АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том V 1959 Вып. 4

ВТОРОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ В МЕТОДЕ ПЛАВНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

Т. А. Широкова

Найдено второе приближение в методе плавных возмущений в предположении, что коэффициент корреляции пульсаций показателя преломления имеет гауссов вид. Определен вид нормирующего множителя в уравнении волны. Попутно рассмотрен вопрос о границах применимости метода Рытова.

Рассматривая методом плавных возмущений (метод Рытова) плоскую волну, распространяющуюся в среде с крупномасштабными случайными изменениями показателя преломления, вводят в уравнение волны нормирующий множитель $\exp(-\overline{b^2})$, зависящий от среднего квадрата флюктуаций уровня $\overline{b^2}$, чтобы согласовать уравнение волны с законом сохранения энергии [1]. Однако этим требованием нормирующий множитель определяется неоднозначно, с точностью до фазового множителя $\exp(i\psi)$, содержащего произвольную фазу ψ. С целью устранения этой неоднозначности в настоящей работе применен другой способ нахождения нормирующего множителя, основанный на рассмотрении второго приближения в методе плавных возмущений.

Допустим, что среда, содержащая случайные неоднородности, является статистически однородной. В этом случае среднее квадратичное значение α пульсаций показателя преломления не будет зависеть от координат и показатель преломления n удобно представить в виде

$$n = 1 + \alpha\mu(x, y, z), \tag{1}$$

где случайная функция μ удовлетворяет условиям $\overline{\mu} = 0$, $\overline{\mu^2} = 1$. Черта наверху означает статистическое усреднение. Рассматривая в дальнейшем среду слабо неоднородную, будем предполагать, что пульсации показателя преломления малы по сравнению с его средним значением, т. е. $\alpha \ll 1$.

Звуковое давление p удовлетворяет волновому уравнению

$$\nabla^2 p + k^2[1 + \alpha\mu(x, y, z)]^2 p = 0, \tag{2}$$

где k — волновое число в однородной среде. Сущность метода Рытова заключается в замене в волновом уравнении функции p на функцию ϕ по формуле

$$p = A_0 \exp[i\phi(\bar{r})], \tag{3}$$

где A_0 — амплитуда волны в однородной среде. Такая замена приводит к уравнению для функции ϕ следующего вида:

$$(\nabla\phi)^2 - i\nabla^2\phi = k^2(1 + 2\alpha\mu + \alpha^2\mu^2). \tag{4}$$

Решение этого уравнения ищется в виде ряда по степеням параметра α

$$\phi = \phi_0 + \alpha\phi_1 + \alpha^2\phi_2 + \ldots \tag{5}$$

Заменив ψ на основании (5) в уравнении (4) и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях α, получим бесконечную систему уравнений:

$$(\nabla\psi_0)^2 - i\nabla^2\psi_0 = k^2, \tag{6}$$

$$2(\nabla\psi_0\nabla\psi_1) - i\nabla^2\psi_1 = 2k^2\mu, \tag{7}$$

$$2(\nabla\psi_0\cdot\nabla\psi_2) - i\nabla^2\psi_2 = k^2\mu^2 - (\nabla\psi_1)^2. \tag{8}$$

Уравнения (7) и (8) могут быть использованы для определения первого и второго приближения ψ_1 и ψ_2, если задано нулевое приближение ψ_0.

Ради определенности будем считать, что случайные неоднородности имеются лишь в правом полупространстве ($x>0$). Левое полупространство ($x<0$) случайных неоднородностей не содержит. Из однородной среды в положительном направлении оси x падает плоская волна. Следовательно, нулевое приближение должно быть задано в виде

$$\psi_0 = kx. \tag{9}$$

Легко видеть, что оно удовлетворяет уравнению (6). Заменив ψ_0 на основании (9) в уравнениях (7) и (8), получим окончательную систему уравнений для определения первого и второго приближений:

$$2k\frac{\partial\psi_1}{\partial x} - i\nabla^2\psi_1 = 2k^2\mu, \tag{10}$$

$$2k\frac{\partial\psi_2}{\partial x} - i\nabla^2\psi_2 = k^2\mu^2 - (\nabla\psi_1)^2. \tag{11}$$

Уравнения (10) и (11) различаются только своими правыми частями.

Решение уравнения (10) имеет следующий вид:

$$\psi_1 = -\frac{ik^2}{2\pi}\int\frac{\exp ik\,[(\bar r - \bar r_1) - (x - x_1)]}{|\bar r - \bar r_1|}\,\mu(\bar r_1)\,dv_1, \tag{12}$$

где буквы с индексом относятся к рассеивающему элементу объема dv_1, без индексов — к точке наблюдения.

Второе приближение ψ_2 можно получить из первого приближения ψ_1, если в (12) заменить под интегралом $2\mu k^2$ на $k^2\mu^2 - (\nabla\psi_1)^2$. Тогда мы получим

$$\psi_2 = -\frac{i}{4\pi}\int\frac{\exp ik\,[(\bar r - \bar r_1) - (x - x_1)]}{|\bar r - \bar r_1|}\,[k^2\mu^2(r_1) - (\nabla_{\bar r_1}\psi_1)^2]\,dv_1. \tag{13}$$

Усредняя (13) статистически и учитывая, что $\overline{\mu^2} = 1$, мы получаем окончательно

$$\bar\psi_2 = -\frac{i}{4\pi}\int\frac{\exp ik\,[|\bar r - \bar r_1| - (x - x_1)]}{|\bar r - \bar r_1|}\,[k^2 - \overline{(\nabla_{\bar r_1}\psi_1)^2}]\,dv_1. \tag{14}$$

Интегрирование в (12) и (14) необходимо распространить на ту часть пространства, от которой приходят рассеянные волны в точку наблюдения.

Рассмотрим прежде всего выражение $\nabla_{\bar r_1}\psi_1$. На основании (12) мы имеем

$$\nabla_{\bar r_1}\psi_1 = -\frac{ik^2}{2\pi}\int\left\{\left[\frac{ik}{(\bar r_1 - \bar r_2)} - \frac{1}{(\bar r_1 - \bar r_2)^2}\right](\bar i\alpha + \bar j\beta + \bar k\gamma) - \frac{ik}{(\bar r_1 - \bar r_2)}\,\bar i\right\}\times$$

$$\times\exp[ik(\bar r_1 - \bar r_2) - (x_1 - x_2)]\,\mu(\bar r_2)\,dv_2, \tag{15}$$

где $\bar i$, $\bar j$, $\bar k$ — единичные векторы по осям; α, β, γ — направляющие косинуса вектора $\bar r_1 - \bar r_2$.

Предположим, что расстояние, пройденное волной в неоднородной среде, велико по сравнению с длиной волны. Тогда для подавляющего большинства точек будет выполняться неравенство $k|\bar{r}_1-\bar{r}_2|\gg 1$. В формуле (15) членом $1/|\bar{r}_1-\bar{r}_2|^2$ можно пренебречь по сравнению с членом $ik/|\bar{r}_1-\bar{r}_2|$.

В случае крупномасштабных неоднородностей можно пренебречь отражением волны и ограничить область интегрирования в наших формулах слоем, лежащим перед приемником. Существенный эффект будут давать те неоднородности, которые сосредоточены внутри узкого конуса с вершиной в точке приема. Внутри этого конуса направляющие косинусы определяются приближенными формулами:

$$\alpha\cong 1,\quad \beta\cong\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2},\quad \gamma\cong\frac{z_1-z_2}{x_1-x_2}. \tag{16}$$

В амплитуде можно заменить $|\bar{r}_1-\bar{r}_2|$ через x_1-x_2, в то время как в фазе необходимо использовать более точное выражение (приближение Френеля) для $|\bar{r}_1-\bar{r}_2|$:

$$|\bar{r}_1-\bar{r}_2|\cong(x_1-x_2)+\frac{1}{2}\,\frac{\rho_{12}}{x_1-x_2}, \tag{17}$$

где $\rho_{12}^2=(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2$. На основании (16) и (17) формула (15) приобретает вид:

$$\nabla_{\bar{r}_1}\psi_1=\frac{k^3}{2\pi}\int_{\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int\frac{\bar{j}\,(y_1-y_2)+\bar{k}\,(z_1-z_2)}{(x_1-x_2)^2}\exp\frac{ik\rho_{12}^2}{2(x_1-x_2)}\,\mu\,(x_2y_2z_2)\,dx_2dy_2dz_2. \tag{18}$$

Возводя в квадрат (18) и статистически усредняя, получим

$$\overline{(\nabla_{\bar{r}_1}\psi_1)^2}=\frac{k^6}{4\pi^2}\int_0^{x_1}\!\int_0^{x_1}\!\int\!\!\int\!\!\int_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int\frac{(y_1-y_2)(y_1-y_3)+(z_1-z_2)(z_1-z_3)}{(x_1-x_2)^2(x_1-x_3)^2}\times$$
$$\times\exp\frac{ik}{2}\left(\frac{\rho_{12}^2}{x_1-x_2}+\frac{\rho_{13}^2}{x_1-x_3}\right)N(\bar{r}_2-\bar{r}_3)\,dx_2dy_2dz_2dx_3dy_3dz_3, \tag{19}$$

где $N(\bar{r}_2-\bar{r}_3)$ — коэффициент корреляции пульсаций показателя преломления:

$$N(\bar{r}_2-\bar{r}_3)=\overline{\mu(\bar{r}_2)\,\mu(\bar{r}_3)}. \tag{20}$$

В дальнейшем мы будем предполагать, что коэффициент корреляции имеет Гауссов вид:

$$N=\exp\left\{-\frac{1}{a^2}\left[(x_2-x_3)^2+(y_2-y_3)^2+(z_2-z_3)^2\right]\right\}, \tag{21}$$

где a — масштаб неоднородностей. Введем относительные координаты x, y, z и координаты центра тяжести x_0, y_0, z_0 по формулам

$$\left.\begin{aligned} x&=x_2-x_3 & 2x_0&=x_2+x_3\\ y&=y_2-y_3 & 2y_0&=y_2+y_3\\ z&=z_2-z_3 & 2z_0&=z_2+z_3\end{aligned}\right\}. \tag{22}$$

Так как расстояние велико по сравнению с масштабом неоднородностей ($x_1\gg a$), мы имеем право интегрировать по относительной координате x в пределах от $-\infty$ до $+\infty$. Формула (19) перепишется следующим образом:

$$\overline{(\nabla_{\bar{r}_1}\phi_1)^2} = \frac{k^6}{4\pi^2}\int_0^{x_1}\iint\int_{-\infty}^{+\infty}\iiint \frac{(y_1-y_0)^2-\frac{1}{4}y^2+(z_1-z_0)-\frac{1}{4}z^2}{\left[(x_1-x_0)^2-\frac{1}{4}x^2\right]^2}\times$$
$$\times\exp\left[-p(y_1-y_0)^2+2q(y_1-y_0)y-\frac{1}{4}py^2-p(z_1-z_0)^2+\right.$$
$$\left.+2q(z_1-z_0)z-\frac{1}{4}pz^2\right]\exp\left[-\frac{1}{a^2}(x^2+y^2+z^2)\right]dx\cdot dy\cdot dz\,dx_0dy_0dz_0, \tag{23}$$

где

$$p=\frac{k}{i}\frac{(x_1-x_0)}{(x_1-x_0)^2-\frac{1}{4}x^2}, \tag{24}$$

$$q=-\frac{ik}{4}\frac{x}{(x_1-x_0)^2-\frac{1}{4}x^2}. \tag{25}$$

Используя таблицы [2], можно выполнить интегрирование по всем шести переменным.

После громоздких, но принципиально простых вычислений, мы получим

$$\overline{(\nabla_{\bar{r}_1}\phi_1)^2}=4\sqrt{\pi}\frac{k^2}{a}\frac{x_1}{1+i\frac{4x_1}{ka^2}}. \tag{26}$$

Теперь можно найти второе приближение $\overline{\phi}_2$. Если расположить приемник в точке $(x_1 00)$ и воспользоваться (17) и (26), то формула (14) приобретает вид:

$$\overline{\phi}_2=-\frac{i}{4\pi}\int_0^{x}\iint_{-\infty}^{+\infty}\frac{\exp\frac{ik\rho^2}{2(x-x_1)}}{x-x_1}\left[k^2-4\sqrt{\pi}\frac{k^2}{a}\frac{x_1}{1+i\frac{4x_1}{ka^2}}\right]dx_1dy_1dz_1, \tag{27}$$

где $\rho^2=y_1^2+z_1^2$. Ввиду того, что подынтегральное выражение обладает цилиндрической симметрией, проще всего ввести цилиндрические координаты на плоскости $y_1 0 z_1$. Однозначность на бесконечности $(\rho\to\infty)$ можно обеспечить, если предположить, что волновое число имеет малую мнимую часть. Тогда после элементарных вычислений мы получаем

$$\overline{\phi}_2=\frac{1}{2}kx+i\frac{\sqrt{\pi}}{2}ak^2x-\frac{\sqrt{\pi}}{8}a^3k^3\ln\left(1+i\frac{4x}{ka^2}\right). \tag{28}$$

В рассматриваемом случае крупномасштабных неоднородностей $(ka\gg 1)$ первым членом можно пренебречь по сравнению со вторым и третьим. Используя формулу $\ln\frac{1+iz}{1-iz}=2i\operatorname{arc\,tg}z$, можно отделить действительную часть от мнимой в (28). Тогда получим

$$\overline{\phi}_2=-\frac{\sqrt{\pi}}{16}k^3a^3\ln(1+D^2)+i\frac{\sqrt{\pi}}{2}k^2ax\left(1-\frac{\operatorname{arc\,tg}D}{D}\right), \tag{29}$$

где $D=4x/ka^2$ — волновой параметр.

Формула (29) очень интересна. Действительно, ее можно кратко записать следующим образом:

$$\overline{\phi}_2=-\frac{1}{a^2}\overline{bS}+\frac{i}{a^2}\overline{b^2}, \tag{30}$$

где b и S соответственно флюктуации уровня и фазы [1].

С помощью (30) можно определить затухание регулярного поля волны с дистанцией, обусловленное рассеянием. Усредняя (5) и используя (9), найдем

$$\psi = kx - \overline{bS} + i\overline{b^2}, \tag{31}$$

так как $\overline{\psi}_1 = 0$. Подставляя (31) в уравнение волны (3), получим

$$p = A_0 \exp ikx \cdot \exp(-\overline{b^2} - i\overline{bS}), \tag{32}$$

откуда следует, что нормирующий множитель имеет вид:

$$\exp(-\overline{b^2}) \cdot \exp(-i\varphi), \text{ где } \varphi = \overline{bS}.$$

Модуль нормирующего множителя характеризует затухание регулярного поля волны. Фаза — нарастание фазовой скорости с дистанцией, обусловленное наложением рассеянных волн на волну первичную.

Границы применимости метода плавных возмущений можно установить из требования малости второго приближения по сравнению с нулевым: $\alpha^2 |\overline{\psi}_2| \ll |\psi_0|$. Старший член в (29) удовлетворяет этому условию, если $\alpha^2 ka \ll 1$, что означает малость коэффициента рассеяния на длине волны.

Выражаю благодарность Л. А. Чернову, под руководством которого была выполнена настоящая работа.

ЛИТЕРАТУРА

Л. А. Чернов. Распространение волн в среде со случайными неоднородностями. М.— Л., Изд-во АН СССР, 1958.

2. И. М. Рыжик, И. С. Градштейн. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений М.— Л., Гостехиздат, 1951.

Ярославский государственный педагогический институт имени К. Д. Ушинского

Поступила в редакцию 26 марта 1959 г.