АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том VII 1961 Вып. 2

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ АКУСТИЧЕСКИХ ТЕЧЕНИЙ У НАГРЕТЫХ ТВЕРДЫХ ТЕЛ К ЧАСТНЫМ СЛУЧАЯМ

П. Н. Кубанский

При помощи теории акустических течений у нагретых твердых тел изучен случай теплоотдачи от нагретого горизонтального цилиндра, помещенного в стоячую акустическую волну, к воздуху. Показано, что решение, основанное на принципе суперпозиции, удовлетворительно совпадает с экспериментальными данными в пределах параметров, охваченных опытом.

Применим теорию акустических течений у нагретых твердых тел к случаю акустических течений, обладающих осевой симметрией, искажаемой конвективными потоками. Эти течения визуально наблюдались и были сфотографированы. Например, был опубликован случай искаженного конвекцией осесимметричного акустического течения у нагретого горизонтального цилиндра [1]. Осесимметричные акустические течения у стенок ненагретого горизонтального цилиндра уже были рассчитаны ранее в теоретической работе [2]. Было также экспериментально изучено влияние этих течений на конвективный теплообмен [3].

Если для акустических и конвективных потоков применим принцип суперпозиции, то расчеты значительно сокращаются, так как вычисления, связанные с решением уравнений движения, делаются излишними. Все величины, характеризующие гидродинамическую сторону явлений, получаются из выражений, уже известных порознь для каждого вида движения, и используются при составлении уравнения теплопроводности. Величины, определяющие тепловую сторону явлений, вычисляются из уравнения теплопроводности, решаемого методом последовательных приближений, который обеспечивает достаточную точность для технических расчетов уже при первом приближении.

Исходя из принципа суперпозиции для функции тока общего течения, в рассматриваемом случае можно написать:

$$\psi = \psi_c + \psi_2 = \nu \cdot f(\varphi) \cdot \mathrm{Gr}'^{1/4} \cdot p(q) + \frac{kP_0^2}{16\nu m^3 c^2 \rho^2} \sin 2kz \left[Ar + Br^3 + \frac{c}{r} - \right.$$
$$\left. - e^{-mh}\left(3\cos mh + \sin mh + \frac{1}{2} e^{-mh}\right)\right]. \qquad (1)$$

Для радиальной компоненты общей скорости можно составить следующее выражение:

$$v_r = -\frac{\nu}{r_0}\left(\frac{\mathrm{Gr}}{8}\right)^{1/4}\left[f'(\varphi)\cdot p(q) + \frac{f(\varphi)\cdot g'(\varphi)}{g(\varphi)}\cdot qp'(q)\right] +$$
$$+ \frac{kP_0^2}{8\nu m^3 c^2 \rho^2}\cos 2kz\left[-Ar - Br^3 - \frac{C}{r} + e^{-mh}\left(3\cos mh + \sin mh + \frac{1}{2}e^{-mh}\right)\right],$$

и для аксиальной компоненты выражение

$$v_z = \frac{\nu}{r_0}\left(\frac{\mathrm{Gr}}{8}\right)^{1/2} f(\varphi)\cdot g(\varphi)\cdot p'(q) +$$
$$+ \frac{kP_0^2}{16\nu m^3 c^2 \rho^2}\sin 2kz\left\{2A + 4Br^2 - e^{-mh}\left[\left(2m + \frac{3}{r}\right)\cos mh + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \left(4m + \frac{1}{r}\right)\sin mh + \left(m + \frac{1}{2r}\right)e^{-mh}\right]\right\}. \qquad (2)$$

Значения для функций тока ψ_2 и ψ_c в уравнении (1) и компонентов векторов скоростей $\mathbf{v}_2$ и $\mathbf{v}_c$ в уравнении (2) взяты в готовом виде из работ [2, 4]. Все нижеперечисленные, входящие в формулы, функции $f(\varphi)$; $f'(\varphi)$; $g(\varphi)$; $g'(\varphi)$; $p(q)$; $p'(q)$ уже вычислены Польгаузеном и Германом [4,5] для различных значений $\varphi = S/r_0$ и $q = \frac{h}{r_0}\left(\frac{\mathrm{Gr}}{8}\right)^{1/4} \cdot g(\varphi)$, где r_0 — радиус цилиндра, $h = r - r_0$ — расстояние по нормали от рассматриваемой точки до стенки цилиндра, S—длина дуги по направляющей абсолютно твердого бесконечно длинного цилиндра, отсчитываемая от нижней образующей.

Следует иметь в виду, что Герман [4] в выражении для ψ_c использует критерий Грасгофа Gr′, в котором в качестве определяющего размера введен радиус цилиндра r_0. В формулы для компонентов вектора скорости $\mathbf{v}_c$ входит критерий Грасгофа Gr, причем за определяющий размер принят диаметр цилиндра d_0. Следовательно, $\mathrm{Gr} = 8\mathrm{Gr}'$.

Напомним обозначения остальных величин, входящих в формулы: ν — кинематическая вязкость, ρ — плотность воздуха, P_0 — амплитуда звукового давления, c — скорость звука, $k = \omega/c$ — волновое число, $m = \sqrt{\omega/2\nu}$, z — координата, направленная вдоль оси горизонтального цилиндра, A, B и C — постоянные интегрирования, численные значения которых уже известны [2].

Уравнение теплопроводности нелинейно относительно искомой функции и ее производных, поэтому к температурам и их градиентам принцип суперпозиции может быть применен условно с тем, чтобы в дальнейшем подтвердить допустимость этого путем сравнения результатов теоретических расчетов с экспериментальными данными.

Чтобы рассчитать распределение средних по времени температур и температурных градиентов в окрестности нагретого цилиндра, воспользуемся формулами:

$$\left.\begin{aligned} t_f &= t_{f_0} + t_{f_1} + t_{f_2}, \\ \frac{\partial t_f}{\partial n} &= \frac{\partial t_{f_0}}{\partial n} + \frac{\partial t_{f_1}}{\partial n} + \frac{\partial t_{f_2}}{\partial n}. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Здесь величины t_{f_0} и $\partial t_{f_0}/\partial n$ определяются только явлением естественной конвекции и могут быть вычислены по формулам Германа [4]. Члены t_{f_1} и $\partial t_{f_1}/\partial n$ зависят от колебательной скорости в акустическом поле и равны нулю, так как колебательная скорость на распределение средних по времени температур не влияет. Последние члены рядов t_{f_2} и $\partial t_{f_2}/\partial n$ зависят от действия на температурное поле акустического течения. Для вычисления этих величин применим уравнение теплопроводности в виде

$$\Delta t_{f_2} = \frac{v_r'}{a}\,\mathrm{grad}\,(t_{f_0} + t_{f_1}). \tag{4}$$

В правую часть уравнения (4) подставим радиальную компоненту скорости акустического течения из [2]:

$$v_r' = \frac{-k^2P_0^2}{8\nu m^3c^2\rho^2}\cos 2kz \times$$
$$\times\left[Ar + Br^3 + \frac{C}{r} - e^{-mh}\left(3\cos mh + \sin mh + \frac{1}{2}e^{-mh}\right)\right]. \tag{5}$$

Член, содержащий e^{-mh}, заметно отличается от нуля только вблизи стенки цилиндра, когда $h = r - r_0$ очень мало. Для всей остальной области, а именно при $h > 1/m$, он очень мал и им можно пренебречь. О том, что такое допущение вносит только незначительную ошибку, можно судить по следующему численному примеру. При частоте колебаний $f = 17$ *кгц*, при

которой применявшийся в опытах [1] вибратор развивал наибольшую мощность, если кинематическая вязкость воздуха $\nu = 20 \cdot 10^{-6}$ $м^2/сек$, получим значение $1/m = 0{,}099$ *мм*. Член e^{-mh} $(3\cos mh + \sin mh + {}^1/_2 e^{-mh})$, входящий в выражение (5), на расстоянии $h = 0{,}02$ *мм* от стенки цилиндра, равен величине 0,91, на расстоянии $h = 0{,}05$ *мм* — 0,235 и на расстоянии $h = 0{,}1$ *мм* — 0,0173. Следовательно, уже на расстоянии $h = 0{,}1$ *мм* от стенки цилиндра величина интересующего нас члена уменьшится в 52,7 раза по сравнению с его значением при $h = 1/m$. Обозначим расстояние от оси цилиндра до той границы, на которой значение члена, содержащего e^{-mh}, будет достаточно мало, через r_1. В правую часть уравнения (4) подставим также значение радиального градиента температуры $\partial t_{f_0}/\partial r$. Так как для процесса теплоотдачи имеет значение только нормальный градиент температуры, то ее градиентами в направлениях φ и z будем пренебрегать. Учитывая сделанные допущения, представим уравнение теплопроводности (4) в следующем виде:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial t_{f_2}}{\partial r}\right) = -\frac{k^2 P_0^2 t_w}{8a\nu m^3 c^2 \rho^2 r_0}\,\mathrm{Gr}'^{1/4}\cdot g(\varphi)\left(Ar + Br^3 + \frac{C}{r}\right)t'(q)\cos 2kz. \qquad (6)$$

После интегрирования получим значение радиального градиента температуры:

$$\frac{\partial t_{f_2}}{\partial r} = -\frac{k^2 P_0^2 t_w}{8a\nu m^3 c^2 \rho^2 r_0}\,\mathrm{Gr}'^{1/4}\cdot g(\varphi)\cos 2kz\cdot\frac{1}{r}\int(Ar^2 + Br^4 + c)\,t'(q)\,dr + C_1. \qquad (7)$$

Потребуем, чтобы на бесконечности при $r = \infty$ градиент температуры был равен нулю. Тогда постоянной c_1, появившейся после интегрирования правой стороны уравнения, нужно будет придать следующее значение:

$$C_1 = \frac{k^2 P_0^2 t_w}{8a\nu m^3 c^2 \rho^2 r_0}\,\mathrm{Gr}'^{1/4}\,g(\varphi)\cdot\cos 2kz\cdot\frac{1}{r}\int(Ar^2 + Br^4)\,t'(q)\,dr. \qquad (8)$$

Подстановка в выражение (7) этого значения C_1 исключает члены, содержащие r^2 и r^4, и мы получим

$$\frac{\partial t_{f_2}}{\partial r} = -\frac{k^2 P_0^2 t_w}{8a\nu m^3 c^2 \rho^2 r_0}\,\mathrm{Gr}'^{1/4}\,g(\varphi)\cos 2kz\cdot\frac{1}{r}\int Ct'(q)\,dr. \qquad (9)$$

Для вычисления коэффициента теплоотдачи необходимо знать значение нормального градиента на стенке цилиндра. Сделанное ранее упрощение, заключающееся в пренебрежении членом уравнения (5), содержащим e^{-mh}, не позволяет использовать выражение (9) для области $r < r_1$.

Нормальный температурный градиент у стенки цилиндра на границе, где значение члена уравнения (5), содержащего e^{-mh}, мало, будет равен

$$\left(\frac{\partial t_{f_2}}{\partial r}\right)_{r=r_1} = -\frac{k^2 P_0^2 t_w}{8a\nu m^3 c^2 \rho^2 r_0}\,\mathrm{Gr}'^{1/4}\,g(\varphi)\cdot\cos 2kz\cdot\frac{1}{r_1}\int_0^{r_1} Ct'(q)\,dr. \qquad (10)$$

Это значение температурного градиента мы используем в дальнейшем для вычисления коэффициента теплоотдачи. Замена температурного градиента на стенке цилиндра градиентом на границе $r = r_1$ допустима, что будет в дальнейшем обосновано сравнением полученных расчетом результатов с экспериментальными данными [1].

Полное значение температурного градиента, согласно (3), для рассматриваемого случая будет равно

$$\frac{\partial t_f}{\partial r} = t_w\left[t'(q) - \frac{k^2 P_0^2}{8a\nu m^3 c^2 \rho^2 r_0}\,\mathrm{Gr}'^{1/4}\,g(\varphi)\cdot\cos 2kz\,\frac{1}{r}\int Ct'(q)\,dr\right]. \qquad (11)$$

Для вычисления распределения температур необходимо проинтегрировать выражение для градиента, после чего появится постоянная C_2, которая может быть определена из условия на стенке: при $r = r_0$, $t_f = t_w$.

Тогда получим

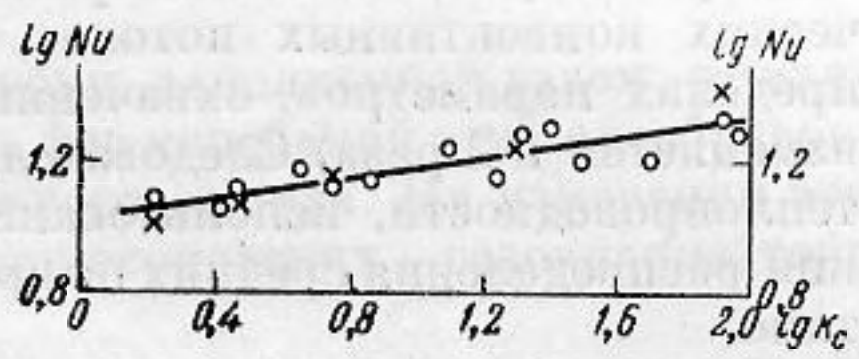
$$t_f = t_w \cdot t(q) - \frac{k^2 P_0^2 t_w}{8a\nu m^3 c^2 \rho^2 r_0} \mathrm{Gr}'^{1/4} \cdot g(\varphi) \cdot \cos 2kz \times$$

$$\times \left[\int \frac{1}{r} \int Ct'(q)\, dr^2 - \int_0^{r_1} \frac{1}{r} \int_0^{r_1} Ct'(q) dr^2 \right]. \qquad (12)$$

Значение функции $t(q)$ на стенке цилиндра равно единице [5].

Функция $t'(q)$ задана в виде таблицы и графика в [5].

По формуле (1) могут быть построены линии тока акустического течения у нагретого цилиндра, а по формуле (12) — изотермы в выбранной плоскости, проходящей через ось нагретого цилиндра, а также в плоскости, нормальной к оси бесконечного цилиндра.



Так как радиальный градиент температуры для всех r и $\varphi = S/r_0$ известен, то может быть вычислен локальный и средний коэффициенты теплоотдачи от стенки цилиндра к газообразной среде. Может быть получено для любых заданных условий среднее значение критерия Нуссельта. Оно может быть определено по формуле:

$$\overline{Nu} = \overline{Nu}_0 + \overline{Nu}_1 + \overline{Nu}_2, \qquad (13)$$

так как уравнение теплообмена на границе твердого тела линейно относительно искомой функции. Здесь $\overline{Nu}_0$ — значение критерия Нуссельта, которое определяется только явлением естественной конвекции. Для нахождения $\overline{Nu}_0$ применима известная из технической литературы [6] формула:

$$\overline{Nu}_0 = c\,(\mathrm{Gr} \cdot Pr)^n, \qquad (14)$$

причем постоянные c и n являются функциями произведения критериев $\mathrm{Gr} \cdot Pr$. Для этой цели могут быть использованы так же исследования Германа [4]. $\overline{Nu}_1$ определяется влиянием на конвективный теплообмен колебательной скорости и, следовательно, $\overline{Nu}_1 = 0$. $\overline{Nu}_2$ зависит от акустического течения и вычисляется по температурному градиенту у стенки цилиндра на границе, данному уравнением (10).

Для расчета величины $\overline{Nu}_2$ получим следующую формулу:

$$\overline{Nu}_2 = -\frac{d_0}{\pi\lambda\,(t_w - t_{f\infty})} \cdot \frac{k^2 P_0^2 t_w}{a\nu m^3 c^2 \rho^2 r_0} \cdot \mathrm{Gr}'^{1/4} \int_0^{\pi} g(\varphi)\, d\varphi \times$$

$$\times \int_0^{\frac{\lambda}{8}} \cos 2kz\, dz \cdot \frac{C}{r_1} \int_0^{r_1} t'(q)\, dr. \qquad (15)$$

Если полученные формулы использовать для вычисления критериев $\overline{Nu}$ по результатам ранее проведенных автором статьи экспериментов [1, 3], то обнаруживается довольно близкое совпадение теоретических расчетов с данными опытов. Это можно видеть из приведенного графика. Здесь нанесена кривая, отвечающая обобщенной формуле

$Nu_m = 10\,(K_c)_m^{0,15}$, полученной по ранее проведенным экспериментам, опубликованным в работах [1, 3]. Крестиками отмечены результаты расчетов по формулам (13), (14), (15).

В обобщенную формулу входит критерий подобия k_c, выведенный в работе [3] и представляющий собой отношение градиента модуля давления акустической радиации к подъемной силе единицы объема жидкости. При вычислении экспериментальных значений критериев подобия $(k_c)_m$ и Nu_m, входящих в обобщенную формулу, в качестве определяющей температуры была принята средняя температура пограничного слоя $t_m = \frac{1}{2}(t_w + t_{f_\infty})$.

Так как исследования Шмидта и Бекмана [5], а также Германа [4] справедливы только для газообразной среды, все полученные теоретические формулы нельзя применить к капельножидким средам.

Рассмотренный конкретный пример показывает, что метод расчета, в основу которого положен принцип суперпозиции акустических и термических конвективных потоков, дает удовлетворительные результаты в пределах параметров, охваченных опытом (k_c изменяется в 60 раз, Nu_m изменяется в 2 раза). Следовательно, несмотря на нелинейность уравнения теплопроводности, использование принципа суперпозиции, при вычислении распределения средних по времени температур и их градиентов, допустимо.

Пренебрежение в выражении для нормальной компоненты скорости членом, содержащим e^{-mh}, а также замена нормального температурного градиента на стенке градиентом на границе $r - r_1$, где $r_1 \approx r_0$ — также оказались допустимыми. Это означает, что тангенциальный тепловой поток в слое $r_1 - r_0$ был пренебрежимо мал по сравнению со всей теплоотдачей.

В проведенных опытах, с которыми сравниваются теоретические расчеты, амплитуда акустических колебаний в воздухе составляла максимально величину 0,025 *мм*, т. е. примерно 0,001 диаметра цилиндра при длине волны $\lambda = 20$ *мм*. В этом случае акустическое поле еще может быть описано линейным волновым уравнением и для вычисления скоростей акустического течения можно пользоваться существующими теориями.

ЛИТЕРАТУРА

1. П. Н. Кубанский. Течение у нагретого твердого тела в стоячей акустической волне. Докл. АН СССР, 1952, 82, 4, 585—588; Ж. техн. физ., 1952, 22, 4, 585—592.
2. П. Н. Кубанский. Осесимметричное акустическое течение у стенок цилиндра. Ж. техн. физ., 1957, 27, 6, 1272—1275.
3. П. Н. Кубанский. Влияние акустических течений на процесс конвективного теплообмена. Акуст. ж., 1959, 5, 1, 51—57.
4. R. Hermann. Wärmeübergang bei freier Strömung am waagerechten Zylinder in zweiatomigen Gasen. VDI Forschungsheft., 1936, 7, 379, 1—24.
5. E. Schmidt, W. Beckmann. Das Temperatur und Geschwindigkeitsfelds vor einer Wärme abgebenden senkrechten Platte bei natürlicher Konvektion. Techn. Mech. u. Thermodynamik, 1930, 1, 11, 391—406.
6. М. А. Михеев. Основы теплопередачи. М.— Л., Госэнергоиздат, 1956.

Ленинградский технологический институт

Поступила в редакцию
23 марта 1960 г.