АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том VII 1961 Вып. 2

ОТРАЖЕНИЕ ПЛОСКИХ ВОЛН ОТ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ДЕФЕКТА

А. С. Голубев

Рассматривается отражение плоских продольных и поперечных волн, падающих на бесконечную цилиндрическую полость перпендикулярно к ее оси в изотропной упругой среде. Получены формулы, позволяющие рассчитать компоненты напряжения в рассеянной волне и оценить эффективность преобразования типа волн при рассеянии. Результаты вычислений проверены экспериментально. Приводится краткое сравнение отражающих свойств цилиндра и диска.

Решение проблемы определения характера и величины нарушений сплошности в изделиях, обнаруживаемых ультразвуковым дефектоскопом, требует знания особенностей отражения звука от дефектов различной формы. Отражение звука от полостей в виде диска и сферы применительно к этой цели было рассмотрено в лучевом приближении в работе [1]. Настоящая работа посвящена исследованию отражающих свойств цилиндрической полости. Цилиндром можно аппроксимировать дефекты, сильно развитые в одном направлении. Особый интерес представляет изучение этого типа отражателя ввиду его использования на практике в качестве эталонного дефекта.

В настоящее время наибольшее распространение получила дефектоскопия металлов. Поэтому, строго говоря, было необходимо решать задачу о дифракции звука на цилиндрической полости в упруго-неоднородной поликристаллической среде. В такой постановке решение задачи встречает большие математические трудности. Изучение рассеяния ультразвука в различных металлах показало, что многие поликристаллические материалы можно приближенно рассматривать как изотропные упругие среды [2]. Решению интересующей нас задачи в этом приближении посвящены работы [3—5]. Выражения для упругого смещения в рассеянной волне представляются в виде рядов с неизвестными коэффициентами. Даны формулы для расчета коэффициентов в случае падения продольной волны [3]. В настоящей работе получены формулы, позволяющие рассчитать поле рассеянных волн в случае падения поперечных волн, поляризованных перпендикулярно и параллельно оси цилиндра. Для случая падения продольных волн выражения для коэффициентов, полученные в работе [3], приведены к виду, более удобному для практических расчетов.

Если плоскую продольную волну, падающую на бесконечную цилиндрическую плоскость перпендикулярно к ее оси, задать скалярным потенциалом амплитуды Ψ_0

$$\psi = \Psi_0 e^{-i(\omega t - k_l x)},$$

где k_l — волновое число для продольных волн, то потенциалы рассеянных продольных и поперечных волн в цилиндрической системе координат $(r, \theta\ z)$ можно записать в виде [3]*

$$\psi^{\text{рас}} = \Psi_0 \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varepsilon_n i^n H_n(k_l r) \cos n\theta,$$

$$A_z^{\text{рас}} = \Psi_0 \sum_{n=0}^{\infty} b_n \varepsilon_n i^n H_n(k_l r) \sin n\theta, \tag{1}$$

* Временной множитель $e^{-i\omega t}$ здесь и далее для краткости записи опущен.

где A_z — составляющая векторного потенциала по оси z ($A_r = A_\theta = 0$), a_n и b_n — неизвестные коэффициенты, $\varepsilon = 1$ при $n = 0$ и $\varepsilon = 2$ при $n \geqslant 1$, $H_n(k_l r)$ и $H_n(k_t r)$ — функции Ганкеля первого рода порядка n, k_t — волновое число для поперечных волн. Значения неизвестных коэффициентов определяются из граничных условий, которые дают *

$$a_0 = -\frac{x_l \eta J_0(x_l) - 2J_1(x_l)}{x_l \eta H_0(x_l) - 2H_1(x_l)}; \quad a_n = -\frac{A_n J_n(x_l) + B_n J_{n-1}(x_l)}{A_n H_n(x_l) + B_n H_{n-1}(x_l)};$$

$$b_0 = 0; \quad b_n = -\frac{\chi_n [J_{n-1}(x_l) H_n(x_l) - J_n(x_l) H_{n-1}(x_l)]}{A_n H_n(x_l) + B_n H_{n-1}(x_l)};$$

где $A_n = \alpha_n H_n(x_l) + \beta_n H_{n-1}(x_l)$, $\quad B_n = \gamma_n H_n(x_t) + \delta_n H_{n-1}(x_t)$,

$$\alpha_n = n(n+1) x_l^2 \left\{1 + \left[1 - \frac{x_t^2}{2n(n+1)}\right]\right\}, \quad \beta_n = -x_l [2n(n^2-1) + x_t^2],$$

$$\gamma_n = -x_l [2n(n^2-1) + x_t^2], \quad \delta_n = 2(n^2-1) x_l x_t,$$

$$\chi_n = -n x_l [2(n^2-1) - x_t^2], \quad x_l = k_l a, \quad x_t = k_t a, \quad \eta = k_t^2 / k_l^2,$$

a — радиус цилиндра, $J_n(x_l)$ и $J_n(x_t)$ — функции Бесселя первого рода порядка n. При $k_l a \ll 1$, выражения для коэффициентов упрощаются:

$$a_0 \approx i \frac{\pi(\eta - 1)}{4} x_l^2, \quad a_1 \approx -i \frac{\pi}{8} x_l^2, \quad a_2 \approx i \frac{\pi}{4(\eta - 1)} x_l^2,$$

$$b_0 = 0, \quad b_1 \approx -i \frac{\pi \sqrt{\eta}}{8} x_l^2, \quad b_2 \approx i \frac{\pi}{4} \frac{\eta}{\eta - 1} x_l^2. \tag{2}$$

Коэффициентами, соответствующими $n \geqslant 3$, в этом случае можно пренебречь, так как, начиная с $n = 3$, они имеют величину, по крайней мере, на два порядка меньшую.

Нормальная и тангенциальная составляющие упругого напряжения в рассеянной волне в цилиндрической системе координат при условии $A_r = A_\theta = 0$ имеют вид [6]:

$$T_{rr} = -\lambda k_l^2 \psi + 2\mu \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + 2\mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 A_z}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial A_z}{\partial \theta}\right),$$

$$T_{r\theta} = 2\mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}\right) - 2\mu \left(\frac{k_t^2}{2} A_z + \frac{\partial^2 A_z}{\partial r^2}\right), \tag{3}$$

где λ и μ — постоянные Лямэ для среды.

Из выражений (3) видно, что поле рассеянной продольной волны вдали от цилиндра, в случае падения волны того же типа, в основном определяется радиальной составляющей напряжения. Для единичной амплитуды напряжения в падающей волне ($\Psi_0 = 1/\rho\omega^2$, где ρ — плотность среды), подставив (1) в (3) и заменив функции Ганкеля на их асимптотические выражения при $k_l r \gg 1$, мы получаем

$$T_{rr}^{\text{рас}} \approx \sqrt{\frac{2}{\pi k_l r}}\, e^{i k_l r} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varepsilon_n i^n e^{-i(2n+1)\pi/4} \cos n\theta. \tag{4}$$

---

* В работе [3] в выражениях для a_n и b_n, полученных в форме определителей, допущена опечатка.

Модуль комплексной амплитуды волны, отраженной в обратном направлении, определится из выражения (4) при $\theta = 180°$

$$|T_{\text{отр}}| \approx \sqrt{\frac{8}{\pi k_l r}} \left| a_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n (-1)^n \right|. \tag{5}$$

В случае падения поперечной волны, поляризованной перпендикулярно оси цилиндра, падающая волна в цилиндрической системе координат записывается в виде

$$A_z^{\text{пад}} = -A_0 \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n i^n J_n(k_l r) \cos n\theta,$$

где A_0 — амплитуда потенциала падающей волны. Выражения для рассеянных волн будут соответственно

$$A_z^{\text{рас}} = A_0 \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varepsilon_n i^n H_n(k_l r) \cos n\theta, \quad \psi^{\text{рас}} = A_0 \sum_{n=0}^{\infty} d_n \varepsilon_n i^n H_n(k_l r) \sin n\theta,$$

где c_n и d_n — неизвестные коэффициенты. Из граничных условий можно получить

$$c_0 = \frac{x_l J_0(x_l) - 2J_1(x_l)}{x_l H_0(x_l) - 2H_1(x_l)}; \quad c_n = \frac{C_n J_n(x_l) + D_n J_{n-1}(x_l)}{A_n H_n(x_l) + B_n H_{n-1}(x_l)};$$

$$d_0 = 0; \quad d_n = -\frac{\nu_n [J_{n-1}(x_l) H_n(x_l) - J_n(x_l) H_{n-1}(x_l)]}{A_n H_n(x_l) + B_n H_{n-1}(x_l)};$$

где

$$C_n = \alpha_n H_n(x_l) + \gamma_n H_{n-1}(x_l); \quad D_n = \beta_n H_n(x_l) + \delta_n H_{n-1}(x_l),$$

$$\nu_n = -n x_l [2(n^2 - 1) - x_l^2].$$

Для значений $k_l a \ll 1$

$$c_0 \approx i \frac{\pi}{32} x_l^4, \quad c_1 \approx i \frac{\pi}{8} x_l^2, \quad c_2 \approx -i \frac{\pi}{4} \frac{\eta}{\eta - 1} x_l^2,$$

$$d_0 = 0, \quad d_1 \approx -i \frac{\pi}{8\sqrt{\eta}} x_l^2, \quad d_2 \approx -i \frac{\pi}{4(\eta - 1)} x_l^2. \tag{6}$$

Поле рассеянной поперечной волны вдали от цилиндра при падении поперечной волны в основном определяется тангенциальной составляющей. При единичной амплитуде напряжения в падающей волне ($A_0 = 1/\rho\omega^2$)

$$T_{r\theta}^{\text{рас}} \approx \sqrt{\frac{2}{\pi k_l r}}\, e^{ik_l r} \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varepsilon_n i^n e^{-i(2n+1)\pi/4} \cos n\theta.$$

Для отраженной волны

$$|T_{\text{отр}}| \approx \sqrt{\frac{8}{\pi k_l r}} \left| c_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} c_n (-1)^n \right|. \tag{7}$$

В случае падения поперечной волны, поляризованной параллельно оси цилиндра, падающую волну удобно задать смещением, так как последнее имеет только одну составляющую по оси z.

$$u_z^{\text{пад}} = U_0 \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n i^n J_n(k_l r) \cos n\theta,$$

где U_0 — амплитуда смещения в падающей волне. Тогда рассеянная

волна будет

$$u_z^{\text{рас}} = U_0 \sum_{n=0}^{\infty} e_n \varepsilon_n i^n H_n(k_l r) \cos n\theta,$$

где e_n — неизвестные коэффициенты.

Из граничных условий находим

$$e_0 = -\frac{J_1(x_l)}{H_1(x_l)}; \quad e_n = -\frac{x_l J_{n-1}(x_l) - nJ_n(x_l)}{x_l H_{n-1}(x_l) - nH_n(x_l)};$$

и, при $k_l a \ll 1$: $e_0 \approx -i\frac{\pi}{4}x_l^2$, $e_1 \approx i\frac{\pi}{4}x_l^2$.

В этом случае можно пренебречь коэффициентами, начиная с $n = 2$.

Вдали от цилиндра, при единичной амплитуде напряжения в падающей волне ($U_0 = 1/ik_l\mu$) напряжение в рассеянной волне выразится так:

$$T_{rz}^{\text{рас}} \approx \sqrt{\frac{2}{\pi k_l r}}\, e^{ik_l r} \sum_{n=0}^{\infty} e_n \varepsilon_n i^n e^{-i(2n+1)\pi/4} \cos n\theta.$$

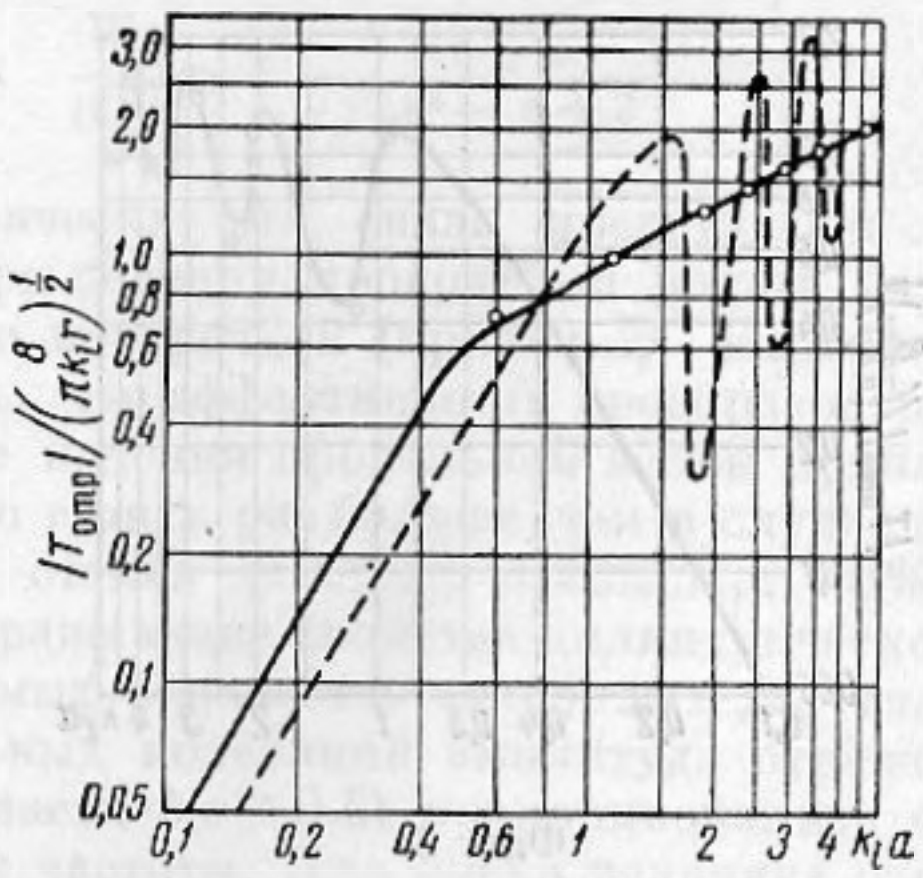
Напряжение в отраженной волне будет

$$|T_{\text{отр}}| \approx \sqrt{\frac{8}{\pi k_l r}} \left| e_0 + 2\sum_{n=1}^{\infty} e_n (-1)^n \right|. \tag{8}$$

На фиг. 1 сплошной линией показано изменение величины

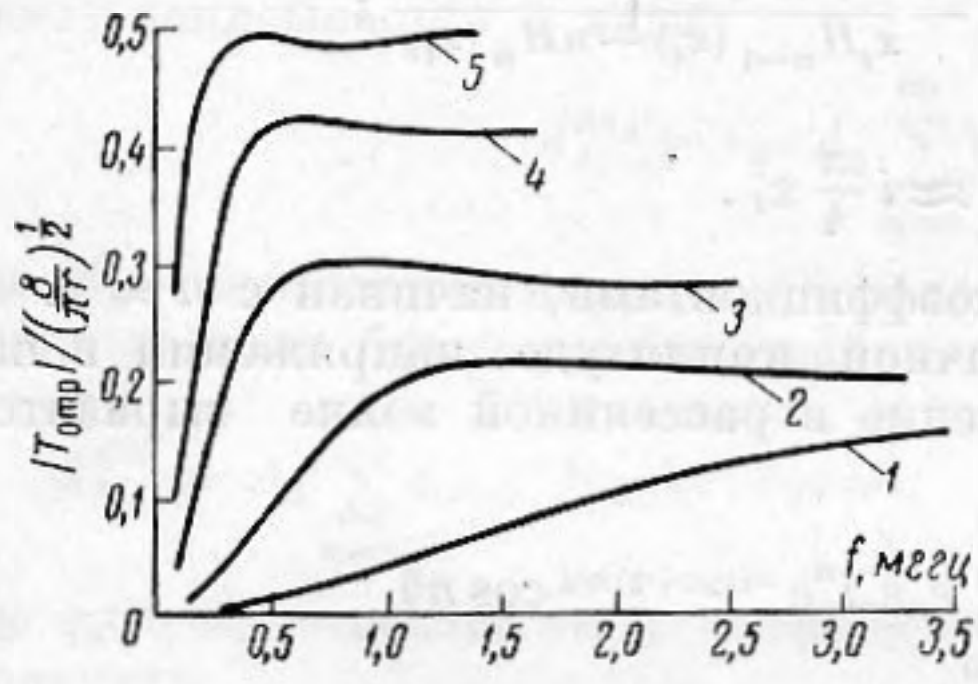
$$|T_{\text{отр}}| \Big/ \left(\frac{8}{\pi k_l r}\right)^{1/2}$$

в зависимости от $k_l a$, рассчитанной по (5) для стали ($c_l = 5{,}8 \cdot 10^5$ *см/сек*, $c_t = 3{,}14 \cdot 10^5$ *см/сек*). При вычислении рядов учитывалось количество членов, обеспечивающее точность расчета на хуже 5%. Для значений $ka = 5$ указанная точность требовала учета членов вплоть до $n = 10$. Пунктирной линией на фиг. 1 приведена та же зависимость, полученная без учета преобразования продольных волн в поперечные. Видно, что для описания рассеяния упругих волн на цилиндрической полости скалярное приближение (в отличие от случая дискового отражателя [7]) не дает удовлетворительных результатов. Из выражения (2) видно, что в случае падающей продольной волны определенной частоты, амплитуда отраженной волны при $k_l a \ll 1$ пропорциональна квадрату радиуса цилиндра. В области $k_l a > 0{,}5$ величина $|T_{\text{отр}}|$ связана с радиусом цилиндра приблизительно линейной зависимостью и практически не зависит от частоты. На фиг. 2 дана зависимость величины отраженного сигнала от частоты для нескольких значений радиуса цилиндра (*1* — $a = 0{,}2$ *мм*, *2* — $a = 0{,}5$ *мм*, *3* — $a = 1$ *мм*, *4* — $a = 2$ *мм* и *5* — $a = 3$ *мм*).



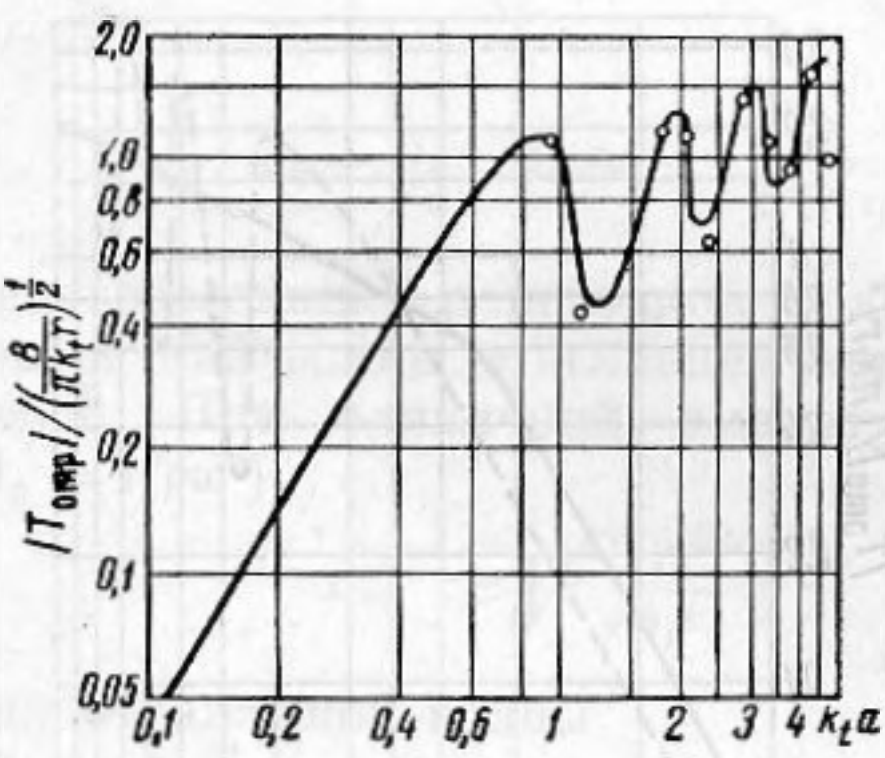
Фиг. 1

Для случая поперечной волны изменение величины $|T_{\text{отр}}| \Big/ \left(\frac{8}{\pi k_t r}\right)^{1/2}$, рассчитанное по (7) и (8), приведено на фиг. 3 и фиг. 4. Здесь при малых $k_t a$ величина $|T_{\text{отр}}|$ так же пропорциональна a^2. В области $k_t a > 0{,}5$ изменение величины отраженной волны в зависимости от $k_t a$ имеет четко выраженный осциллирующий характер. Этот факт в данном случае делает невозможным применение цилиндрических отверстий в качестве эталонных дефектов.

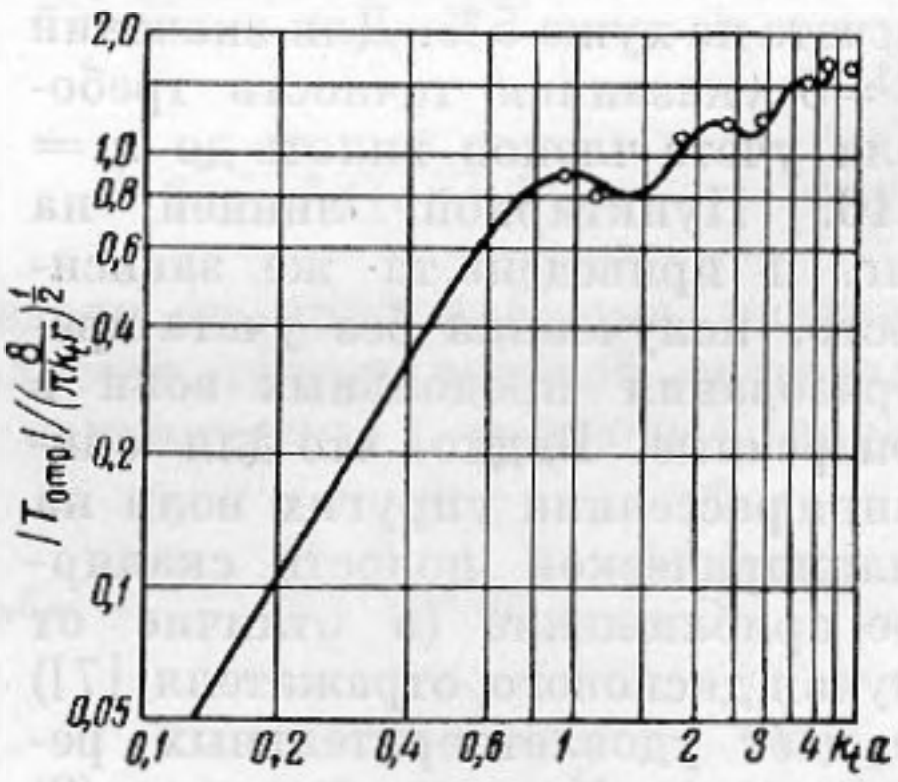


Фиг. 2

Расчитанные зависимости были проверены экспериментально. Использовалась специально разработанная аппаратура, основанная на импульсном эхо-методе. Для возбуждения преобразователя применялись высокочастотные импульсы приблизительно прямоугольной формы. Отраженные сигналы усиливались широкополосным усилителем, с линейной амплитудной характеристикой. Эксперимент состоял в сравнении при помощи калиброванного аттенюатора величин импульсов, отраженных от цилиндрических отверстий разных диаметров на нескольких частотах (1,0; 1,5 и 2,5 *мггц*). Длина отверстий выбиралась больше ширины ультразвукового пучка при отсутствии касания пучка стенок образца. В качестве преобразователей использовались пьезокварцевые пластинки X-среза для работы с продольными волнами и Y-среза — с поперечными. В последнем случае преобразователь приклеивался к образцу эпоксидной смолой ЭД-5 без отвердителя. Измерения проводились в области $r \approx 0{,}25\, d^2/\Lambda$ (где d — диаметр преобразователя, Λ — длина волны) и в дальней зоне



Фиг. 3



Фиг 4.

преобразователя. После введения поправок на интерференционные явления в обоих случаях были получены совпадающие результаты. Экспериментальные данные нанесены на соответствующие кривые точками.

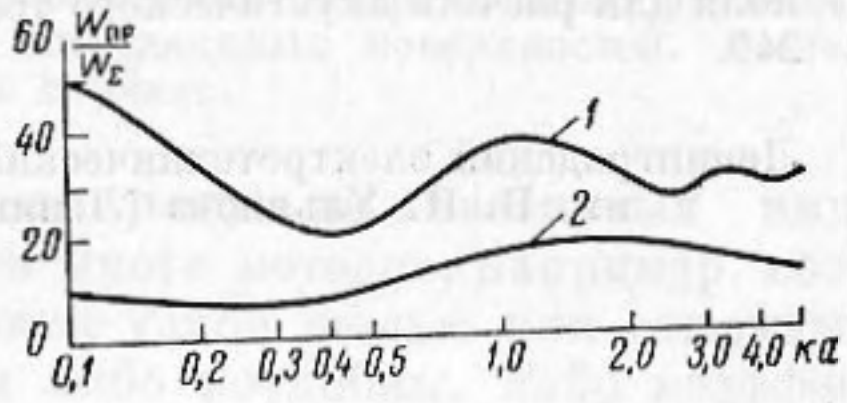
Обычно при работе ультразвукового дефектоскопа фиксируется рассеянная волна того же типа, что и падающая. Энергия, рассеянная цилиндром в виде волн другого типа, возникших в результате преобразования на его поверхности, не воспринимается преобразователем и, следовательно, теряется. Поэтому представляет интерес количественно оценить это пре-

образование. Для вычислений воспользуемся выражениями, приведенными в работе [5] для эквивалентных рассеивающих площадей, преобразовав их применительно к нашему изложению. Для случая падающей продольной волны получим

$$\frac{W_l}{W_\Sigma^{(l)}} = \frac{2\sum\limits_{n=1}^{\infty} |b_n|^2}{a_0 + 2\sum\limits_{n=1}^{\infty} (|a_n|^2 + |b_n|^2)}, \tag{9}$$

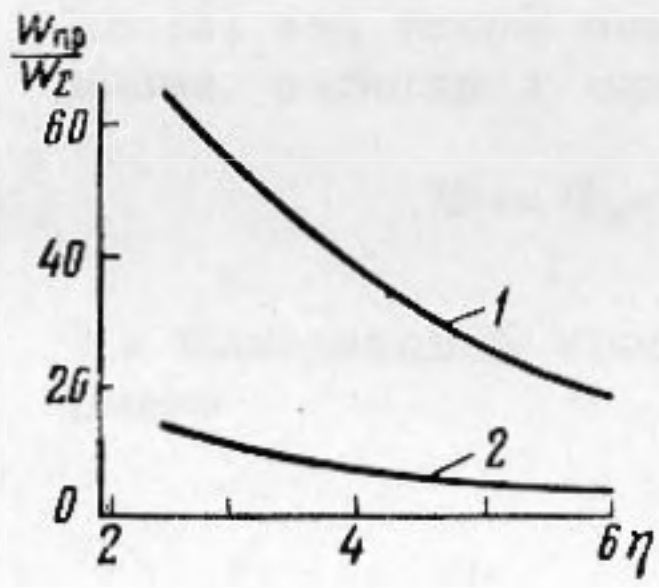
где W_l — энергия, рассеянная единицей длины цилиндра в одну секунду в виде поперечных волн, W_Σ^l — суммарная энергия, рассеянная единицей длины цилиндра в одну секунду при падении продольной волны. В случае падения поперечной волны

$$\frac{W_t}{W_\Sigma^{(t)}} = \frac{2\sum\limits_{n=1}^{\infty} |d_n|^2}{c_0 + 2\sum\limits_{n=1}^{\infty} (|c_n|^2 + |d_n|^2)}. \tag{10}$$



Фиг. 5

Рассчитанные по формулам (9) и (10) зависимости приведены на фиг. 5, где кривая *1* соответствует падению продольной волны, *2* — поперечной. Видно, что преобразование типа волн происходит довольно эффективно. Этим, по-видимому, и объясняется недостаточность скалярного приближения при рассмотрении рассеяния звука на цилиндре. При $ka \ll 1$ можно получить связь эффективности преобразования с упругими свойствами среды. Подставляя выражения (9) и (10), приближенные выражения для коэффициентов из (2) и (6), получаем



Фиг. 6

$$\frac{W_l}{W_\varepsilon^{(l)}} \approx \frac{\eta(\eta+1)^2}{2(\eta-1)^4 + \eta(\eta+1)^2 + 4};$$

$$\frac{W_t}{W_\Sigma^{(t)}} \approx 1 - \frac{\eta+2}{5\eta^2 - \eta + 3}.$$

Графически эта связь представлена на фиг. 6 при падении продольной волны (кривая *1*) и поперечной (кривая *2*). Интересно отметить, что эффективность преобразования в случае падения продольной волны приблизительно в пять раз больше, чем в случае падения поперечной, и, например, для стекла ($\eta \approx 2{,}5$) превышает 60%.

Представляет интерес сравнить отражающие свойства цилиндрического и дискового отражателей, используемых в качестве эталонных дефектов. Например, при применении продольных колебаний амплитуда отраженной волны вдали от цилиндра (в области $k_l a > 0{,}5$) пропорциональна его радиусу и практически не зависит от частоты. Для диска величина отраженной волны связана с его радиусом квадратичной зависимостью и обратно пропорциональна длине волны. Ослабление упругого напряжения в волне с расстоянием при отражении от цилиндра происходит по закону $r^{-1/2}$ при отражении от диска — пропорционально r^{-1}. Как видно, отражающие свойства цилиндра и диска существенно отличаются, что необходимо учитывать при эталонировании дефектов.

В заключение приношу глубокую благодарность Л. Г. Меркулову за постоянное внимание к данной работе и обсуждение полученных результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. Н. Машарский. Исследование однородности изделий ультразвуковым методом (канд. диссертация). Ленинградский электротехнический институт им. В. И. Ульянова (Ленина), 1953.
2. Л. Г. Меркулов. Исследование рассеяния ультразвука в металлах. Ж. техн. физ., 1956, **26**, 1, 64—75.
3. В. В. Тютекин. Рассеяние плоских волн цилиндрической полостью в изотропной упругой среде. Акуст. ж., 1959, **5**, 1, 106—110.
4. L. Filipczyński. The reflection of plane elastic waves from a cylinder with a free surface. Proceedings of the II conference on ultrasonics. Polish academy of sciences. Warszawa, 1957.
5. R. M. White. Elastic wave scattering at the cylindrical discontinuity in a solid. J. Acoust. Soc. America, 1958, **30**, 8, 771—785.
6. Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц. Механика сплошных сред. М., ГИТТЛ, 1953.
7. И. Н. Ермолов. О возможности применения теории скалярного звукового поля для расчета акустического тракта дефектоскопа. Акуст. ж., 1959, **5**, 2, 247—249.

Ленинградский электротехнический институт
им. В. И. Ульянова (Ленина)

Поступила в редакцию
6 сентября 1960 г.