

ИЗЛУЧЕНИЕ ЗВУКА УПРУГИМИ ОБОЛОЧКАМИ, ВОЗБУЖДАЕМЫМИ ТУРБУЛЕНТНЫМ АЭРОДИНАМИЧЕСКИМ ПОТОКОМ

Л. М. Дямшев

Излагается приближенный расчет акустического поля, генерируемого дозвуковым турбулентным потоком, вне или внутри упругих тонких оболочек, находящихся в потоке. Показано, что расчет сводится к решению вспомогательной дифракционной задачи и определению тензора корреляции пульсаций скорости или давления в потоке и на поверхности оболочки. Когда вспомогательное решение и соответствующая функция корреляции известны, необходимо лишь произвести вычисление квадратур. Приблизительно вычисляется средняя квадратичная величина флюктуаций давления в звуковом поле, излучаемом движущейся тонкой пластиной, совершающей колебания под действием пульсаций давления в пограничном слое.

Для ряда практических проблем важно знать характеристики акустического поля вне или внутри упругой оболочки, обтекаемой турбулентным потоком. В работе излагается приближенный расчет излучения звука оболочкой в этом случае. В основу расчета положено уравнение, описывающее генерацию и распространение звука в постоянном турбулентном потоке [1, 2]. Используя это уравнение, мы, пренебрегая наличием поперечного сдвига средней скорости в турбулентном пограничном слое вблизи оболочки, не учитываем существования рефракции звука в пограничном слое и принимаем во внимание только «снос» звуковых волн. Наличие поперечного сдвига средней скорости в турбулентном пограничном слое учитывается при вычислении пульсаций давления и вязких напряжений в слое. Расчет проводится применительно к упругим пластинам и цилиндрическим оболочкам. Считается, что направление потока совпадает с образующей оболочки. Полученные результаты применимы к слабо искривленным пластинам и оболочкам в границах, когда справедлива аэродинамическая теория обтекания тонких тел. Если скорость потока существенно меньше скорости звука в среде, наличием «акустического ветра» можно пренебречь и полученные формулы могут быть использованы для приближенного расчета излучения звука оболочками других форм. Статистические процессы предполагаются стационарными во времени и всюду используются уравнения для спектральных амплитудных плотностей.

Рассмотрим некоторую ограниченную область Ω турбулентного потока. Выберем движущуюся систему координат так, чтобы средняя скорость потока V в Ω была равна нулю. Уравнение распространения звука в турбулентной среде запишем в виде [2]

$$\Delta p - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} T_{ij}, \quad (1)$$

где $T_{ij} = \rho v_i v_j + s_{ij} + (p - c_0^2 \rho) \delta_{ij}$, ρ — плотность, v_i — компоненты пульсаций скорости, s_{ij} — тензор вязких напряжений, p — давление в потоке, c_0 — скорость звука в неподвижной среде. Когда скорость потока мала по сравнению со скоростью звука в среде ($M = V/c_0 < 1$), можно приближенно допустить $T_{ij} \simeq \rho_0 v_i v_j + s_{ij}$, где ρ_0 — плотность несжимаемого

газа. Пульсации скорости в турбулентном потоке несжимаемого газа связаны с пульсациями давления p^0 соотношением [3]:

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} v_i v_j = - \frac{1}{\rho_0} \Delta p^0.$$

Переходя к неподвижной системе координат и предполагая статистические процессы стационарными, запишем уравнение для спектральных амплитудных плотностей

$$\Delta \rho^{(1)}(\mathbf{r}_0) - \frac{1}{c_0^2} \left(-i\omega + V \frac{\partial}{\partial x_1} \right)^2 \rho^{(1)}(\mathbf{r}_0) = - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} P_{ij}(\mathbf{r}_0), \quad (2)$$

$$P_{ij} = s_{ij} - p^0 \delta_{ij}.$$

Предположим теперь, что внутри Ω находится упругая оболочка, покоящаяся в выбранной неподвижной системе координат, и распространение звука в среде вне оболочки подчиняется уравнению (2). Потребуем, чтобы на поверхности оболочки выполнялись граничные условия

$$\left. \frac{\partial \rho^{(1)}(\mathbf{r}_0)}{\partial n} \right|_S = - \frac{\rho_0}{c_0^2} \left(-i\omega + V \frac{\partial}{\partial x_1} \right)^2 w^{(1)}(\mathbf{r}_0), \quad (3)$$

$$Lw^{(1)}(\mathbf{r}_0) = c_0^2 \rho^{(1)}(\mathbf{r}_0)|_S. \quad (4)$$

В выражениях (3) и (4) $w^{(1)}(\mathbf{r}_0)$ — перемещения поверхности оболочки S в направлении внешней к S нормали \mathbf{n} , L — самосопряженный дифференциальный оператор, а выражение (4) представляет собой уравнение движения оболочки или пластинки.

Введем вспомогательное решение $\tilde{\rho}^{(2)}(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0)$ сопряженной задачи, описывающее регулярное (нестатистическое) звуковое поле, удовлетворяющее уравнению

$$\Delta \tilde{\rho}^{(2)}(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0) - \frac{1}{c_0^2} \left(-i\omega - V \frac{\partial}{\partial x_1} \right)^2 \tilde{\rho}^{(2)}(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0) = - \frac{1}{c_0^2} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0), \quad (5)$$

сопряженному с уравнением (2). Потребуем, чтобы решение $\tilde{\rho}^{(2)}(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0)$ удовлетворяло краевым условиям, сопряженным с граничными условиями (3) и (4), а именно,

$$\left. \frac{\partial \tilde{\rho}^{(2)}(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0)}{\partial n} \right|_S = - \frac{\rho_0}{c_0^2} \left(-i\omega - V \frac{\partial}{\partial x_1} \right)^2 \tilde{w}^{(2)}(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0), \quad (6)$$

$$L\tilde{w}^{(2)}(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0) = c_0^2 \tilde{\rho}^{(2)}(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0)|_S. \quad (7)$$

Умножим уравнение (2) на $\tilde{\rho}^{(2)}(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0)$, а (5) — на $\rho^{(1)}(\mathbf{r}_0)$, сложим эти уравнения и проинтегрируем правую и левую части полученного выражения по объему Ω . К объемному интегралу в левой части равенства применим теорему Грина. В результате получим

$$\begin{aligned} & - \int_{s+s_0} \left[\frac{\partial \rho^{(1)}(\mathbf{r}_0)}{\partial n} \tilde{\rho}^{(2)}(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0) - \frac{\partial \tilde{\rho}^{(2)}(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0)}{\partial n} \rho^{(1)}(\mathbf{r}_0) \right] ds(\mathbf{r}_0) - \\ & - \frac{2i\omega}{c_0} M \int_{s_0} \rho^{(1)}(\mathbf{r}_0) \tilde{\rho}^{(2)}(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0) ds(\mathbf{r}_0) l_1 + M^2 \int_{s_0} \left[\frac{\partial \rho^{(1)}(\mathbf{r}_0)}{\partial n} \tilde{\rho}^{(2)}(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0) - \right. \\ & \left. - \frac{\partial \tilde{\rho}^{(2)}(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0)}{\partial n} \rho^{(1)}(\mathbf{r}_0) \right] ds(\mathbf{r}_0) l_1 = \frac{1}{c_0^2} \rho^{(1)}(\mathbf{r}) - \\ & - \frac{1}{c_0^2} \int_{\Omega} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} P_{ij}(\mathbf{r}_0) \tilde{\rho}^{(2)}(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0) d\Omega(\mathbf{r}_0); \end{aligned} \quad (8)$$

$$l_1 \equiv \cos(\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{x}_1), \quad M = V/c_0.$$

Интеграл по поверхности s_0 , представляющей собой внешнюю часть поверхности, ограничивающей объем Ω , равен нулю в силу условия излучения, так как поверхность s_0 может быть удалена как угодно далеко от источников звукового поля и от оболочки. Интеграл по поверхности оболочки s равен нулю из-за самосопряженности оператора L и сопряженности краевых условий (3) и (6).

Переходя к давлениям, запишем на основании (8)

$$p^{(1)}(\mathbf{r}) = \int_{\Omega} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} P_{ij}(\mathbf{r}_0) \tilde{p}^{(2)}(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0) d\Omega(\mathbf{r}_0). \quad (9)$$

Применим теорему Остроградского-Гаусса к объемному интегралу в последнем выражении. Тогда это выражение можно представить так:

$$p^{(1)}(\mathbf{r}) = \int_{\Omega} P_{ij}(\mathbf{r}_0) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \tilde{p}^{(2)}(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0) d\Omega(\mathbf{r}_0) + \\ + \int_s l_i \frac{\partial}{\partial x_j} P_{ij}(\mathbf{r}_0) \tilde{p}^{(2)}(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0) ds(\mathbf{r}_0) - \int_s l_j P_{ij}(\mathbf{r}_0) \frac{\partial}{\partial x_i} \tilde{p}^{(2)}(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0) ds(\mathbf{r}_0). \quad (10)$$

Здесь l_i, l_j — направляющие косинусы нормали \mathbf{n} . Принимая во внимание условие

$$\frac{\partial}{\partial x_j} P_{ij}(\mathbf{r}_0) = -\rho_0 \frac{\partial}{\partial t} v_i(\mathbf{r}_0 t) = i\omega \rho_0 v_i(\mathbf{r}_0),$$

получим окончательно

$$p^{(1)}(\mathbf{r}) = \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j} \int_{\Omega} P_{ij}(\mathbf{r}_0) \tilde{p}^{(2)}(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0) d\Omega(\mathbf{r}_0) + \\ + i\omega \rho_0 \int_s l_i v_i(\mathbf{r}_0) \tilde{p}^{(2)}(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0) ds(\mathbf{r}_0) + \frac{\partial}{\partial y_i} \int_s P_{ij}(\mathbf{r}_0) \tilde{p}^{(2)}(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0) ds(\mathbf{r}_0). \quad (11)$$

Из формулы (11) следует, что акустическое поле турбулентного потока при наличии оболочки в потоке представляет собой суперпозицию полей излучения объемных источников — пульсаций давления и вязких напряжений в потоке и полей поверхностных источников*. Поверхностными источниками являются пульсации давления и вязких напряжений и пульсации скорости, действующие на оболочку со стороны потока.

Методом размерного анализа можно установить, что полная мощность излучения объемных (квадрупольных) источников пропорциональна отношению скорости потока к скорости звука в среде в восьмой степени (M^8), мощность излучения поверхностных (дипольных) источников, пульсаций давления и вязких напряжений пропорциональна — M^6 и пульсаций скорости (простых источников) — M^4 . Следовательно, в случае дозвуковых турбулентных потоков ($M < 1$) и упругих, но акустически «мягких» поверхностей, когда пульсации скорости в потоке около поверхности значительны, по сравнению с пульсациями давления и вязких напряжений, акустическое излучение обусловлено в основном действием пульсаций скорости. Напротив, если поверхность оболочки или пластины является акустически относительно «жесткой», роль пульсаций скорости незначительна. В этом случае поле излучения обусловлено в основном действием пульсаций давления и вязких напря-

* В формуле (11) y_i — координаты точки наблюдения \mathbf{r} .

жений у поверхности оболочки. При условии, что скорость потока относительно мала и, в других случаях, когда $|\rho^0(\mathbf{r}_0) \delta_{ij} \gg s_{ij}(\mathbf{r}_0)|$, среднюю квадратичную величину флюктуаций давления в поле излучения оболочки в потоке можно вычислить приближенно по формуле

$$|\overline{p^{(1)}(\mathbf{r})}|^2 \approx \iint_{SS} \frac{\partial}{\partial n} \tilde{p}^{(2)}(\mathbf{r} | \mathbf{r}'_0) \frac{\partial}{\partial n} \tilde{p}^{(2)*}(\mathbf{r} | \mathbf{r}''_0) F(\mathbf{r}'_0, \mathbf{r}''_0) dS(\mathbf{r}'_0) ds(\mathbf{r}''_0). \quad (12)$$

Здесь $F(\mathbf{r}'_0, \mathbf{r}''_0) = \overline{p^0(\mathbf{r}'_0) p^{0*}(\mathbf{r}''_0)}$ — функция корреляции пульсаций давления в потоке у поверхности оболочки. Аналогичные формулы на основании решения (11) можно получить и для других частных случаев.

Из выражения (12) видно, что наряду с решением $\tilde{p}^{(2)}(|\mathbf{r} | \mathbf{r}_0)$ вспомогательной дифракционной задачи для расчета акустического излучения оболочки в турбулентном потоке необходимо знать функцию корреляции пульсаций давления на поверхности оболочки. Между тем, в литературе чаще всего имеются сведения о функциях корреляции компонент пульсаций скорости в турбулентном потоке и неизвестна функция корреляции пульсаций давления. Последняя может быть теоретически определена из решения уравнения [3]:

$$\Delta p^0 = -\rho_0 \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} v_i v_j.$$

При этом может быть учтено существование поперечного сдвига средней скорости потока в пограничном слое у поверхности оболочки и взаимодействие между пульсационными компонентами и средней скоростью потока. Для расчета функции корреляции пульсаций давления необходимо использовать некоторую модель турбулентности и известные из эксперимента для условий, близких к условиям выбранной модели, функции корреляции компонент пульсаций скорости в турбулентном потоке. Тогда указанное уравнение можно рассматривать как уравнение Пуассона для функции $p^0(\mathbf{r}_0)$ и решать его при соответствующих краевых условиях. Так, если пульсации скорости в потоке у поверхности оболочки ничтожны, можно допустить, что $\frac{\partial p^0(\mathbf{r}_0)}{\partial n} \Big|_s = 0$, как это сделано, например, в [4]*.

Когда скорость потока существенно меньше скорости звука в среде ($M \ll 1$), наличие акустического ветра можно не учитывать. В выражении (12) и других аналогичных формулах вспомогательное решение уравнения распространения звука в движущейся среде можно заменить решением уравнения для неподвижной среды**.

Таким образом, для приближенного расчета излучения звука упругой оболочкой в турбулентном потоке необходимо решить соответствующую вспомогательную дифракционную сопряженную (или самосопряженную, когда акустический ветер можно не принимать во внимание) задачу, теоретически или экспериментально определить тензор корреляции пульсаций давления и вязких напряжений или в необходимом случае — пульсаций скорости у поверхности оболочки и воспользоваться формулой (12) или аналогичной формулой, полученной на основании решения (11). Если вспомогательное решение и функция корреляции известны, решение задачи об излучении звука упругой оболочкой в турбулентном потоке сводится к вычислению квадратур [6].

* Речь идет, таким образом, о приближенном расчете функции корреляции пульсаций давления. В принципе указанное уравнение, связывающее пульсации давления и скорости в турбулентном потоке несжимаемой жидкости, могло бы быть использовано для математически точного расчета. Однако это наталкивается практически на неразрешимые математические трудности.

** В последнем случае формула (12) совпадает с формулой работы [5], где рассматривалось излучение звука неподвижными упругими оболочками и пластинками, находящимися в неподвижной среде и колеблющимися под действием сил, статически распределенных по поверхности оболочки или пластинки.

В качестве примера получим приближенное решение задачи об излучении звука движущейся тонкой пластинкой (когда угол атаки равен нулю), совершающей колебания под действием пульсаций давления в пограничном слое*. Пластину будем считать с акустической точки зрения безграничной, т. е. пренебрежем эффектами дифракции звука у краев пластины и отражений изгибных волн от ее краев. Систему координат x, y, z выберем так, чтобы пластина была неподвижной. Для расчета среднего квадрата флуктуаций давления в поле излучения пластины воспользуемся формулой (12). Расчет произведем для области Фраунгофера. В этом случае формулу (12) можно переписать так:

$$|\overline{p^{(1)}(\mathbf{r})}|^2 \approx \frac{1}{16\pi^2 R^2} \int_s \int_s \frac{\partial}{\partial n} \tilde{p}_i^{(2)}(\mathbf{r}|\mathbf{r}'_0) \frac{\partial}{\partial n} \tilde{p}_i^{(2)*}(\mathbf{r}|\mathbf{r}''_0) F(\mathbf{r}'_0, \mathbf{r}''_0) ds(\mathbf{r}'_0) ds(\mathbf{r}''_0). \quad (13)$$

Здесь $R = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$, x_1, y_1, z_1 — координаты точки наблюдения, $p_i^{(2)}(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0)$ — решение сопряженной задачи о дифракции плоской волны единичной амплитуды на пластине (оболочке)**. Значение нормальной производной давления в поле плоской волны единичной амплитуды на поверхности движущейся пластины вычислим, следуя [8]:

$$\left. \frac{\partial \tilde{p}_i^{(2)}(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0)}{\partial n} \right|_s = \left. \frac{\partial \tilde{p}_i^{(2)}(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0)}{\partial y} \right|_{y=0} = +ik_y(1-A) \exp[+ik_x x + ik_z z] = +ik_y B \exp[+ik_x x + ik_z z]. \quad (14)$$

$$B = \frac{2\rho_0 c_0}{Z \cos \theta \sin \Psi (1 - M \sin \theta \sin \Psi) + 2\rho_0 c_0};$$

$$Z = -i\omega m_s \left[1 - \left(\frac{c_f}{c_0} \frac{\sin \theta \sin \Psi}{1 - M \sin \theta \sin \Psi} \right)^4 \right]^{***};$$

$$k_z = \frac{\omega}{c_0} \frac{\sin \theta \sin \Psi}{1 - M \sin \theta \sin \Psi}; \quad k_y = \frac{\omega}{c_0} \frac{\cos \theta \sin \Psi}{1 - M \sin \theta \sin \Psi};$$

$$k_x = \frac{\omega}{c_0} \frac{\cos \Psi}{1 - M \sin \theta \sin \Psi}.$$

Здесь A и B — коэффициенты отражения и прохождения плоской звуковой волны, Z — импеданс пластины для изгибных колебаний, m_s — масса пластины на единицу площади, c_f — скорость изгибных волн в пластине, θ — угол, образованный проекцией волнового вектора плоской волны на плоскость xOy и осью y , Ψ — угол между направлением волнового вектора и осью z .

Предположим, что функция корреляции пульсаций давления имеет вид:

$$F(\mathbf{r}'_0, \mathbf{r}''_0) = F(\omega) \exp \left[-\frac{|x' - x''|}{a_0} - \frac{|z' - z''|}{b_0} \right], \quad a_0 > b_0. \quad (15)****$$

* В литературе имеется указание на то, что в случае жестких упругих пластин пульсации скорости у поверхности пластины в пограничном слое (в ламинарном подслое) ничтожны (см., например, [7]), поэтому будем учитывать только действие пульсаций давления.

** Справедливость этой формулы можно доказать путем предельного перехода (см., например, [5]).

*** Учитываются только изгибные колебания пластинки и не принимаются во внимание поперечные колебания сжатия.

**** Функция корреляции выбрана в таком виде по соображениям простоты вычисления. a_0 и b_0 — по порядку должны быть равны толщине пограничного слоя. Условие $a_0 > b_0$ отражает наличие анизотропии в турбулентном пограничном слое (вихри вытянуты в направлении потока). Для численных расчетов функция $F(\omega)$ может быть, например, взята в таком виде, как она записана в [4], с поправочным коэффициентом, так как в работе [4] учитывалось действие пульсаций давления в пограничном слое, существующем с одной стороны пластины. В рассматриваемом случае пограничный турбулентный слой возникает на ее обеих сторонах.

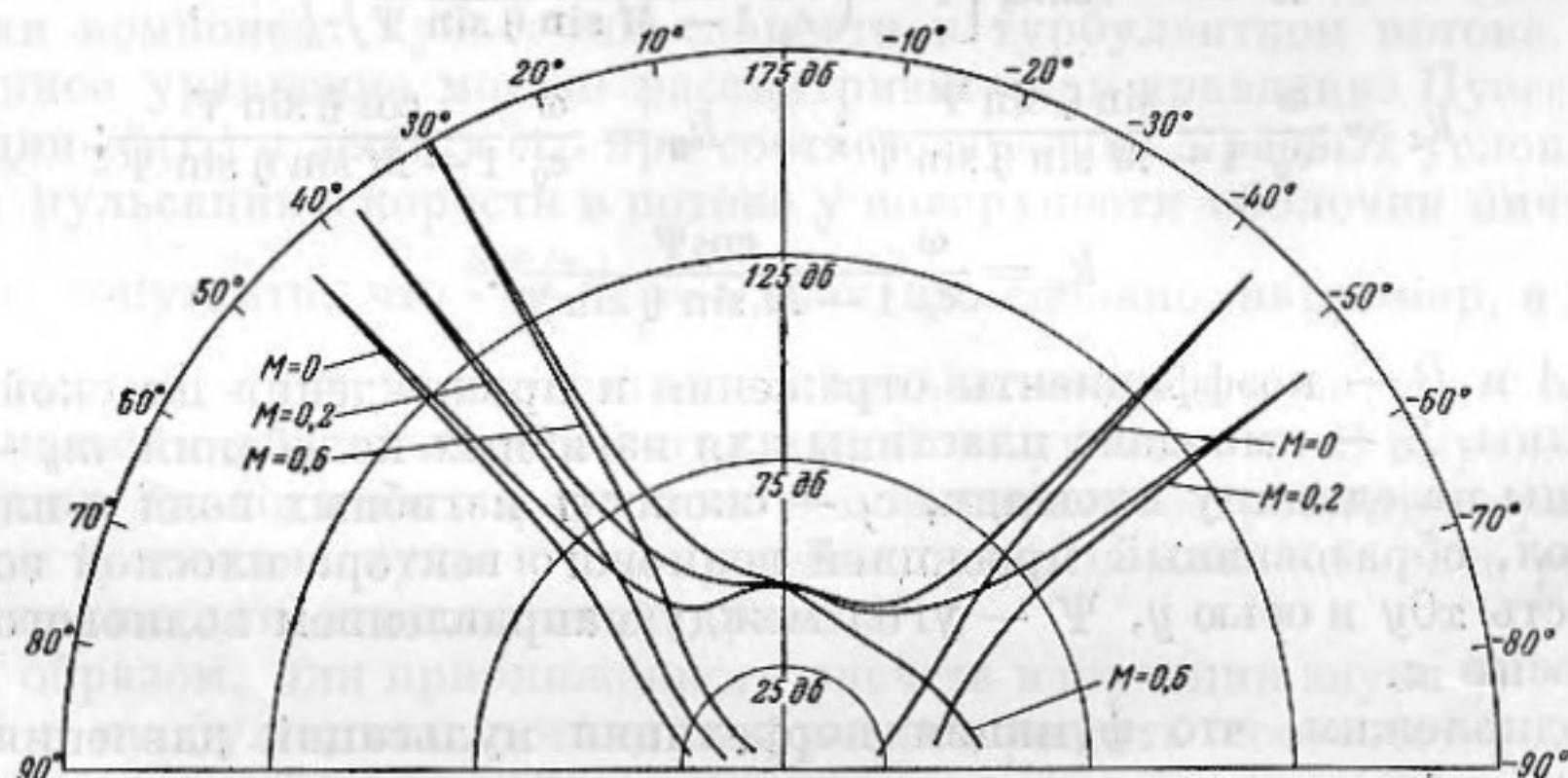
Подставляя в (13) выражения (14) и (15), принимая во внимание, что интервалы корреляции пульсаций давления a_0 и b_0 много меньше размеров пластины и s —площадь пластины, для средней квадратичной величины флюктуаций давления в поле излучения пластины получим

$$\begin{aligned} |p^{(1)}(\mathbf{r})|^2 &\approx \\ &\approx \frac{\omega^2 \cos^2 \theta \sin^2 \Psi F(\omega) a_0 b_0 S (1 - M \sin \theta \sin \Psi)^2}{\pi^2 R^2 \left\{ \omega^2 m_s^2 \left[1 - \left(\frac{c_f}{c_0} \frac{\sin \theta \sin \Psi}{1 - M \sin \theta \sin \Psi} \right)^4 \right]^2 \cos^2 \theta \sin^2 \Psi (1 - M \sin \theta \sin \Psi)^2 + 4 \rho_0^2 c_0^2 \right\}} \times \\ &\times \frac{1}{\left[(1 - M \sin \theta \sin \Psi)^2 + \frac{\omega^2}{c_0^2} \sin^2 \theta \sin^2 \Psi a_0^2 \right] \left[(1 - M \sin \theta \sin \Psi)^2 + \frac{\omega^2}{c_0^2} \cos^2 \Psi b_0^2 \right]} \end{aligned} \quad (16)$$

Рассмотрим излучение в плоскости xOy , т. е. когда $\sin \Psi = 1$, тогда из (15) следует

$$\begin{aligned} |p^{(1)}(\mathbf{r})|^2 &\approx \frac{\omega^2 \cos^2 \theta F(\omega) a_0 b_0 s}{\pi^2 R^2 \left\{ \omega^2 m_s^2 \left[1 - \left(\frac{c_f}{c_0} \frac{\sin \theta}{1 - M \sin \theta} \right)^4 \right]^2 \cos^2 \theta (1 - M \sin \theta)^2 + 4 \rho_0^2 c_0^2 \right\}} \times \\ &\times \frac{1}{\left[(1 - M \sin \theta)^2 + \frac{\omega}{c_0^2} \sin^2 \theta a_0^2 \right]} \end{aligned} \quad (17)$$

Анализируя выражение (17), можно прийти к заключению, что существует асимметрия в характеристике направленности излучения, так как при отрицательных θ знак перед выражением $M \sin \theta$ изменится на обрат-



ный. С увеличением скорости движения пластины число Маха возрастает, асимметрия увеличивается. В частности, при некоторых значениях скорости изгибных волн $c_f > c_0$ при положительных углах θ будет существовать максимум излучения, т. к. найдется такое значение θ_0^+ , когда

$$1 - \frac{c_f}{c_0} \frac{\sin \theta_0^+}{1 - M \sin \theta_0^+} = 0,$$

в то время как для отрицательных углов θ^- максимума излучения существовать не будет, так как $1 - \frac{c_f}{c_0} \frac{\sin \theta^-}{1 + M \sin \theta^-} > 0$. Излучение происходит в последнем случае в основном в направлении указанного максимума. На фигуре показаны угловые характеристики излучения для различных значений числа Маха, вычисленные на основании формулы (17) для стальной пластинки толщиной 0,4 см в воздухе и частоте колебаний $6 \cdot 10^3$ гц.

Выше мы рассмотрели подробно внешнюю задачу — акустическое излучение потока исследовалось в пространстве вне оболочки. Все полученные результаты применимы также к внутренней задаче, когда требуется определить поле излучения внутри оболочки. Решение (11) справедливо и в этом случае независимо от того, движется ли среда внутри оболочки или она покоится относительно выбранной системы координат, связанной с оболочкой. Для определения поля внутри оболочки следует найти решение вспомогательной дифракционной задачи, описывающее поле точечного источника, помещенного в ту точку пространства внутри оболочки, в которой требуется определить значение поля излучения. Если вспомогательное решение известно и известна соответствующая функция (тензор) корреляции пульсаций давления (скорости) в потоке, расчет, как и в случае внешней задачи, сводится к вычислению квадратур.

Остановимся еще на одном важном случае расчета поля излучения турбулентного потока. Речь будет идти о поле, излучаемом потоком в трубе. Пусть имеется труба, внутри которой течет газ или жидкость так, что поток является турбулентным, и требуется вычислить часть мощности излучения потока, уносимую с каждой нормальной волной, способной распространяться вдоль трубы-волновода. Пренебрегая существованием градиента средней скорости потока по сечению трубы и, как и выше, полагая, что статистическое звуковое поле, обусловленное турбулентными пульсациями давления и скорости в потоке, описывается уравнением (2), применим формулу Грина к статистическому полю внутри волновода $p(\mathbf{r})$ и вспомогательному регулярному полю нормальной волны единичной амплитуды $\tilde{p}_{mn}(\mathbf{r})$. Рассматривая область Ω в волноводе, ограниченную его стенками и сечениями, удаленными от источников статистического излучения, принимая во внимание сопряженность краевых условий на поверхности оболочки и самосопряженность оператора, соответствующего уравнению движения стенок волновода, запишем

$$(1 - M^2) \int_{s_I + s_{II}} \left[\frac{\partial}{\partial n} p(\mathbf{r}) \tilde{p}_{mn}(\mathbf{r}) - \frac{\partial}{\partial n} \tilde{p}_{mn}(\mathbf{r}) p(\mathbf{r}) \right] ds(\mathbf{r}) +$$

$$+ 2ikM \int_{s_I + s_{II}} p(\mathbf{r}) \tilde{p}_{mn}(\mathbf{r}) ds(\mathbf{r}) = \int_{\Omega} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} P_{ij}(\mathbf{r}) \tilde{p}_{mn}(\mathbf{r}) d\Omega(\mathbf{r}). \quad (18)$$

В сечениях волновода s_I, s_{II} статистическое поле может быть представлено в виде суперпозиции нормальных волн. Из-за ортогональности нормальных волн поверхностный интеграл будет отличным от нуля лишь для нормальной волны номера mn , которая содержится в статистическом поле в сечениях волновода и для вспомогательной нормальной волны того же номера mn , распространяющейся навстречу излучаемой волне. Предполагая статистические процессы однородными и принимая во внимание, что в случае $M < 1$ можно допустить $P_{ij}(\mathbf{r}) \simeq \simeq p^0(\mathbf{r}) \delta_{ij}$, получим для среднего квадратичного значения амплитуды нормальной волны статистического поля на основании (18)

$$|a_{mn}|^2 = \frac{1}{4|k_{mn}|^2} \iint_{\Omega} \tilde{p}_{mn}(\mathbf{r}') \tilde{p}_{mn}^*(\mathbf{r}'') \Delta^2 F(|\mathbf{r}' - \mathbf{r}''|) d\Omega(\mathbf{r}') d\Omega(\mathbf{r}''), \quad (19)$$

где $k_{mn} = (k_{x_{mn}}^- + k_{x_{mn}}^+) (1 - M^2) - 2kM$, $k = \omega/c$, $k_{x_{mn}}^+$, $k_{x_{mn}}^-$ — волновые числа для нормальной волны номера mn , соответствующие распространению волны в положительном направлении оси x (вдоль потока), в отрицательном направлении оси x (против потока), а $F(|\mathbf{r}' - \mathbf{r}''|) = \overline{p_0(\mathbf{r}') p_0^*(\mathbf{r}'')}$ — функция корреляции пульсаций давления в потоке.

В заключение отметим, что недавно Док [9] и Пауэлл [10] изучали излучение звука потоком при наличии тел в потоке. Пауэлл исследовал взаимодействие аэродинамического шума, излучаемого потоком, с плоской жесткой границей. Док ограничился исследованием излучения при наличии движущихся с потоком абсолютно мягких и жестких тел. Основные результаты этих работ могут быть получены в отдельных частных случаях на основании анализа решения (11) настоящей работы.

В ряде случаев могут представить интерес не только средние квадратичные величины характеристик поля в одной точке, но и средние значения произведений характеристик поля в двух различных точках пространства (например, корреляция амплитуд давлений в поле излучения). Эти величины могут быть выражены через вспомогательные дифракционные поля и для них могут быть получены формулы, аналогичные формулам (11) и (12). Полученные результаты могут быть обобщены в ряде случаев на случай статистических процессов с плавно изменяющимися пространственными и временными осредненными характеристиками, при этом следует исходить из соответствующих волновых уравнений и формулы Грина для этих уравнений.

Выражаю глубокую благодарность Л. М. Бреховских, В. С. Григорьеву, С. Н. Ржевкину и В. А. Красильникову за полезную дискуссию.

ЛИТЕРАТУРА

1. Д. И. Блохинцев. Акустика неоднородной движущейся среды. М.—Л., ОГИЗ ГТИ, 1946, стр. 43.
2. M. Lighthill. On sound generated aerodynamically. Proc. Roy. Soc., 1952, A211, 564; 1954, A222, 1.
3. А. М. Обухов. Пульсация давления в турбулентном потоке. Докл. АН СССР, 1949, 66, 17—20.
4. R. Kraichnan. Pressure fluctuations in turbulent flow over a flat plate. J. Acoust. Soc. America, 1956, 28, 378; Noise transmission from boundary layer pressure fluctuations. J. Acoust. Soc. America, 1957, 29, 65.
5. Л. М. Лямшев. К теории излучения звука тонкими упругими оболочками и пластинками. Акуст. ж. 1959, 5, 4, 420—427.
6. Л. М. Лямшев. К расчету акустического излучения турбулентного аэродинамического потока. Акуст. ж., 1960, 6, 4, 472—477.
7. J. Laufer. Investigation of turbulent flow in two-dimensional channel. NASA, 1951, Rep. 1053.
8. Л. М. Лямшев. Отражение звука от движущейся тонкой пластинки. Акуст. ж., 1960, 6, 4, 505—507.
9. P. Dok. Acoustic radiation from turbulent fluid containing foreign bodies. Proc. Roy. Soc., 1960, A254, 129—145.
10. A. Powell. Aerodynamic noise and the plane boundary. J. Acoust. Soc. America, 1960, 32, 982.

Акустический институт АН СССР
Москва

Поступила в редакцию
16 ноября 1960 г.