АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том VI 1960 Вып. 1

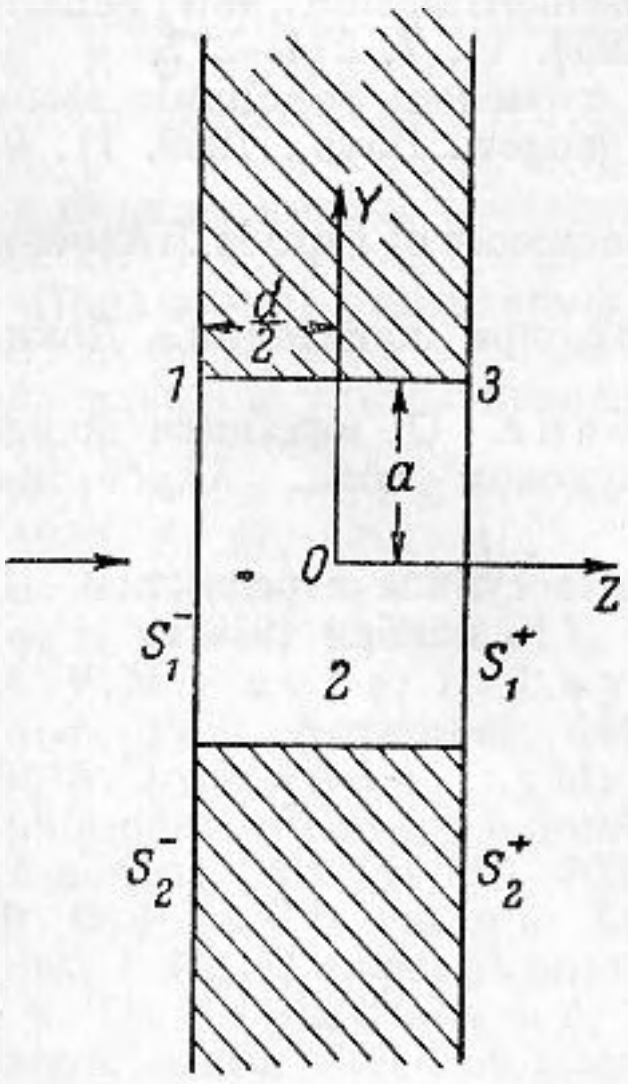
ДИФРАКЦИЯ СКАЛЯРНОЙ ВОЛНЫ НА ЩЕЛИ И КРУГЛОМ ОТВЕРСТИИ В ЭКРАНЕ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ТОЛЩИНЫ

М. В. Бутров

Следуя известному методу Левина — Швингера, получено стационарное выражение для коэффициентов прохождения через щель и круглое отверстие в плоском экране произвольной толщины. Приведены графики зависимости коэффициента прохождения от толщины экрана и диаметра отверстия для одного случая функции сравнения для поля в плоскости отверстия.

Пусть слева на препятствие (см. фиг. 1) падает нормально плоская скалярная волна, описываемая потенциальной функцией $\phi(z) = \exp(ikz)$. Зависимость от времени возьмем в форме $\exp(-i\omega t)$. Будем считать далее, что толщина экрана произвольна и зададим на границах областей 1—2 (S_1^-), 2—3 (S_1^+) неизвестные значения потенциальных функций $\phi^{(-)}$, $\phi^{(+)}$. Как было показано в [1], симметрия задачи относительно плоскости $z = 0$ позволяет построить систему интегральных уравнений относительно заданных потенциалов, которая затем преобразуется в пару независимых друг от друга интегральных уравнений относительно комбинации заданных потенциалов. Полученные интегральные уравнения обычным образом [2], [3] приводятся к стационарной форме.

Ниже везде цифровой индекс 1, 2, 3 у потенциальной функции означает решение в соответствующей области, согласно фигуре 1.



Фиг. 1.

1. Дифракция на щели

В этом случае мы имеем дело с плоской задачей. Необходимо найти решение уравнения

$$(\nabla^2 + k^2)\,\phi(zy) = 0 \tag{1}$$

при условиях:

$$\begin{cases} \psi_{1,\,3}\left(\pm\frac{d}{2},\ y\right) = 0, & |y| \geqslant a, \\ \psi_1\left(-\frac{d}{2},\ y\right) = \psi^{(-)}, & |y| \leqslant a, \\ \psi_3\left(+\frac{d}{2},\ y\right) = \psi^{(+)}, & |y| \leqslant a, \\ \psi_2(z,\ y) = 0, \quad y = a, & -\frac{d}{2} \leqslant z \leqslant +\frac{d}{2}. \end{cases} \tag{2}$$

Решения в областях 1—3, удовлетворяющие (1) при условиях (2), могут быть записаны в форме [2], [4]

$$\psi_1(z,\ y) = 2i\sin k\left(z + \frac{d}{2}\right) - 2\int_{-a}^{a} \psi^{(-)}(y')\,\frac{\partial}{\partial z'}\,[G(z,\ y;\ z',\ y')]_{-d/2}\,dy', \tag{3}$$

$$\psi_3(z,\ y) = 2\int_{-a}^{a} \psi^{(+)}(y')\,\frac{\partial}{\partial z'}[G(z,\ y;\ z',\ y')]_{+d/2}\,dy', \tag{4}$$

где G — функция Грина для плоской области [5],

$$G = \frac{1}{(2\pi)^2}\iint_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ik_x z - z' + ik_y(y-y')}}{k_x^2 + k_y^2 - k^2}\,dk_x dk_y.$$

Интегрируя последнее выражение по k_x и используя преобразование Фурье, функцию Грина для двухмерной области можно привести к виду:

$$G = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k\sqrt{(z-z')^2 + (y-y')^2}), \tag{5}$$

где $H_0^{(1)}$ — функция Ганкеля.

Решение (1) при условиях (2) для области 2 — это известное волноводное решение, которое мы запишем в форме

$$\psi_2(zy) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n e^{\gamma_n z} + B_n e^{-\gamma_n z}) \sin\frac{n\pi}{2a}(y+a), \tag{6}$$

где $\gamma_n = \sqrt{(n\pi/2a)^2 - k^2},\ k = 2\pi/\lambda$. Приравнивая $\psi_2(zy)$ заданным потенциальным функциям $\psi^{(\pm)}$ при $z = \pm d/2$ и используя ортогональность тригонометрических функций, выразим коэффициенты A_n и B_n через заданные на $S_1^{\pm}$ потенциальные функции:

$$\begin{cases} A_n = -\dfrac{1}{2a\,\mathrm{sh}\,\gamma_n d}\displaystyle\int_{-a}^{a}\left(\psi^{(-)}e^{-\gamma_n\frac{d}{2}} - \psi^{(+)}e^{\gamma_n\frac{d}{2}}\right)\sin\frac{n\pi}{2a}(y+a)\,dy, \\ B_n = \dfrac{1}{2a\,\mathrm{sh}\,\gamma_n d}\displaystyle\int_{-a}^{a}\left(\psi^{(-)}e^{\gamma_n\frac{d}{2}} - \psi^{(+)}e^{-\gamma_n\frac{d}{2}}\right)\sin\frac{n\pi}{2a}(y+a)\,dy. \end{cases} \tag{7}$$

Для непрерывного перехода решения (1) для области 1 в решение (1) для области 2 и решения для области 2 в решение для области 3 необходимо, чтобы нормальные производные от потенциалов в соответствующих областях были равны на их границах. Отсюда получаем

$$\begin{cases} 2ik - 2\displaystyle\int_{a-}^{a}\psi^{(-)}\left[\frac{\partial^2}{\partial z'\partial z}G\right]_{-d/2}dy' = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n e^{-\gamma_n\frac{d}{2}} - B_n e^{\gamma_n\frac{d}{2}}\right)\gamma_n\sin\frac{n\pi}{2a}(y+a), \\ 2\displaystyle\int_{-a}^{a}\psi^{(+)}\left[\frac{\partial^2 G}{\partial z'\partial z}\right]_{+d/2}dy' = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n e^{\gamma_n\frac{d}{2}} - B_n e^{-\gamma_n\frac{d}{2}}\right)\gamma_n\sin\frac{n\pi}{2a}(y+a). \end{cases} \tag{8}$$

Подставляя (7) в (8), приводим последние уравнения к виду:

$$2ik - 2\int_{-a}^{a}\psi^{(-)}\left[\frac{\partial^2 G}{\partial z'\partial z}\right]_{-d/2}dy' = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\gamma_n\sin\frac{n\pi}{2a}(y+a)}{a\,\mathrm{sh}\,\gamma_n d}\times \tag{9}$$

$$\times\int_{-a}^{a}(\psi^{(+)} - \psi^{(-)}\,\mathrm{ch}\,\gamma_n d)\sin\frac{n\pi}{2a}(y+a)\,dy,$$

$$2\int_{-a}^{a}\psi^{(+)}\left[\frac{\partial^2 G}{\partial z'\partial z}\right]_{+d/2}dy' = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\gamma_n\sin\frac{n\pi}{2a}(y+a)}{a\,\mathrm{sh}\,\gamma_n d}\times$$

$$\times\int_{-a}^{a}(\psi^{(+)}\,\mathrm{ch}\,\gamma_n d - \psi^{(-)})\sin\frac{n\pi}{2a}(y+a)dy. \tag{10}$$

Уравнения (9), (10) образуют систему интегральных уравнений относительно функций $\psi^{(-)}$, $\psi^{(+)}$. Прямое решение системы не представляется возможным, поэтому преобразуем ее к стационарной форме. Для этой цели необходимо систему (9), (10) преобразовать в независимые интегральные уравнения. Сложив (9) и (10) и введя комбинацию $\psi^{(+)} - \psi^{(-)} = \psi_l$, мы получим

$$2ik - 2\int_{-a}^{a} \psi_l \left[\frac{\partial^2 G}{\partial z' \partial z}\right]_{-d/2} dy' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n \sin \frac{n\pi}{2a}(y+a) \operatorname{cth} \frac{\gamma_n d}{2}}{a} \times$$

$$\times \int_{-a}^{a} \psi_l \sin \frac{n\pi}{2a}(y+a)\, dy. \qquad (11)$$

Аналогично, вычитая из (9) уравнение (10) и обозначая сумму функций $\psi^{(+)} + \psi^{(-)} = \psi_0$, находим

$$-2ik + 2\int_{-a}^{a} \psi_0 \left[\frac{\partial^2 G}{\partial z' \partial z}\right]_{+d/2} dy' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n \sin \frac{n\pi}{2a}(y+a) \operatorname{th} \frac{\gamma_n d}{2}}{a} \times$$

$$\times \int_{-a}^{a} \psi_0 \sin \frac{n\pi}{2a}(y+a)\, dy. \qquad (12)$$

Очевидно, что $\left[\frac{\partial^2 G}{\partial z' \partial z}\right]_{-d/2} = \left[\frac{\partial^2 z}{\partial z' \partial z}\right]_{+d/2}$. Поэтому ниже индексы у производных от функции Грина опустим.

Для приведения к стационарной форме интегральных уравнений (11), (12) используем обычную процедуру [3]. Умножим (11) на ψ_l, проинтегрируем по ширине щели и поделим результат на $\left[\int_{-a}^{a} \psi_l dy\right]^2$; аналогично поступаем с (12). Тогда

$$\int_{-a}^{a} \psi_l dy = 2ik \frac{\left[\int_{-a}^{a} \psi_l dy\right]^2}{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n \operatorname{cth} \frac{\gamma_n d}{2}}{a} \left[\int_{-a}^{a} \psi_l \sin \frac{n\pi}{2a}(y+a)\, dy\right]^2 - 2\int\int_{-a}^{a} \psi_l \left[\frac{\partial^2 G}{\partial z' \partial z}\right] \psi_l' dy dy'}, \qquad (13)$$

$$\int_{-a}^{a} \psi_0 dy = -2ik \frac{\left[\int_{-a}^{a} \psi_0 dy\right]^2}{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n \operatorname{th} \frac{\gamma_n d}{2}}{a} \left[\int_{-a}^{a} \psi_0 \sin \frac{n\pi}{2a}(y+a)\, dy\right]^2 - 2\int\int_{-a}^{a} \psi_0 \left[\frac{\partial^2 G}{\partial z' \partial z}\right] \psi_0' dy dy'}. \qquad (14)$$

Оба выражения (13), (14) совместно с (11), (12) соответственно стационарны относительно небольших отклонений ψ_l, ψ_0 от истинных значений. Стандартное доказательство этого [3] требует симметрии ядра под интегралами в знаменателях (13), (14) относительно y и y'. В нашем случае эта симметрия очевидна.

Согласно [2], [4], амплитуда прошедшей через щель волны, идущей в направлении падающей, равна

$$A = -\frac{ik}{4\pi}\int_{-a}^{a}\psi^{(+)}\,dy \tag{15}$$

и коэффициент прохождения для щели будет

$$t = -\frac{\frac{4\pi}{k}\operatorname{Im} A}{2a}. \tag{16}$$

Складывая (13) и (14), мы получим выражение:

$$\int_{-a}^{a}\psi^{(+)}dy = ik\,(P+S), \tag{17}$$

где P и S — правые части формул (13), (14), поделенные на $2ik$. Формула (17) дает возможность вычислить, используя (15), (16), коэффициент прохождения через щель в экране конечной толщины. Этот коэффициент имеет вид:

$$t = -\frac{k}{2a}\operatorname{Im}(P+S). \tag{17'}$$

Подставляя в последнее соотношение выражения для P и S и полагая $d = 0$, мы получаем для коэффициента прохождения через щель в бесконечно тонком экране выражение:

$$t = -\frac{k}{4a}\operatorname{Im}\frac{\left[\int_{-a}^{a}\psi^{(+)}dy\right]^2}{\iint_{-a}^{a}\psi^{(+)}\left[\frac{\partial^2 G}{\partial z'\partial z}\right]\psi'^{(+)}dydy'}.$$

Это выражение совпадает с тем, которое получается при помощи вариационного метода для бесконечно тонких экранов (см., например, [3]).

Заметим, что полученные в этом разделе результаты без всяких изменений пригодны также для случая дифракции плоской электромагнитной волны на щели в идеальнопроводящем экране, если вектор электрического поля параллелен краю щели. Для расчета коэффициента прохождения по формуле (17′) следует задать подходящий вид функций ψ_1 и ψ_0. О некоторых вопросах, связанных с заданием этих функций, речь пойдет ниже.

2. Дифракция на круглом отверстии

Пусть теперь с началом декартовой системы координат совмещено начало цилиндрической системы, так что положение точки в плоскостях S_1^-, S_1^+ задается координатами ρ и φ. Условия падения волны на препятствие и граничные условия остаются прежними. Для нахождения коэффициента прохождения через отверстие следует построить решения (1) при граничных условиях:

$$\begin{aligned}
&\psi_{1,3}(\rho,\ \varphi,\ \pm d/2) = 0, \quad \rho \text{ на } S_2^{(\pm)}\\
&\psi_1(\rho,\ \varphi,\ -d/2) = \psi^{(-)}, \quad \rho \text{ на } S_1^{(-)}\\
&\psi_3(\rho,\ \varphi,\ +d/2) = \psi^{(+)}, \quad \rho \text{ на } S_1^{(+)}\\
&\psi_z(\rho,\ \varphi,\ z) = 0, \quad \rho = a, \quad -d/2 \leqslant z \leqslant d/2.
\end{aligned} \tag{18}$$

Решения (1) при граничных условиях (18) для областей 1, 3 имеют

ту же форму, что и в разделе 1, с той лишь разницей, что функция Грина теперь равна

$$G = \frac{i}{8\pi^2} \iint\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp\left[i\left\{k_x(x-x') + k_y(y-y') + k_z|z-z'|\right\}\right]}{k_z} dk_x dk_y, \qquad (19)$$

где $k_z = (k^2 - k_x^2 - k_y^2)^{1/2}$ и интегралы в решениях для областей 1, 3 распространяются соответственно по поверхностям S_1^-, S_1^+. Волноводное решение (1) области 2, не зависящее от азимутального угла, запишем в форме

$$\psi_z(\rho, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n e^{\beta_n z} + B_n e^{-\beta_n z}\right) I_0(\nu_n \rho/a), \qquad (20)$$

где ν_n — корень функции Бесселя нулевого порядка, а $\beta_n = \sqrt{(\nu_n/a)^2 - k^2}$.

Поступая в дальнейшем совершенно подобно тому, как это сделано в разделе 1, вместо (13), (14) получим соответственно

$$\int\limits_{S_1} \psi_l dS = 2ik \frac{\left[\int\limits_{S_1} \psi_l dS\right]^2}{\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n \operatorname{cth}(\beta_n d/2)}{\pi a^2 I_1^2(\nu_n)} \left[\int\limits_{S_1} \psi_l I_0(\nu_n \rho/a) dS\right]^2 - 2\iint\limits_{S_1} \psi_l \left[\frac{\partial^2 G}{\partial z' \partial z}\right] \psi_l' dS dS'}, \qquad (21)$$

$$\int\limits_{S_1} \psi_0 dS = -2ik \frac{\left[\int\limits_{S_1} \psi_0 dS\right]^2}{\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n \operatorname{th}(\beta_n d/2)}{\pi a^2 I_1^2(\nu_n)} \left[\int\limits_{S_1} \psi_0 I_0(\nu_n \rho/a)\, dS\right]^2 - 2\iint\limits_{S_1} \psi_0 \left[\frac{\partial^2 G}{\partial z' \partial z}\right] \psi_0' dS\, dS'}. \qquad (22)$$

Эти выражения подобны по форме выражениям (13), (14) и также стационарны относительно небольших отклонений ψ_0, ψ_l от их истинных значений. Разность между (21) и (22) дает величину:

$$\int\limits_{S_1} \psi^{(+)} dS = ik(M + N), \qquad (23)$$

где M и N — правые части (21), (22), поделенные на $2ik$.

Используя (23), а также (15) (интеграл здесь берется по площади отверстия), (16), можно для этого случая вычислить коэффициент прохождения, который, так же как и в разделе 1, в предельном случае малых толщин d переходит в выражение, полученное в работе [2]. В общем случае конечного d коэффициент прохождения t имеет вид:

$$t = -\frac{k}{\pi a^2} \operatorname{Im}(M + N). \qquad (24)$$

Аналогично изложенному обобщаются результаты [6] на случай экрана произвольной толщины.

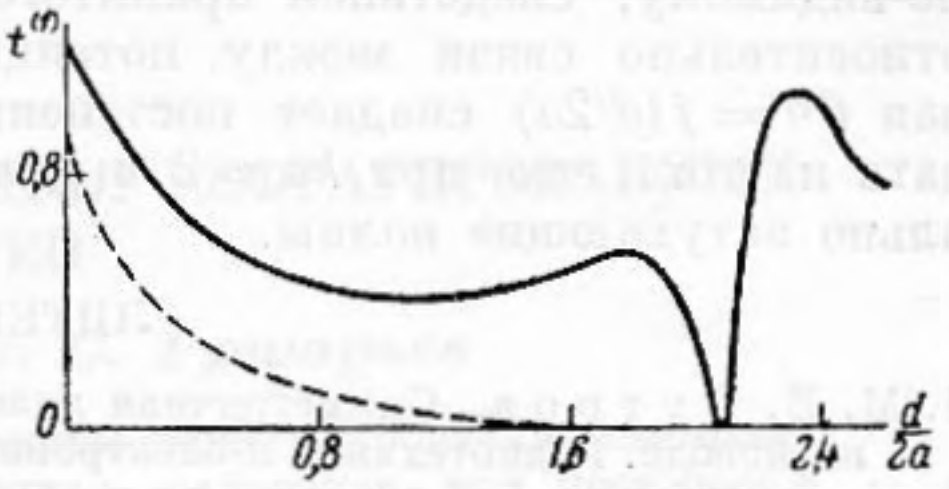
3. Численные результаты и обсуждение

При расчете коэффициента прохождения по (17′), (24) необходимо задать функции ψ_l и ψ_0 (или функции $\psi^{(-)}$ и $\psi^{(+)}$). Наиболее просто это сделать для случаев $a \ll \lambda$ и $a \gg \lambda$. Однако, как известно (см. [2], [6]), результаты, полученные для этих крайних случаев, остаются справедливыми вплоть до $\lambda \sim a$.

Рассчитаем теперь коэффициент прохождения для случая круглого отверстия, формула (24), при специальном предположении относительно связи между функциями $\psi^{(+)}$ и $\psi^{(-)}$. А именно, допустим, что в стационарном случае функции $\psi^{(+)}$ и $\psi^{(-)}$ отличаются друг от друга некоторым постоянным множителем, зависящим от d, $f(d)$. Таким образом,

$$\psi_l = \psi^{(\pm)}[1 - t(d)],$$
$$\psi_0 = \psi^{(\pm)}[1 + t(d)]. \qquad (25)$$

При вычислениях по (17′), (24) постоянные множители при $\psi^{(\pm)}$ не имеют значения. Поэтому можно ограничиться непосредственным заданием функций $\psi^{(\pm)}$.



Фиг. 2

В качестве функции сравнения для $\psi^{(\pm)}$ возьмем зоммерфельдовское разложение поля в отверстии по полной системе функций $\psi^{(\pm)}(\rho) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n [1 - \rho^2/a^2]^{n-1/2}$, где a_n — неизвестные коэффициенты. Последние в принципе можно определить, используя стационарность выражений для M и N.

Ниже мы ограничимся расчетом только первого приближения для коэффициента прохождения, положив $a_2 = a_3 = a_4 = \ldots = 0$. Два из трех входящих в M и N интегралов вычислены в [2], третий же интеграл, входящий под знак суммирования, вычисляется по формуле Сонина. Производя соответствующие сокращения и подставляя полученные значения для M и N в формулу (24), получим для коэффициента прохождения в первом приближении

$$t^{(1)} = \frac{4ka}{9\pi} I_{11} \left[\frac{1}{(b' + R_{11})^2 + I_{11}^2} - \frac{1}{(b + R_{11})^2 + I_{11}^2} \right], \qquad (26)$$

где

$$b = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n a I_{3/2}^2(\nu_n)}{\nu_n^3 I_1^2(\nu_n)} \operatorname{cth}(\beta_n d/2), \quad b' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n a I_{3/2}^2(\nu_n)}{\nu_n^3 I^2(\nu_n)} \operatorname{th}(\beta_n d/2),$$

$$I_{11}(ka) = \frac{ka}{2\pi} - \frac{1}{4\pi ka} + \frac{S_0(2ka)}{8(ka)^2} - \frac{1}{16(ka)^3} \int_0^{2ka} S_0(t)\,dt - \frac{1}{4ka} \int_0^{2ka} \frac{S_1(t)}{t}\,dt,$$

$$R_{11}(ka) = \frac{1}{4ka}\left(1 + \frac{1}{4k^2a^2}\right) \int_0^{2ka} I_0(t)\,dt - \frac{1}{8k^2a^2} I_0(2ka) - \frac{I_1(2ka)}{4ka};$$

S_0, S_1, I_0, I_1 соответственно, функции Струве и Бесселя.

Взятая выше функция сравнения для поля в отверстии дает хорошее приближение в области $0 \leqslant ka \leqslant 2{,}5$. Для расширения этой области необходимо брать следующее, второе приближение, положив $a_3 = a_4 = \ldots = 0$. Для рассматриваемой задачи второе приближение оказывается более громоздким, чем в [2].

Результаты расчета $t^{(1)}$ по формуле (26) для двух случаев ka приведены на фиг. 2. Входящие в (26) выражения b и b' находились непосредственным суммированием первых десяти членов ряда; интегралы же брались численно. Сплошная кривая на фиг. 2 проведена для случая $ka = 2{,}5$, штриховая — для $ka = 2$. При $ka = 2{,}5$ в цилиндре, соединяющем левое и правое полупространства, может распространяться основная волна. Следует ожидать поэтому периодической зависимости $t^{(1)}$ от d.

Расчет подтверждает ожидания. После точки $d/2a = 2{,}5$ кривая повторяет участок $d/2a = 0{,}1 \div 2{,}08$. В точке $d/2a = 2{,}08$ мнимая часть амплитуды сферической волны, идущей в области 3 в направлении падающей, обращается в нуль, а затем меняет знак. Такое поведение $t^{(1)}$ является, по-видимому, следствием принятого в начале параграфа предположения относительно связи между потенциалами $\phi^{(+)}$ и $\phi^{(-)}$. При $ka = 2$ кривая $t^{(1)} = f(d/2a)$ спадает постепенно к нулю, как это и следует ожидать из того, что при $ka = 2$ в цилиндре существуют лишь экспоненциально затухающие волны.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. В. Бутров. Симметричная диафрагма произвольной толщины в круглом волноводе. Радиотехника и электроника, 1958, 3, 1, 56—60.
2. H. Levine, J. Schwinger. On the theory of diffraction byanaperture in a infinite plan sereen. J. Phys. Rev., 1948, 74, 8, 958—974.
3. F. Borgnis, Ch. Papas. Randwertprobleme der Mikrowellenphysik. Springer — Verlag. Berlin — Göttingen — Heidelberg, 1955.
4. T. di Francia. Introduction to the modern theory of electromagnetic diffraction. Atti Fondaz Giorgio Ronchi, 1956, 11, 66, 503—551.
5. Д. Иваненко, А. Соколов. Классическая теория поля. М., ГИТТЛ, 1951.
6. H. Levine, J. Schwinger. On the theory of diffraction by an aperture in a infinite plane sereen. II. Phys. Rev., 1949, 75, 9, 1423—1432.

Рязанский
радиотехнический институт

Поступила в редакцию
10 апреля 1959 г.