слоя имеет значительные преимущества перед однородным покрытием. Так, при одном и том же относительном весе покрытия $\mu = \frac{\text{вес конструкции}}{\text{вес стержня}} = 0{,}1$, применение подложки позволяет увеличить декремент почти в 6 раз (фиг. 2). Для каждого соотношения весов конструкции и стержня существует максимальное значение d, достигаемое выбором определенного отношения h_2/h_1. Так например, для относительного веса конструкции $\mu = 0{,}2$ максимальное значение декремента составляет 0,28 при $h_2/h_1 = 3{,}75$.

Таким образом, применение подложки позволяет значительно уменьшить вес вибропоглощающего покрытия и, тем самым, расширить область его применения. Проведенный расчет двойной вибропоглощающей конструкции позволяет определить его параметры, обеспечивающие получение максимального декремента затухания при заданном весе конструкции.

ЛИТЕРАТУРА

1. Измерение динамических параметров вибропоглощающих материалов и конструкций. Отчет Акустического института АН СССР, 1959.
2. Н. И. Наумкина, Б. Д. Тартаковский, М. М. Эфрусси. Экспериментальное исследование некоторых вибропоглощающих материалов. Акуст. ж., 1959, 5, 2, 196—201.

Акустический институт АН СССР
Москва

Поступило в редакцию
2 января 1959 г.

О ВЛИЯНИИ УПРУГОСТИ СРЕДЫ НА СОПРОТИВЛЕНИЕ ИЗЛУЧЕНИЯ ПОРШНЯ, ВСТАВЛЕННОГО В ЭКРАН

Д. Н. Четаев

При излучении звука в упругую среду, обладающую модулем сдвига, возбуждаются как продольные, так и поперечные колебания, что приводит к изменению частотной характеристики излучателя по сравнению с излучением в жидкость. Оценку влияния упругих свойств среды на сопротивление излучения проще всего провести на примере круглого поршневого излучателя, вставленного в экран.

Будем считать поверхность поршня и экрана жесткой и достаточно гладкой, чтобы можно было пренебречь тангенциальными напряжениями на поверхности среды. Контакт поршня с упругой средой во всех фазах колебания можно представить себе обеспеченным некоторой постоянной силой, при наличии которой совершаются малые колебания около равновесного положения. В силу принципа суперпозиции статическое поле и поле установившихся малых колебаний независимы.

Расчет волнового поля в упругом полупространстве $z > 0$, зависящего от времени по закону $\exp(i\omega t)$, заключается в решении уравнений для комплексных амплитуд скалярного потенциала смещений φ и угловой компоненты векторного потенциала ψ:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} + k_1^2\varphi = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} - \frac{\psi}{r^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} + k_2^2\psi = 0 \tag{2}$$

при граничных условиях, обеспечивающих заданные значения касательных напряжений τ_{rz} и нормальных смещений u_z на поверхности:

$$\frac{1}{\mu}\tau_{rz}\Big|_{z=0} = \left[2\frac{\partial^2\varphi}{\partial r\partial z} + 2\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} - \frac{2\psi}{r^2} + k_2^2\psi\right]_{z=0} = 0, \tag{3}$$

$$u_z\Big|_{z=0} = \left[\frac{\partial\varphi}{\partial z} + \frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{\psi}{r}\right]_{z=0} = \begin{cases} v/i\omega & (r < a) \\ 0 & (r > a) \end{cases}, \tag{4}$$

где a — радиус поршня, v — амплитуда его скорости, а

$$k_1 = \frac{\omega}{c_1} = \omega\sqrt{\frac{\rho}{\lambda + 2\mu}}, \quad k_2 = \frac{\omega}{c_2} = \omega\sqrt{\frac{\rho}{\mu}} \tag{5}$$

— волновые числа, соответствующие скоростям распространения продольных и поперечных волн c_1 и c_2 (ρ — плотность среды, λ и μ — ее постоянные Ламе).

Как легко проверить, решение поставленной задачи, ограниченное в бесконечно удаленных точках, дается формулами:

$$\varphi = \frac{va}{i\omega}\int\limits_0^\infty \frac{2m^2 - k_2^2}{k_2^2\sqrt{m^2 - k_1^2}}\, J_1(ma)\, J_0(mr) \exp\left(-z\sqrt{m^2 - k_1^2}\right) dm, \tag{6}$$

$$\psi = \frac{va}{i\omega}\int\limits_0^\infty \frac{2m}{k_2^2}\, J_1(ma)\, J_1(mr) \exp\left(-z\sqrt{m^2 - k_2^2}\right) dm. \tag{7}$$

Для вычисления сопротивления излучения требуется вычислить значения нормального напряжения

$$\sigma_{zz} = \mu\left[2\frac{\partial^2\psi}{\partial r\,\partial z} + \frac{2}{r}\frac{\partial\psi}{\partial z} - 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} - \frac{2}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} - k_2^2\varphi\right] \tag{8}$$

и просуммировать их по площади поршня. В результате довольно сложных преобразований, подробно изложенных в статье [1], для сопротивления излучения

$$Z = \rho c_1 \pi a^2\left[R(k_1a;\ k_2a) + iX(k_1a;\ k_2a)\right] \tag{9}$$

получены замкнутые выражения через функции Бесселя и Струве и табулированные интегралы от них

$$J(x) = \int\limits_0^x J_0(\xi)\, d\xi, \quad H(x) = \int\limits_0^x H_0(\xi)\, d\xi. \tag{10}$$

В обозначениях

$$c_2 / c_1 = \gamma, \quad k_1a = \alpha, \quad k_2a = \beta \tag{11}$$

безразмерные активное и реактивное сопротивления представляются следующими формулами:

$$\left.\begin{aligned} R(\alpha, \beta) = {} & 1 - (1 - 8\gamma^2 + 6\gamma^4)\frac{J_1(2\alpha)}{\alpha} - 2\gamma\frac{J_1(2\beta)}{\beta} - \\ & - (4\gamma^2 - 2\gamma^4)\frac{J(2\alpha)}{\alpha} + 2\gamma\frac{J(2\beta)}{\beta} - 3\gamma^4\frac{J_0(2\alpha)}{\alpha^2} + \frac{3}{2}\gamma^4\frac{J(2\alpha)}{\alpha^3} + \\ & + 3\gamma\frac{J_0(2\beta)}{\beta^2} - \frac{3}{2}\gamma\frac{J(2\beta)}{\beta^3}, \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

$$\left.\begin{aligned} X(\alpha, \beta) = {} & (1 - 8\gamma^2 + 6\gamma^4)\frac{H_1(2\alpha)}{\alpha} + 2\gamma\frac{H_1(2\beta)}{\beta} + \\ & + (4\gamma^2 - 2\gamma^4)\frac{H(2\alpha)}{\alpha} - 2\gamma\frac{H(2\beta)}{\beta} + 3\gamma^4\frac{H_0(2\alpha)}{\alpha^2} + \frac{3}{2}\gamma\frac{H(2\beta)}{\beta^3} - \\ & - \frac{6}{\pi}\gamma^4\frac{1}{\alpha} - 3\gamma\frac{H_0(2\beta)}{\beta^2} - \frac{3}{2}\gamma^4\frac{H(2\alpha)}{\alpha^3} + \frac{6}{\pi}\gamma\frac{1}{\beta}. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

При низких частотах ($\alpha \ll 1$, $\beta \ll 1$) формулы упрощаются:

$$X = \alpha\left(\frac{4}{\pi} - \frac{16}{3\pi}\gamma^2 + \frac{4}{\pi}\gamma^4\right), \tag{14}$$

$$R = \alpha^2\left(\frac{1}{2} + \frac{4}{15}\frac{1}{\gamma} - \frac{4}{3}\gamma^2 + \frac{16}{15}\gamma^4\right). \tag{15}$$

Для иллюстрации влияния упругости среды на излучение поршня приводим результаты расчетов по формулам (12), (13) для случая упругой среды Пуассона

$(\lambda=\mu)$ (см. табл.). Аргументом являются значения $k_1 a$, где волновое число соответствует скорости распространения продольных волн. Для сравнения приводятся соответствующие значения для излучения в жидкость [2].

Таблица

$k_1 a$	$R(k_1 a)$		$X(k_1 a)$	
	упругая среда Пуассона	идеальная жидкость	упругая среда Пуассона	идеальная жидкость
0,25	0,0376	0,0309	0,2063	0,2087
0,50	0,1461	0,1199	0,3772	0,3969
0,75	0,2960	0,2561	0,4891	0,5471
1,00	0,4560	0,4233	0,5345	0,6468
1,25	0,5967	0,6023	0,5232	0,6905
1,50	0,7005	0,7740	0,4761	0,6801
1,75	0,7639	0,9215	0,4184	0,6238
2,00	0,7956	1,0330	0,3675	0,5349
2,25	0,8101	1,1027	0,3323	0,4293
2,50	0,8204	1,1310	0,3188	0,3231
2,75	0,8337	1,1242	0,2993	0,2300
3,00	0,8508	1,0922	0,2875	0,1594
3,25	0,8681	1,0473	0,2724	0,1159
3,50	0,8822	1,0013	0,2543	0,0989
3,75	0,8882	0,9639	0,2365	0,1036
4,00	0,8902	0,9413	0,2226	0,1220

ЛИТЕРАТУРА

1. Д. Н. Четаев. Об излучении поршня с жестким фланцем в упругое полупространство. Прикл. матем. и механ., 1959, 23, 3, 425—433.
2. Ф. Морз. Колебания и звук. М.— Л., Гостехиздат, 1949.

Институт физики земли им. О. Ю. Шмидта
Москва

Поступило в редакцию
30 марта 1959 г.