4. Л. Д. Розенберг, В. Ф. Казанцев. О физике ультразвуковой обработки. Докл. АН СССР, 1959, 124, 1, 79—82.
5. Н. М. Ростовцев. О роли кавитации при ультразвуковой обработке твердых тел. Докл. АН СССР, 1959, 127, 6, 1210—1212.
6. Н. А. Рой. Возникновение и протекание ультразвуковой кавитации. Обзор. Акуст. ж., 1957, 3, 1, 3—18.
7. Н. М. Ростовцев. Зависимость скорости ультразвуковой обработки материалов от температуры суспензии. Рефер. докл. на IX Всерос. науч. конфер. по прим. ультразвука к исслед. вещества 31. 1—4. П. 1961, МОПИ.
8. G. E. Miller. Special theory of ultrasonic machining. J. Appl. Phys., 1957, 28, 2, 149—161.

Акустический институт АН СССР
Москва

Поступило в редакцию
25 февраля 1961 г.

СКОРОСТЬ ЗВУКА В СМЕСЯХ, СОДЕРЖАЩИХ ВЗВЕШЕННЫЕ ЧАСТИЦЫ

Я. З. Клейман

При изучении смесей, содержащих дискретные частицы (жидкие, твердые или газообразные), обычно предполагается, что основная среда-носитель подчиняется уравнениям движения сплошных сред, а на частицы действуют только массовые силы и сила сопротивления со стороны основной среды. Такое рассмотрение в лучшем случае позволяет приблизительно учесть обмен импульсом между частицей и средой, но не дает возможности учесть передачу импульса от одной частицы к другой. Очевидно, что этот метод пригоден для достаточно «разведенных систем» (по терминологии работы [1]), т. е. для таких смесей, в которых расстояния между частицами весьма велики, и передача импульса от частицы к частице незначительна. Это означает, что при определенных размерах частиц их объемная концентрация в смеси должна быть весьма мала. Чем мельче частицы в изотропной смеси, тем меньше их допустимая концентрация *.

Для исследования систем с любыми объемными концентрациями необходимо учитывать, что, в связи с градиентом давления в смеси, имеет место обмен импульсом между частицами, хотя и не столь полный, как в случае сплошных сред. Можно воспользоваться уравнениями Рахматулина [2], вводя в члены, содержащие $\partial p/\partial x$ коэффициенты η_n полноты передачи импульса. Случай $\eta_n = 0$ соответствует достаточно разведенным системам **, а случай $\eta_n \to 1$ соответствует настолько большой концентрации частиц, что они фактически образуют сплошную пористую среду. Таким образом, для всех случаев $0 \leqslant \eta_n \leqslant 1$.

Случай «равноправных» сплошных взаимопроникающих сред ($\eta_n = 1$) рассмотрен в работе [3]. Цель данной статьи — показать, что неполнота передачи импульса между частицами является причиной некоторых особенностей распространения волн***, в частности, причиной существования экстремума скорости звука в смеси при изменении объемной концентрации ее компонент.

Рассмотрим смесь, состоящую из N сплошных и дискретных сред. Система уравнений, описывающая движение такой смеси с учетом неполноты передачи импульса в некоторых компонентах, в общем случае имеет вид (обозначения те же, что в работе [3]):

$$\frac{d\mathbf{V}_n}{dt} = \mathbf{F}_n - \frac{\eta_n}{\rho_n^0}\nabla p + \frac{1}{\rho_n}\sum_{j=1}^{N} K_{jn}(\mathbf{V}_j - \mathbf{V}_n), \quad (n = 1, \ldots, N).$$

$$\frac{d\rho_n}{dt} + \rho_n \operatorname{div} \mathbf{V}_n = 0, \quad p = f_n(\rho_n^0, \rho_H^{\,n}, \rho_{Hn}^0), \quad \sum_{n=1}^{N} \frac{\rho_n}{\rho_n^0} = 1.$$

В соответствии со сказанным выше η_n является функцией объемной концентрации ρ_n/ρ_n^0 и размеров частиц n-й компоненты; очевидно, что η_n зависит также от

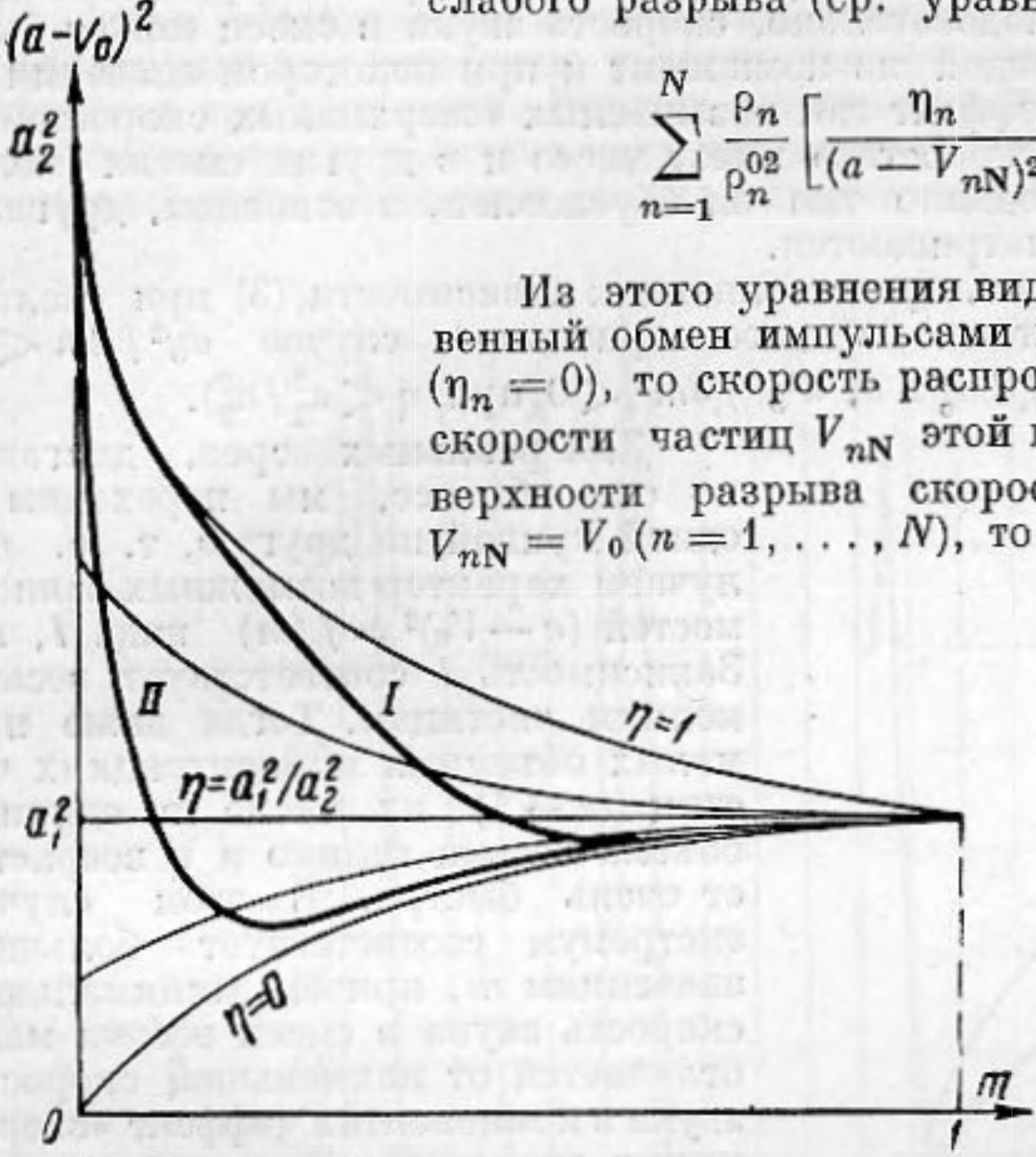
---

* Для более раздробленных частиц при той же объемной концентрации их количество в единице объема больше, т. е. расстояние между ними меньше.

** Тогда на частицы n-й компоненты действуют только сила сопротивления среды и массовая сила.

*** Эти особенности, разумеется, не могут быть исследованы в рамках упомянутых двух крайних предположений.

физических характеристик среды-носителя. Для конкретных смесей η_n должны быть определены экспериментально. Будем считать, что для смеси заданных конкретных сред $\eta_n = \varphi_n(\rho_n / \rho_n^0)$. Повторяя преобразования, проделанные в работе [3], получим уравнение относительно скорости a распространения волны слабого разрыва (ср. уравнение (14) работы [3]):



Фиг. 1

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{\rho_n}{\rho_n^{02}} \left[\frac{\eta_n}{(a - V_{n\mathrm{N}})^2} - \frac{1}{a_n^2} \right] = 0, \quad \left(a_n^2 = \frac{dp}{d\rho_n^0} \right). \tag{1}$$

Из этого уравнения видно, что если отсутствует непосредственный обмен импульсами между частицами n-й компоненты ($\eta_n = 0$), то скорость распространения волны a не зависит от скорости частиц $V_{n\mathrm{N}}$ этой компоненты. Если нормальные к поверхности разрыва скорости всех компонент одинаковы: $V_{n\mathrm{N}} = V_0 \, (n = 1, \ldots, N)$, то из уравнения (1) имеем

$$a = \pm \sqrt{\frac{\sigma}{\xi}} + V_0 \tag{2}$$

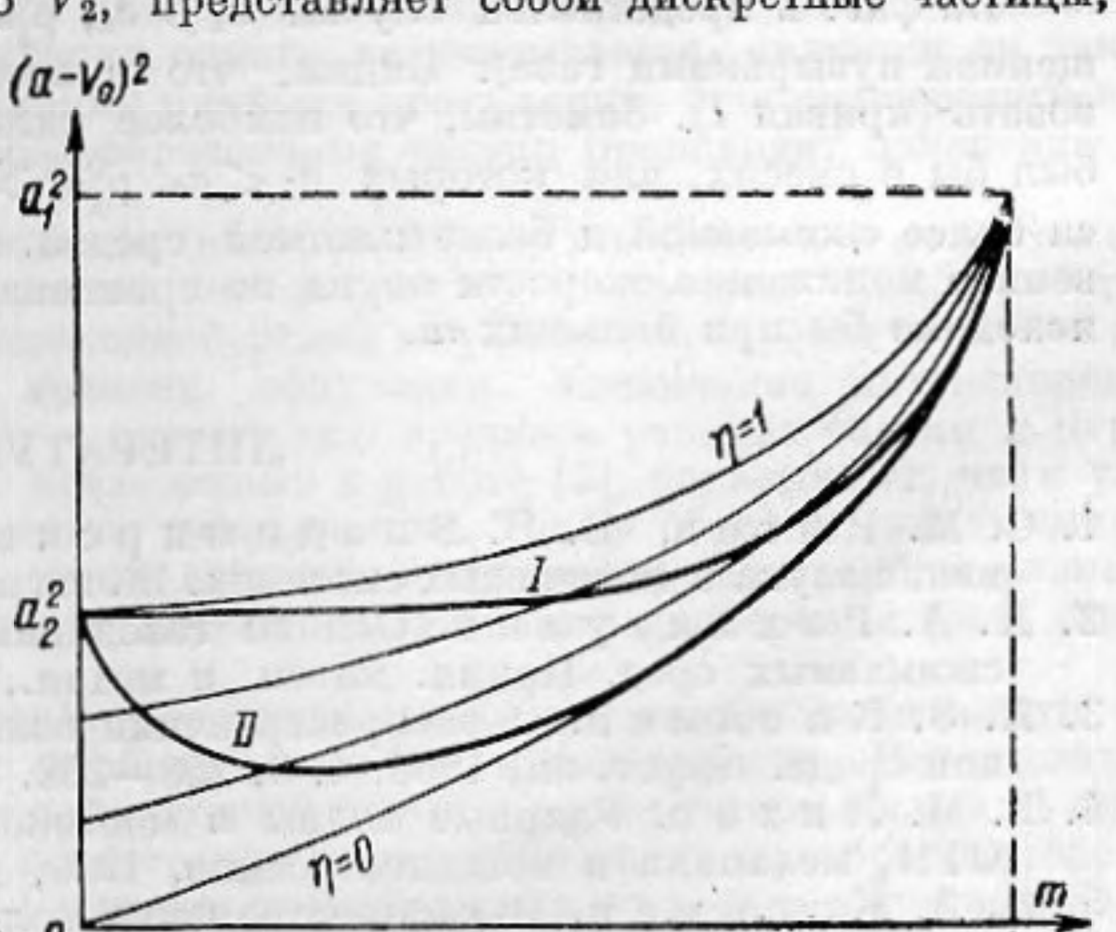
$$\left(\sigma = \sum_{n=1}^{N} \frac{\eta_n \rho_n}{\rho_n^{02}}, \right.$$

$$\left. \xi = \sum_{n=1}^{N} \frac{\rho_n}{\rho_n^{02} a_n^2} \right).$$

Для случая различных, но достаточно близких друг к другу скоростей компонент, получаем приближенную формулу

$$a = \pm \sqrt{\frac{\sigma}{\xi}} + \frac{1}{\sigma} \sum_{n=1}^{N} \frac{\eta_n \rho_n}{\rho_p^{02}} V_{n\mathrm{N}}.$$

В случае, когда часть компонент (N_1) имеет скорость V_1, а остальные $N - N_1$ компонент — скорость V_2, получаем при помощи (1) уравнение (23) и график фиг. 1 работы [3], где $\sigma_1 = \sum_{n=1}^{N_1} \frac{\eta_n \rho_n}{\rho_n^{02}}$, $\sigma_2 = \sum_{n=N_1+1}^{N} \frac{\eta_n \rho_n}{\rho_n^{02}}$. Из них видно, что если группа компонент, движущихся со скоростью V_2, представляет собой дискретные частицы, то с уменьшением их объемной концентрации уменьшается σ_2, т. е. «дополнительные» скорости распространения волн стремятся к основным скоростям. При $\eta_n \to 0$ ($n = N_1 + 1, \ldots, N$), $\sigma_2 \to 0$, график вырождается в асимптоты $y = -\Delta v \pm \sqrt{\sigma_1 / \xi}$, и «дополнительные» скорости распространения волн исчезают. Эти выводы легко распространить на случай любого числа различных скоростей (см. [3]).



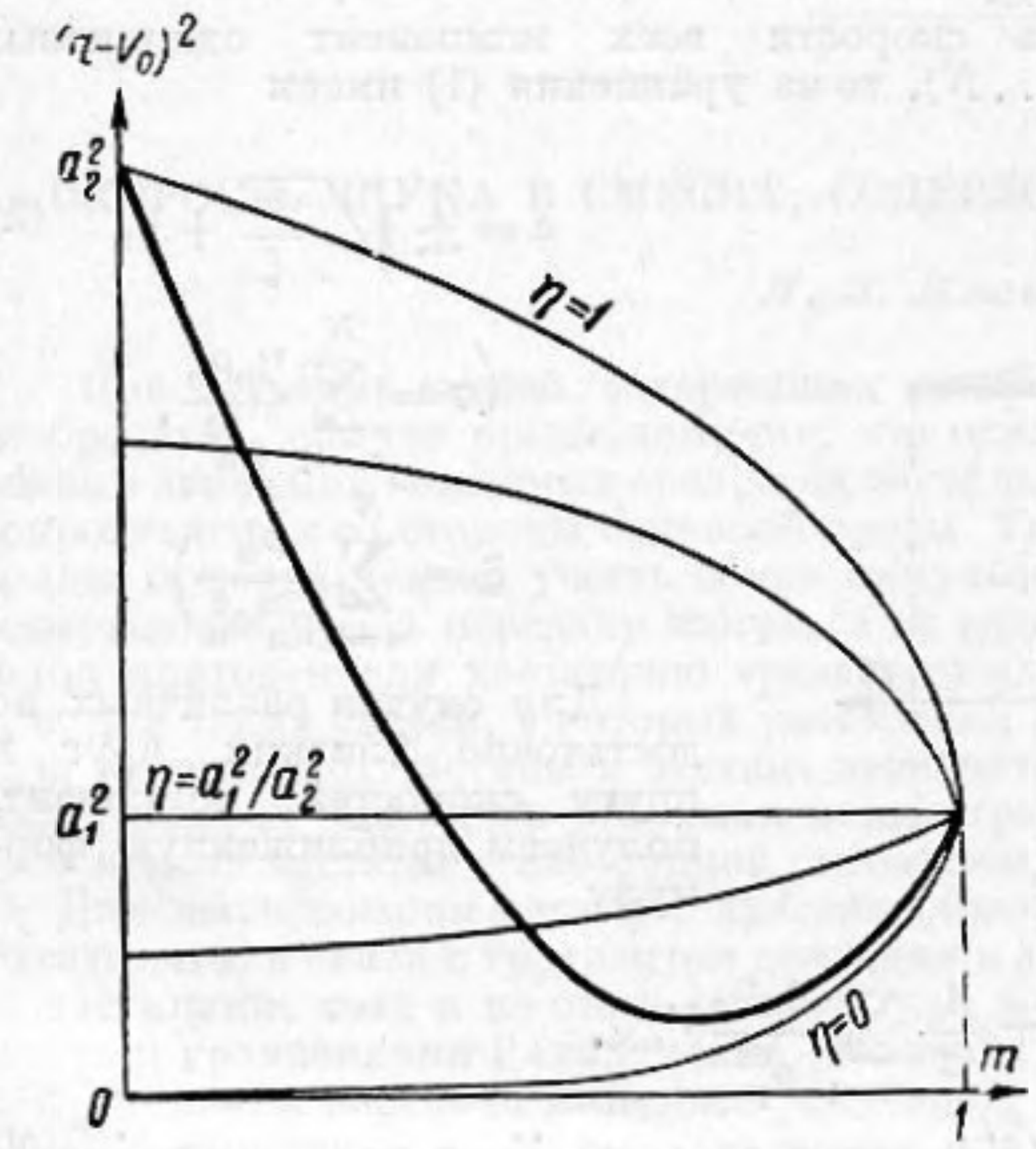
Фиг. 2

Исследуем зависимость скорости распространения волн слабого разрыва от количественного состава ($m = \rho_1 / \rho_1^0$) двухкомпонентной среды при $\Delta v = 0$. Для среды-носителя $\eta_1 = 1$, для дискретных частиц $\eta_2 = \eta$. Формулу (2) запишем в виде

$$(a - V_0)^2 = y^2 = a_1^2 a_2^2 \frac{m(1 - \eta\rho_1^0) + \eta\rho_1^0}{m(\rho_2^0 a_2^2 - \rho_1^0 a_1^2) + \rho_1^0 a_1^2} \tag{3}$$

Рассмотрим сначала наиболее распространенный в технике случай, когда дискретные частицы представляют собой более плотную и менее сжимаемую среду, чем среда-носитель: $a_1 < a_2$, $\rho_1^0 a_1^2 < \rho_2^0 a_2^2$. Из (3) видно, что с увеличением объемной концентрации частиц (т. е. с уменьшением m от 1 до 0) величина $a - V_0$ падает при значениях m близких к 1 (так как при этом η весьма мало) и растет при значениях $m \to 0$ (так как η близко к 1). Следовательно, скорость звука в смеси может быть меньше, чем скорость звука в каждой из компонент и при некотором значении m достигает минимальной величины (эффект так называемых «сверхмалых скоростей»). Заметим, что эффект «сверхмалых скоростей» имеет место и в других смесях (молекулярные смеси, грунты [4, 5]), однако там он обусловлен, в основном, другими причинами, которые здесь не рассматриваются.

На фиг. 1 нанесена сетка кривых, представляющих зависимости (3) при различных постоянных значениях η (тогда в рассматриваемом случае $dy^2 / dm < 0$, $d^2y^2 / dm^2 > 0$ при $\eta > a_1^2 / a_2^2$ и $dy^2 / dm > 0$, $d^2y^2 / dm^2 < 0$ при $\eta < a_1^2 / a_2^2$).



Фиг. 3

Для реальных сред, двигаясь по оси абсцисс, мы переходим с одной кривой на другую, т. е. получаем характер возможных зависимостей $(a - V_0)^2 = f(m)$ вида *I*, *II*. Зависимость *I* соответствует весьма мелким частицам. Тогда даже при малых объемных концентрациях частиц ($m \to 1$) их число в единице объема весьма велико и η возрастает очень быстро. В этом случае экстремум соответствует большим значениям m, причем минимальная скорость звука в смеси весьма мало отличается от наименьшей скорости звука в компонентах (эффект «сверхмалых скоростей» выражен слабо). Зависимость *II*, соответствующая крупным частицам, выражает более значительный эффект «сверхмалых скоростей». Из фиг. 1 видно, что скорость звука в смеси нельзя сделать сколь угодно малой, так как для этого точка экстремума должна была бы соответствовать $m \to 0$, что невозможно, поскольку при этом $\eta \to 1$. Чем меньше сжимаемость частиц, тем меньше эффект «сверхмалых скоростей»; для несжимаемых частиц ($a_2 \to \infty$) экстремум не имеет места.

На фиг. 2 представлен случай $a_1 > a_2$, $\rho_1^0 a_1^2 > \rho_2^0 a_2^2$ (например, жидкость, насыщенная пузырьками газа). Видим, что в этом случае экстремум может не существовать (кривая *I*). Заметим, что наиболее сильный эффект «сверхмалых скоростей» был бы в смесях, для которых $a_1 < a_2$, $\rho_1^0 a_1^2 > \rho_2^0 a_2^2$ (фиг. 3) (среда-носитель является более сжимаемой и более плотной средой, чем частицы), так как тогда существенное понижение скорости звука по сравнению с меньшим из значений a_1, a_2 происходило бы при больших m.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. М. Рытов, В. В. Владимирский, М. Д. Галанин. Распространение звука в дисперсных системах. Ж. эксперим. и теор. физ., 1938, 8, 5, 614—621.
2. Х. А. Рахматулин. Основы газодинамики взаимнопроникающих движений сжимаемых сред. Прикл. матем. и механ., 1956, 20, 2, 184—195.
3. Я. З. Клейман. О распространении волн слабого разрыва в многокомпонентной среде. Акуст. ж., 1958, 4, 3, 253—262.
4. Г. М. Ляхов. Ударные волны в многокомпонентных средах. Изв. АН СССР, ОТН, механика и машиностроение, 1959, 1, 46—49.
5. Я. З. Клейман. О распространении волн в грунтах. Изв. АН Уз.ССР, сер. техн. наук, 1959, 3, 33—43.

Москва

Поступило в редакцию
18 сентября 1960 г.