0 = p / v_z (v_z = (\partial\varphi / \partial z) \exp i\sigma t)$. Следовательно, $\nu = -\rho i\sigma / z_0$.

В электромагнитном случае электрическая и магнитная напряженности $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ электромагнитного поля в вакууме связаны с электрическим и магнитным векторами Герца $\mathbf{\Pi}_e$ и $\mathbf{\Pi}_m$ соотношениями

$$\mathbf{E} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{\Pi}_e + k^2\mathbf{\Pi}_e, \quad \mathbf{H} = ik\operatorname{rot}\mathbf{\Pi}_e,$$

$$\mathbf{E} = -ik\operatorname{rot}\mathbf{\Pi}_m, \quad \mathbf{H} = +\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{\Pi}_m + k^2\mathbf{\Pi}_m.$$

Электромагнитные свойства граничащей среды определяются через комплексные диэлектрическую и магнитную проницаемости $\varepsilon(\sigma)$ и $\mu(\sigma)$:

$$\mathbf{D}(\sigma) = \varepsilon(\sigma)E(\sigma), \quad \mathbf{B}(\sigma) = \mu(\sigma)\mathbf{H}(\sigma), \quad \varepsilon = |\varepsilon| e^{-i\delta}, \quad \mu = |\mu| e^{-i\Delta},$$

где $\mathbf{D}$ и $\mathbf{B}$ — векторы электрической и магнитной ин укции, и зависимости $\varepsilon(\sigma)$ и $\mu(\sigma)$ характеризуют электрические и магнитные потери, диэлектрический и магнитный гистерезисы, дисперсию и тому подобное, причем на основании энергетических соображений углы электрических и магнитных потерь δ и Δ заключены в интервале $(0, \pi)$.

Если коэффициент преломления $n = \sqrt{\varepsilon\mu} = \sqrt{|\varepsilon\mu|}\exp\left(-i\,\frac{\delta+\Delta}{2}\right)$ по модулю значительно больше единицы, то электромагнитное поле не проникает в граничащую среду и благодаря скинэффекту концентрируется в тонком пограничном слое. В этом случае при $z = 0$ имеют место приближенные граничные условия Леонтовича [1—3]

$$E_x = z_0 H_y,\ E_y = -z_0 H_x,\ z_0 = \sqrt{\mu/\varepsilon} = \sqrt{|\mu/\varepsilon|}\, e^{-i\frac{\Delta-\delta}{2}},$$

где z_0 — импеданц граничащей среды. При излучении электромагнитных волн электрическим и магнитным диполями с осью, направленной по z, можно положить $\Pi_e(0, 0, \varphi_e)$ и $\Pi_m(0, 0, \varphi_m)$, и граничные условия М. А. Леонтовича приводят к соотношениям:

$$\frac{\partial\varphi_e}{\partial z} - \nu_e\varphi_e = 0,\ \frac{\partial\varphi_m}{\partial z} - \nu_m\varphi_m = 0,\ \nu_e = -ik\,|z_0|\,e^{-i\frac{\Delta-\delta}{2}},$$

$$\nu_m = -\frac{ik}{|z_0|}\, e^{i\frac{\Delta-\delta}{2}},$$

из которых видно, что $\mathrm{Im}\,\nu < 0$, а $\mathrm{Re}\,\nu \gtreqless 0$. В частности, для проводящей среды с $\mu = 1$ и $\varepsilon = \varepsilon_0 - i4\pi\eta/\sigma$, где $\varepsilon_0 = \mathrm{const}$ — диэлектрическая постоянная и η — удельная электропроводность, имеем, что $\mathrm{Re}\,\nu_e > 0$, а $\mathrm{Re}\,\nu_m < 0$.

Вернемся к поставленной задаче. Для построения общего решения введем в рассмотрение другую функцию $f(x, y, z)$, удовлетворяющую уравнению

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + k^2 f = 0 \tag{4}$$

и связанную с функцией $\varphi(x, y, z)$ соотношением

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} - \nu\varphi = \frac{\partial f}{\partial z}. \tag{5}$$

В работе [4] дано простое определение потенциала отраженных волн по заданным падающим волнам, основанное на изучении свойств функции $w = \partial\varphi/\partial z - \nu\varphi$ (см. также [3]). Здесь мы дадим общий метод определения функции φ по заданной функции f, отличающийся от изложенного в [4] и позволяющий определить не только функции излучения сосредоточенных особенностей (цилиндрический и сферический источники и тому подобное), но также построить и точные решения ряда задач об излучении и дифракции волн на поверхности S, расположенной в полупространстве под импеданцной плоскостью *. В частном виде излагаемый метод применялся в теории поверхностных волн в тяжелой несжимаемой жидкости [5, 6].

При помощи функции f условие (3) можно представить в форме:

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 0 \quad \text{при } z = 0. \tag{6}$$

Условие (6) позволяет продолжить функцию f в верхнее полупространство четным образом. В результате мы получаем функцию, регулярную и однозначную во всем пространстве, вне поверхности $S + S^*$, где S^* — зеркальное отражение поверхности S в верхнем полупространстве, причем в силу уравнения (4) и условия (6) функция f обращается в нуль в беско-

* К этим задачам мы рассчитываем вернуться в другой статье.

нечно удаленной точке и при отсутствии поглощения (k — действительное число) удовлетворяет принципу излучения.

Покажем, что если функция f найдена, то из соотношения (5) можно единственным путем определить функцию φ, удовлетворяющую уравнению (1), условию (3), и являющуюся ограниченной во всем нижнем полупространстве вне поверхности S. С этой целью продифференцируем соотношения (5):

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - \nu \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}\,.$$

Используя соотношение (5) и уравнения (1) и (4), получаем

$$\frac{\partial^2 (\varphi - f)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (\varphi - f)}{\partial y^2} + \mu^2 (\varphi - f) = -\nu \left(\frac{\partial f}{\partial z} + \nu f \right) \quad (\mu^2 = k^2 + \nu^2). \qquad (7)$$

Параметр μ, входящий в уравнение (7), определяется выражениями:

$$\mu = \mu_r + i\mu_i \text{ при } \nu_i \nu_r > 0,\ \mu = \mu_r - i\mu_i \quad \text{при } \nu_i \nu_r < 0,\ \mu_r = \sqrt{|\mu^2|} \cos \alpha / 2,$$
$$\mu_i = \sqrt{|\mu^2|} \sin \alpha / 2,\ e^{i\alpha} = 1 / |\mu^2| (k^2 + \nu_r^2 - \nu_c^2 + i2 |\nu_i \nu_r|) \quad (0 \leqslant \alpha \leqslant \pi),$$

причем $\mu_i = 0$, если $\nu_i = 0$ и $\nu_r \neq 0$ ($\mu = \sqrt{k^2 + \nu_r^2}$) или же $\nu_r = 0$, $\nu_i \neq 0$ и $k^2 > \nu_i^2$, ($\mu = \sqrt{k^2 - \nu_i^2}$), а $\mu_r = 0$ при $\nu_r = 0$ и $k^2 < \nu_i^2$ ($\mu = i\sqrt{\nu_i^2 - k^2}$). Кроме того, $\mu = 0$, если $\nu_r = 0$ и $k^2 = \nu_i^2$.

Дальнейший анализ решения уравнения (7) проведем отдельно в двумерном и трехмерном случаях. В двумерном случае S представляет собой цилиндрическую поверхность с образующей, параллельной оси x. Поперечные контуры цилиндрических поверхностей S и S^* обозначим через L и L^*. Следовательно, в двумерном случае φ и f зависят только от y и z и поэтому, рассматривая (7) как обыкновенное дифференциальное уравнение, получаем единственно возможные формы ограниченных решений:

$$\varphi = f - \frac{\nu}{2\mu i} \left[e^{i\mu y} \int\limits_{-\infty}^{y} e^{-i\mu y} \left(\frac{\partial f}{\partial z} + \nu f \right) dy - \right.$$
$$\left. - e^{-i\mu y} \int\limits_{\infty}^{y} e^{i\mu y} \left(\frac{\partial f}{\partial z} + \nu f \right) dy \right] \qquad (9)$$

при $\operatorname{Im} \mu > 0$,

$$\varphi = f - \frac{\nu}{2\mu i} \left[e^{i\mu y} \int\limits_{\infty}^{y} e^{-i\mu y} \left(\frac{\partial f}{\partial z} + \nu f \right) dy - \right.$$
$$\left. - e^{-i\mu y} \int\limits_{-\infty}^{y} e^{i\mu y} \left(\frac{\partial f}{\partial z} + \nu f \right) dy \right] \qquad (10)$$

при $\operatorname{Im} \mu \leqslant 0$.

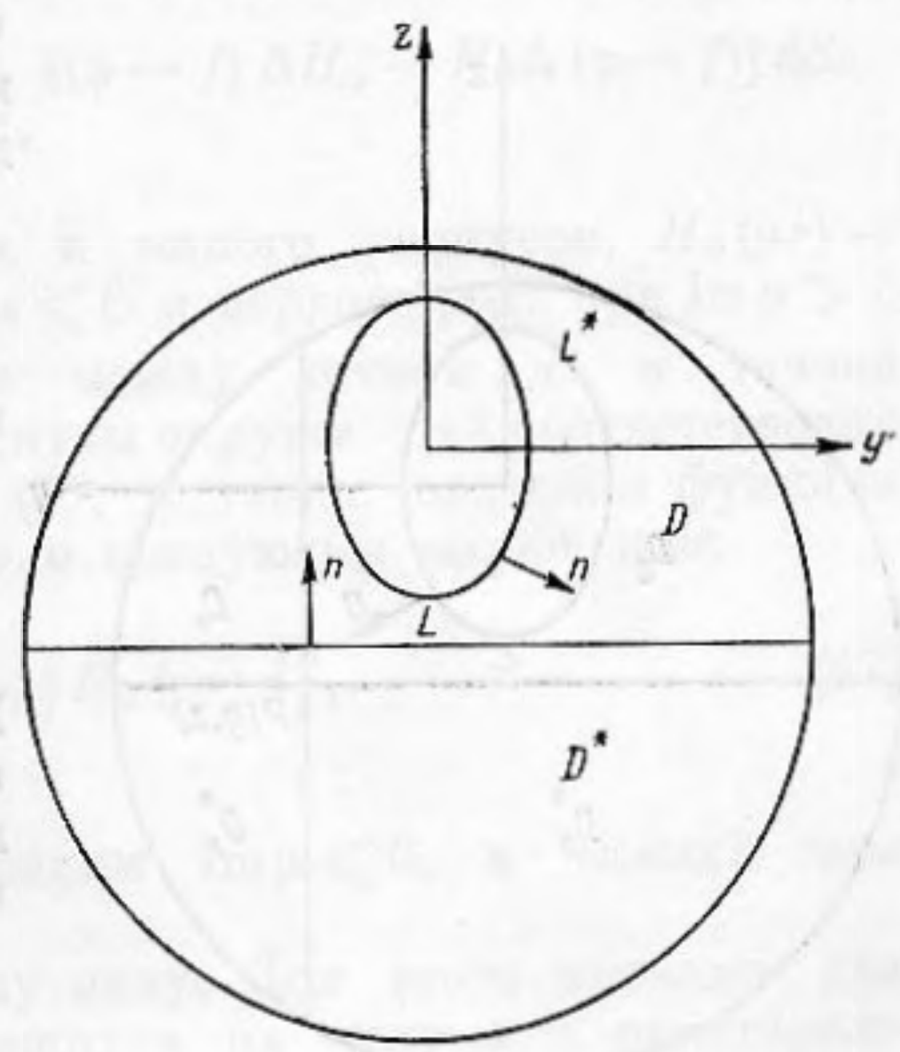
Здесь интегрирование проводится вдоль полупрямых, расположенных в нижней полуплоскости yz и параллельных оси y. Выражения (9) и (10) удовлетворяют уравнению (1), если функция f удовлетворяет уравнению (4). В этом можно убедиться путем непосредственного дифференцирования с использованием (4) и (7). Далее отметим, что выражение (10) остается справедливым при $\operatorname{Im} \mu = 0$, так как при учете поглощения жидкости ($\operatorname{Im} k < 0$) мнимая часть μ становится отрицательной и поэтому в пределе при $\operatorname{Im} k = 0$, когда $\operatorname{Im} \mu = 0$, функция φ определяется формулой (10). Вместо учета поглощения жидкости можно также принять во внимание, что на границе $z = 0$ образующиеся при $\operatorname{Im} \mu = 0$ волны должны распространяться по обе стороны от контура L. Последнее приводит к эквивалентному результату.

Рассмотрим более подробно случай $\operatorname{Im}\mu = 0$ и проведем анализ асимптотики решения (10) при $y \to \pm\infty$. Удерживая в этом решении только те слагаемые, которые могут при $z=0$ привести к конечным значениям для амплитуд, будем иметь

$$\varphi = \frac{\nu}{2\mu i} C_\pm e^{\nu \mp i\mu y}, \quad C_\pm = e^{-\nu z} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\pm i\mu y} \left(\frac{\partial f}{\partial z} + \nu f \right) dy$$

при $y \to \pm\infty$. (11)

Очевидно, уравнение (1) при условии (3) допускает свободные решения вида $\exp(\nu z \mp i\mu y)$, но так как мы потребовали ограниченности функции φ во всей нижней полуплоскости вне контура L, то при $\operatorname{Im}\mu = 0$ величины $C_\pm$ в (11) должны автоматически обратиться в нуль для тех случаев, когда такого вида решения становятся неограниченными, что, например, будет показано в дальнейшем при $\nu_r < 0$. Во всех подобных случаях равенство $C_\pm = 0$ означает, что асимптотика функции φ характеризует волны с убывающей всюду амплитудой, в том числе и на границе $z = 0$.



Фиг. 1

Для вычисления $C_\pm$ при $\operatorname{Im}\mu = 0$ рассмотрим две области D и D^*. Область D ограничена контуром $L + L^*$, прямой, параллельной оси y и расположенной ниже этого контура, и верхней полуокружностью большого радиуса R, опирающейся на эту прямую, а область D^* представляет собой нижний полукруг (фиг. 1).

Введем вспомогательную функцию $g_1(\pm\mu) = \exp(-\nu z \pm i\mu y)$, удовлетворяющую вместе с f уравнению (4) и пусть $\nu_i = 0$, т. е. $\mu_i = 0$ и $\mu = \sqrt{k^2 + \nu_r^2}$, тогда применяя формулу Грина к функциям f и g_1 в областях D и D^*, получим

$$\int_C \left(f \frac{\partial g_1}{\partial n} - g_1 \frac{\partial f}{\partial n} \right) dl = 0 \qquad \text{при } \nu_r > 0$$

$$\int_{C^*} \left(f \frac{\partial g_1}{\partial n} - g_1 \frac{\partial f}{\partial n} \right) dl = 0 \qquad \text{при } \nu_r < 0,$$

где C и C^* — контуры, ограничивающие области D и D^*. Очевидно, интегралы по полуокружностям обращаются в нуль при $R \to \infty$. Поэтому

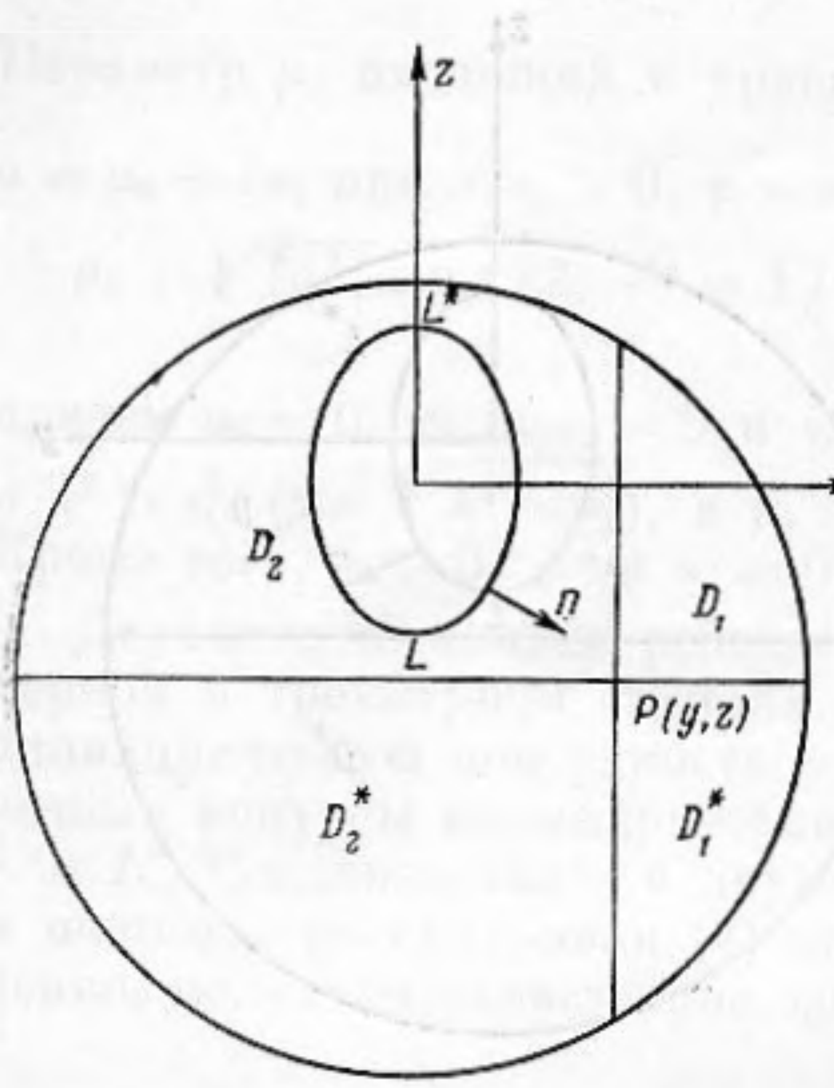
$$C_\pm = \int_{L+L^*} \left(f \frac{\partial g_1(\pm\mu)}{\partial n} - g_1(\pm\mu) \frac{\partial f}{\partial n} \right) dl \text{ при } \nu_r > 0, \; C_\pm = 0 \text{ при } \nu_r < 0. \quad (12)$$

Таким образом, при $\nu_i = 0$ и $\nu = \nu_r > 0$ соотношения (11) определяют расходящиеся по обе стороны от контура L волны с экспоненциально убывающей амплитудой при $z \to -\infty$. Вдоль же границы $z = 0$ образующиеся поверхностные волны имеют неизменную амплитуду. Для звуковых волн скорость колебания частиц жидкости в этих волнах имеет две составляющие, вследствие чего частицы жидкости совершают орбитальное движение по круговым траекториям. Волны этого типа имеют место при излучении и дифракции гравитационных волн в тяжелой несжимаемой жидкости [5, 6], а также при колебаниях упругой среды, граничащей с жидкостью или газом [7].

Пусть теперь $\nu_r = 0$ и $k^2 > \nu_i^2$, т. е. $\mu_i = 0$ и $\mu = \sqrt{k^2 - \nu_i^2}$. Для вычисления величин $C_\pm$ в рассматриваемом случае примем во внимание, что функция f удовлетворяет принципу излучения и, следовательно, при больших R имеем асимптотическое равенство $f = (a(\theta)/\sqrt{R})\, e^{-ikR}$, где θ — полярный угол, отсчитываемый для нижней полуокружности по ходу стрелки часов, а для верхней полуокружности отсчет ведется против хода стрелки часов. Применение формулы Грина к функциям f и g_1 в области D^* приводит к соотношению

$$C_\pm = i\sqrt{R}\, e^{-i\nu_i z} \int_0^\pi (\omega(\pm\mu) + 2k)\, a(\theta)\, e^{i\omega(\pm\mu) R}\, d\theta,$$

$$(\omega(\pm\mu) = \nu_i \sin\theta \pm \mu\cos\theta - k).$$



Фиг. 2

Оценка этого соотношения при помощи метода установившихся фаз дает следующее:

$$C_+ = 2ie^{-i(\nu_i z + \pi/4)} \sqrt{2\pi k}\, a(\theta_0),$$
$$C_- = 2ie^{-i(\nu_i z - \pi/4)} \sqrt{2\pi k}\, a(\pi - \theta_0)$$

при $\nu_i > 0$,

$$C_\pm = 0 \text{ при } \nu_i < 0$$
$$(\sin\theta_0 = \nu_i/k).$$

Применение же формулы Грина к функциям f и g_1 в области D и последующая оценка при помощи метода установившихся фаз показывают, что

$$C_\pm = \int_{L+L^*} \left(f\frac{\partial g_1(\pm\mu)}{\partial n} - g_1(\pm\mu)\frac{\partial f}{\partial n} \right) dl$$

при $\nu_i > 0$. (13)

Из выражений (11) и (13) вытекает, что при $\nu_r = 0$, $k^2 > \nu_i^2$ и $\nu_i > 0$ вдали от контура L образуются две системы плоских волн с постоянной амплитудой, распространяющихся по обе стороны от контура L и волновой вектор этих волн составляет с вертикалью, направленной вдоль $z < 0$, угол $\vartheta = \arccos(\nu_i/k)$. При $\nu_i < 0$, $\nu_r = 0$ и $k^2 > \nu_i^2$ подобных волн с неизменной амплитудой не образуется.

Формулы (9) и (10) можно преобразовать к более простому виду. Для этого следует применить формулу Грина к функциям f и g_1 в областях D_1 и D_2 или же D_1^* и D_2^* (фиг. 2). В результате этого мы получаем

$$\varphi = f + \nu e^{\nu z} \int_{-\infty}^{z} f e^{-\nu z}\, dz \tag{14}$$

при $\nu_r < 0$,

$$\varphi = f + \nu e^{\nu z} \int_{\infty}^{z} f e^{-\nu z}\, dz + \frac{\nu}{2i\mu} e^{\nu z \mp i\mu y} C_\pm \tag{15}$$

при $\operatorname{Im}\mu \leqslant 0$ и $\nu_r \geqslant 0$,

$$\varphi = f + \nu e^{\nu z} \int_{\infty}^{z} f e^{-\nu z}\, dz - \frac{\nu}{2i\mu} e^{\nu z \pm i\mu y} C_\pm \tag{16}$$

при $\operatorname{Im}\mu > 0$ и $\nu_r \geqslant 0$, где верхний знак соответствует точкам $P(y, z)$, находящимся правее контура L, а нижний знак берется для точек левее контура L. При $\nu_r = 0$, $k^2 > \nu_i^2$ и $\nu_i < 0$ в формуле (15) следует положить $C_{\pm} = 0$. Далее, из (15) и (16) видно, что при комплексных значениях параметра μ в состав волнового движения входят волны с экспоненциально убывающей амплитудой при увеличении $|y|$, наличие которых обусловлено частичным расходом излучаемой энергии на возбуждение граничащей среды.

Перейдем теперь к трехмерной задаче. Рассмотрим для этого круг S_z, бесконечно большого радиуса с центром в точке $P(x, y, z)$, расположенный параллельно границе, и вырежем в области S_z круг ε, бесконечно малого радиуса с центром в той же точке P. Тогда, применяя формулу Грина в области $S_z - \varepsilon$ к функциям $\varphi - f$ и $H_0(\mu r)$, будем иметь

$$\int\limits_{C_1+C_2}\left[(\varphi - f)\frac{\partial H_0}{\partial n} - H_0\frac{\partial(\varphi - f)}{\partial n}\right]dl = \iint\limits_{S_z-\varepsilon}[(\varphi - f)\,\Delta H_0 - H_0\Delta(\varphi - f)]\,dS.$$

Здесь C_1 и C_2 — окружности большого и малого радиусов, $H_0(\mu r)$ — функция Ганкеля второго рода при $\operatorname{Im}\mu \leqslant 0$ и первого рода при $\operatorname{Im}\mu > 0$ и $r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}$ — расстояние между точкой P и точкой $P_1(\xi, \eta, z)$ области $S_z - \varepsilon$. Устремляя радиусы окружностей соответственно к бесконечности и к нулю и учитывая (7), а также значения функции $H_0(\mu r)$ при малых и больших r, получаем следующее выражение:

$$\varphi = f \pm \frac{\nu}{4_i}\iint\limits_{S_z}\left(\frac{\partial f}{\partial z} + \nu f\right)H_0(\mu r)\,dS, \tag{17}$$

где верхний знак соответствует значениям $\operatorname{Im}\mu \leqslant 0$, а нижний при $\operatorname{Im}\mu > 0$.

Формулу (17) преобразуем к другому виду. Для этого проведем два вертикальных цилиндра Σ и Σ^*, опирающихся на круг ε и простирающихся соответственно неограниченно вверх и вниз. Далее, применим формулу Грина к функциям f и $g_2 = e^{-\nu z} H_0(\mu r)$, удовлетворяющим уравнению (4). В результате получим

$$\iint\limits_{S_z-\varepsilon+S+S^*+\Sigma}\left(\frac{\partial f}{\partial n}g_2 - f\frac{\partial g_2}{\partial n}\right)dS = 0$$

при $\nu_r \geqslant 0$,

$$\iint\limits_{S_z-\varepsilon+\Sigma^*}\left(\frac{\partial f}{\partial n}g_2 - f\frac{\partial g_2}{\partial n}\right)dS = 0$$

при $\nu_r < 0$.

Стягивая в этих выражениях вертикальные цилиндры к их оси и принимая во внимание (17), приходим к формулам, подобным (14) — (16):

$$\varphi = f + \nu e^{\nu z}\int\limits_{-\infty}^{z} f e^{-\nu z}\,dz \tag{18}$$

при $\nu_r < 0$,

$$\varphi = f + \nu e^{\nu z}\int\limits_{\infty}^{z} f e^{-\nu z}\,dz + \frac{i\nu}{4}e^{\nu z}\iint\limits_{S+S^*}\left(\frac{\partial f}{\partial n}g_2 - f\frac{\partial g_2}{\partial n}\right)dS \tag{19}$$

при $\operatorname{Im}\mu \leqslant 0$, $\nu_r \geqslant 0$,

$$\varphi = f + \nu e^{\nu z}\int\limits_{\infty}^{z} f e^{-\nu z}\,dz - \frac{i\nu}{4}e^{\nu z}\iint\limits_{S+S^*}\left(\frac{\partial f}{\partial n}g_2 - f\frac{\partial g_2}{\partial n}\right)dS \tag{20}$$

при $\operatorname{Im}\mu > 0$, $\nu_r \geqslant 0$.

Так же, как и в двумерном случае, формула (19) остается справедливой и при $\nu_r = 0$ $(k^2 > \nu_i^2)$, если $\nu_i > 0$, а если $\nu_i < 0$, $\nu_r = 0$ и $k^2 > \nu_i^2$, то третий член в (19) отсутствует. При $\nu_r = 0$ и $k^2 = \nu_i^2$ $(\mu = 0)$ формулы (19) и (20) показывают, что функция φ имеет логарифмическую особенность. В двумерном случае, при этих же значениях параметров, слагаемые в (15) и (16), содержащие $C_\pm$, обращаются в бесконечность.

Рассмотрим некоторые применения полученных общих решений. Прежде всего покажем, что из этих общих решений вытекают весьма простые выражения для функций излучения сосредоточенных особенностей. В самом деле, пусть в точке $P_0(\eta_0, \zeta_0)$ имеем источник излучения цилиндрических волн. В этом случае функцию источника G можем представить в форме

$$G = H_0^{(2)}(kr_1) - H_0^{(2)}(kr_2) + \psi, \tag{21}$$

$$\left(r_1 = \sqrt{(y-\eta_0)^2 + (z-\zeta_0)^2},\quad r_2 = \sqrt{(y-\eta_0)^2 + (z+\zeta_0)^2}\right).$$

Функция $\psi(y, z)$ является регулярной во всей нижней полуплоскости, удовлетворяет уравнению (1) и на основании (3) — условию

$$\frac{\partial\psi}{\partial z} - \nu\psi = 2\frac{\partial}{\partial z}\left[H_0^{(2)}(kr_2)\right] \text{ при } z = 0.$$

Покажем, что это равенство выполняется во всей плоскости yz. Действительно, функция $F = \frac{\partial\psi}{\partial z} - \nu\psi - 2\frac{\partial}{\partial z}\left[H_0^{(2)}(kr_2)\right]$ регулярна во всей нижней полуплоскости, удовлетворяет уравнению (1) и при $z = 0$ обращается в нуль. Продолжая эту функцию в верхнюю полуплоскость, получаем функцию, регулярную во всей плоскости и удовлетворяющую принципу излучения. Поэтому $F = 0$ во всей плоскости yz. В этом можно также убедиться, если учесть поглощение $(\operatorname{Im} k < 0)$ и применить для всей нижней полуплоскости одну из формул Грина к функции $\nabla F \cdot \nabla F^*$, где F^* — комплексно сопряженная функция.

Итак, в данном случае $f = 2H_0^{(2)}(kr_2)$. Подставляя это выражение в (12) и стягивая контур $L + L^*$ к особой точке $P_0^*(\eta_0 - \zeta_0)$, найдем, что $C_\pm = 8i\exp(\nu\zeta_0 \pm i\mu\eta_0)$. Формулы (21) и (14) — (16) при найденных значениях f и $C_\pm$ определяют в простой форме функцию источника G. В частности, для случая формулы (15) имеем

$$G = H_0^{(2)}(kr_1) + H_0^{(2)}(kr_2) + 2\nu e^{\nu z}\int\limits_{\infty}^{z} e^{-\nu z}H_0^{(2)}(kr_2)\,dz + \frac{4\nu}{\mu}e^{\nu(z+\zeta_0)\mp i\mu(y-\eta_0)}. \tag{22}$$

Подобным путем определяется функция источника G для сферических волн, которую можно представить в форме

$$G = \frac{e^{-ikr_1}}{r_1} - \frac{e^{-ikr_2}}{r_2} + \psi(x, y, z),$$

$$r_1 = \sqrt{(x-\xi_0)^2 + (y-\eta_0)^2 + (z-\zeta_0)^2},$$

$$r_2 = \sqrt{(x-\xi_0)^2 + (y-\eta_0)^2 + (z+\zeta_0)^2},$$

где функция $\psi(x, y, z)$ удовлетворяет соотношению

$$\frac{\partial\psi}{\partial z} - \nu\psi = 2\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{e^{-ikr_2}}{r_2}\right].$$

В рассматриваемом случае функция $f = 2r_2^{-1} \exp(-ikr_2)$ и поэтому для случая формулы (19) находим

$$G = \frac{e^{-ikr_1}}{r_1} + \frac{e^{-ikr_2}}{r_2} + 2\nu e^{\nu z} \int\limits_{\infty}^{z} \frac{e^{-(\nu z + ikr_2)}}{r_2} dz - 2\pi i \nu e^{\nu(z+\zeta_0)} H_0^{(2)}(\mu r_0), \tag{23}$$

$$r_0 = \sqrt{(x-\xi_0)^2 + (y-\eta_0)^2}.$$

Отметим, в частности, что при помощи функции источника G функции φ_m излучения и рассеяния звуковых волн [8, 9] могут быть представлены обобщенной формулой Грина:

$$\varphi_m(x, y, z) = -\frac{1}{4\pi} \iint\limits_S \left(G \frac{\partial \varphi_m}{\partial n} - \varphi_m \frac{\partial G}{\partial n} \right) dS \quad (m = 1, 2, \ldots, 7), \tag{24}$$

где функции излучения $\varphi_m (m = 1, 2, \ldots, 6)$ характеризуют простейшие формы излучения звуковых волн в жидкости при колебаниях твердого тела с единичными амплитудами скоростей, а функцией рассеяния φ_7 определяется решение дифракционной задачи. Справедливость формулы (24) доказывается обычным путем при помощи применения формулы Грина к функциям φ_m и G.

Если дифрагирующие волны излучаются из точки $P_1(x_1, y_1, z_1)$ сферическим источником интенсивности $Q_0 \exp i\sigma t$, то функция φ_0 падающих на S звуковых волн определяется выражением:

$$\varphi_0 = -\frac{Q}{4\pi} G(x, y, z, x_1, y_1, z_1). \tag{25}$$

В этом случае формула (28) работы [9] и соотношения (24) и (25) определяют в простой форме проекции возмущающей силы $\mathbf{F}(Y_1, Y_2, Y_3)$ и возмущающего момента $\mathbf{M}(Y_4, Y_5, Y_6)$, действующих на поверхность S

$$Y_m = \rho i \sigma \varphi_m(x_1, y_1, z_1) Q_0 e^{i\sigma t} \quad (m = 1, 2, \ldots, 6). \tag{26}$$

Для двумерной задачи имеет место формула, аналогичная (24):

$$\varphi_m(y, z) = \frac{i}{4\pi} \int\limits_L \left(G \frac{\partial \varphi_m}{\partial n} - \varphi_m \frac{\partial G}{\partial n} \right) dl \quad (m = 2, 3, 4, 7) \tag{27}$$

и при дифракции цилиндрических волн формулы (26) сохраняют свой вид.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. А. Леонтович. Об одном методе решения задач о распространении электромагнитных волн вдоль поверхности земли. Изв. АН СССР, сер. физ., 1944, 8, 16—22.
2. М. А. Леонтович, В. А. Фок. Решение задачи о распространении электромагнитных волн вдоль поверхности земли по методу параболического уравнения. Ж. экспер. и теор. физики, 1946, **16**, 7, 557—573.
3. Я. Л. Альперт, В. Л. Гинзбург, Е. Л. Фейнберг. Распространение радиоволн. М., ГТТИ, 1953.
4. Г. Д. Малюжинец. Об одном обобщении формулы Вейля для волнового поля над поглощающей плоскостью. Докл. АН СССР, 1948, **60**, 3 (новая серия), 367—370.
5. М. Д. Хаскинд. Дифракция волн вокруг движущегося цилиндрического судна. Прикл. мат. и мех., 1953, **17**, 4, 431—442.
6. М. Д. Хаскинд. О волновых движениях тяжелой жидкости. Прикл. мат. и мех., 1954, **18**, 1, 15—26.
7. Л. М. Бреховских. Волны в слоистых средах. М.— Л., Изд-во АН СССР, 1957.
8. М. Д. Хаскинд. Акустическое излучение колеблющихся тел в сжимаемой жидкости. Ж. экспер. и теор. физики, 1946, **16**, 7, 634—646.
9. М. Д. Хаскинд. Дифракция и излучение акустических волн в жидкостях и газах. Часть 1. Акуст. ж., 1957, **3**, 4, 348—359.

Одесский технологический институт пищевой и холодильной промышленности

Поступила в редакцию 18 марта 1958 г.