АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том VII 1961 Вып. 3

СВЯЗЬ МЕЖДУ СКОРОСТЬЮ ЗВУКА В ЖИДКОСТИ И В ЕЕ НАСЫЩЕННОМ ПАРЕ

В. В. Сычев

Получено соотношение, связывающее величины скорости звука в жидкости и в ее паре на линии насыщения, а также величина скачка адиабатической сжимаемости вещества при переходе через пограничную кривую.

Отыскание функциональной связи между скоростью звука в жидкости и в ее паре на линии насыщения представляет интерес как с теоретической, так и с практической точки зрения. Актуальность этой задачи отмечалась рядом исследователей (например, [1]).

Эта задача может быть успешно решена при помощи аппарата дифференциальных уравнений термодинамики, позволяющего получить аналитическое соотношение, связывающее между собой величины скорости звука в жидкости на линии насыщения (c') и в ее сухом насыщенном паре (c'').

Скорость звука в гомогенной среде определяется, как известно, уравнением Лапласа

$$c=\sqrt{-V^2\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_s}, \tag{1}$$

где V — удельный объем вещества, p — давление, s — энтропия. Для того чтобы получить соотношение, связывающее c' и c'', найдем зависимость между величинами $(\partial V/\partial p)_s$ на левой (жидкость) и правой (пар) пограничных кривых.

Подобно ряду других термодинамических величин, производная $(\partial V/\partial p)_s$ при переходе через пограничную кривую претерпевает разрыв, меняясь скачком от величины $(\partial V/\partial p)_s^{\sigma\text{оф}}$ до величины $(\partial V/\partial p)_s^{\sigma\text{дф}}$*. Соотношение, определяющее величину скачка

$$\Delta\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_s^\sigma=\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_s^{\sigma\,\text{дф}}-\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_s^{\sigma\,\text{оф}},$$

может быть получено следующим образом.

Рассмотрим выражение для полной производной от удельного объема вещества по давлению вдоль линии насыщения (в пространстве $s-V-p$):

$$\frac{dV_\sigma}{dp}=\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_s^\sigma+\left(\frac{\partial V}{\partial s}\right)_p^\sigma\cdot\frac{ds_\sigma}{dp}. \tag{2}$$

Здесь $(\partial V/\partial p)_s^\sigma$ и $(\partial V/\partial s)_p^\sigma$ — частные производные, взятые в точках пересечения соответственно изоэнтропы и изобары с пограничной кривой, а ds_σ/dp — полная производная от энтропии по давлению вдоль линии насыщения. Частные производные $(\partial V/\partial p)_s^\sigma$ и $(\partial V/\partial s)_p^\sigma$ в этом уравнении, очевидно, могут быть взяты либо со стороны однофазной, либо со стороны двухфазной области; результаты вычисления dV_σ/dp будут при этом, разумеется, одними и теми же.

* Индекс σ относится к величинам на пограничной кривой, индекс оф и дф — соответственно к однофазной и двухфазной областям параметров состояния вещества.

Записав уравнение (2) в одном случае с производными, взятыми со стороны однофазной, а в другом случае — со стороны двухфазной области, и приравнивая их правые части, получаем

$$\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_s^{\sigma\,\text{дф}} - \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_s^{\sigma\,\text{оф}} = \left[\left(\frac{\partial V}{\partial s}\right)_p^{\sigma\,\text{оф}} - \left(\frac{\partial V}{\partial s}\right)_p^{\sigma\,\text{дф}}\right]\frac{ds_\sigma}{dp}. \tag{3}$$

Используя уравнение Максвелла $(\partial V/\partial s)_p = (\partial T/\partial p)_s$ и учитывая, что $(\partial T/\partial p)_s^{\text{дф}} = dT/dp$, имеем

$$\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_s^{\sigma\,\text{дф}} - \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_s^{\sigma\,\text{оф}} = \left[\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_s^{\sigma\,\text{оф}} - \frac{dT}{dp}\right]\frac{ds_\sigma}{dp}. \tag{4}$$

В точке пересечения с линией насыщения изоэнтропа имеет излом. Соответственно скачком изменяется в этой точке величина $(\partial T/\partial p)_s$. Так как

$$\frac{dT}{dp} = \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_s^{\sigma\text{оф}} + \left(\frac{\partial T}{\partial s}\right)_p^{\sigma\text{оф}}\frac{ds_\sigma}{dp}, \tag{5}$$

а $(\partial T/\partial s)_p^{\sigma\text{оф}} = T/c_p^{\sigma\text{оф}}$, то уравнение (4) преобразуется следующим образом:

$$\Delta\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_s^{\sigma} = -\frac{T}{c_p^{\sigma\,\text{оф}}}\left(\frac{ds_\sigma}{dp}\right)^2. \tag{6}$$

Величина ds_σ/dp, фигурирующая в этом уравнении, может быть представлена в виде $ds_\sigma/dp = ds_\sigma/dT \cdot dT/dp$, и, поскольку $ds_\sigma/dT = c_s/T$, где c_s — теплоемкость вдоль линии насыщения *, то

$$\frac{ds_\sigma}{dp} = \frac{c_s}{T}\frac{dT}{dp}. \tag{7}$$

С учетом (7) уравнение (6) приобретает следующий вид:

$$\Delta\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_s^{\sigma} = -\frac{c_s^2}{Tc_p^{\sigma\,\text{оф}}}\left(\frac{dT}{dp}\right)^2. \tag{8}$$

Уравнение (8) позволяет сделать однозначный вывод о том, что и на левой, и на правой пограничных кривых $\Delta(\partial V/\partial p)_s^\sigma < 0$, а поскольку всегда $(\partial V/\partial p)_s < 0$, то, следовательно, по абсолютной величине $|(\partial V/\partial p)_s^{\sigma\,\text{дф}}| > |(\partial V/\partial p)_s^{\sigma\,\text{оф}}|$.

Связь между величинами $(\partial V/\partial p)_s'^{\text{дф}}$ и $(\partial V/\partial p)_s''^{\text{дф}}$ на изотерме (индексы $'$ и $''$ относятся соответственно к левой и правой пограничным кривым) может быть найдена следующим образом.

Из очевидного соотношения $(\partial p/\partial V)_s = (\partial p/\partial V)_T + (\partial p/\partial T)_V(\partial T/\partial V)_s$ с учетом того, что

$$\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_s = -\frac{T}{c_V}\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V, \quad \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T^{\text{дф}} = 0, \quad \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V^{\text{дф}} = \frac{dp}{dT},$$

получаем

$$\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_s^{\sigma\,\text{дф}} = -\frac{c_V^{\sigma\,\text{дф}}}{T}\left(\frac{dT}{dp}\right)^2, \tag{9}$$

* Теплоемкость вдоль линии насыщения определяется как количество тепла, которое нужно подвести к веществу, находящемуся в состоянии насыщения, с тем, чтобы при увеличении температуры на один градус вещество осталось бы в состоянии насыщения.

где $c_V^{\sigma\text{дф}}$ — теплоемкость c_V на линии насыщения со стороны двухфазной области (теплоемкость c_V при переходе через линию насыщения, как известно, также меняется скачком). Отсюда, следовательно,

$$\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_s^{'\text{дф}} - \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_s^{''\text{дф}} = \frac{c_V^{''\text{дф}} - c_V^{'\text{дф}}}{T}\left(\frac{dT}{dp}\right)^2. \qquad (10)$$

Как показано в работе [2], $c_V^{''\text{дф}} > c_V^{'\text{дф}}$. С учетом этого обстоятельства из уравнения (10) следует, что всегда $|(\partial V/\partial p)_s^{''\text{дф}}| > |(\partial V/\partial p)_s^{'\text{дф}}|$ (очевидно, для критической точки это неравенство вырождается в равенство). Поскольку (см. [2]) $c_V^{''\text{дф}} - c_V^{'\text{дф}} = T(V'' - V')\, d^2p/dT^2$, то соотношение, связывающее между собой величины $(\partial V/\partial p)_s^{\sigma\text{дф}}$ на левой и правой пограничной кривых, записывается следующим образом:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_s^{'\text{дф}} - \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_s^{''\text{дф}} = (V'' - V')\left(\frac{dT}{dp}\right)^2 \frac{d^2p}{dT^2}. \qquad (11)$$

Нетрудно показать (это очевидно, например, из (9) с учетом аддитивности $c_V^{\text{дф}}$), что внутри двухфазной области величина $(\partial V/\partial p)_s^{\text{дф}}$ на изотерме обладает свойством аддитивности:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_s^{\text{дф}} = \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_s^{'\text{дф}} \cdot (1 - x) + \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_s^{''\text{дф}} \cdot x,$$

где $x = \frac{V - V'}{V'' - V'}$ — степень сухости пара. Таким образом, внутри двухфазной области изотерма в системе координат $(\partial V/\partial p)_s = f(V)$ является прямой линией.

Поскольку при переходе через пограничную кривую скачком меняется величина $(\partial V/\partial p)_s$, то скачком меняется в этой точке и скорость звука. Величина скачка скорости звука может быть вычислена по уравнению (8) с учетом (1). Однако внутри двухфазной области расчет скорости звука по уравнению (1) в общем случае, строго говоря, лишен смысла, поскольку двухфазная среда дискретна, тогда как уравнение Лапласа справедливо только для континуума.

Уравнения (11) и (8) позволяют найти зависимость между величинами $(\partial V/\partial p)_s^{'\text{оф}}$ и $(\partial V/\partial p)_s^{''\text{оф}}$. В самом деле, заменив в уравнении (11) $(\partial V/\partial p)_s^{\sigma\text{дф}}$ по уравнению (8) и учитывая, что из (1) следует $(\partial V/\partial p)_s = -(V/c)^2$, мы получаем следующее уравнение, связывающее между собой скорости звука в жидкости и паре на линии насыщения (со стороны однофазной области):

$$\left(\frac{V''}{c''}\right)^2 - \left(\frac{V'}{c'}\right)^2 = \left[\psi' - \psi'' + (V'' - V')\frac{d^2p}{dT^2}\right]\left(\frac{dT}{dp}\right)^2, \qquad (12)$$

где $\psi^\sigma = c_s^2/T c_p^{\sigma\text{оф}}$. Это уравнение позволяет (при наличии экспериментальных данных по термодинамическим свойствам вещества на линии насыщения) производить надежную увязку результатов измерений скорости звука в жидкости и в паре. Уравнение (12) может быть применено и для решения обратной задачи — по результатам акустических измерений вычислять калорические комплексы ψ' и ψ''.

Для невысоких давлений, вдали от критической точки, выражения для комплексов ψ' и ψ'' могут быть существенно упрощены. Пренебрегая термическим расширением жидкости, — а такое пренебрежение допустимо при температурах, существенно меньших критической, — из известного термодинамического соотношения

$$c_s = c_p^{\sigma\text{оф}} - T \cdot \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p^{\sigma\text{оф}} \cdot \frac{dp}{dT} \qquad (13)$$

мы получаем $c'_s \approx c_p^{'\text{оф}}$ и, таким образом, $\psi' \approx c_p^{'\text{оф}}/T$.

Считая пар при невысоких давлениях идеальным газом и полагая, что $V'' \gg V'$, получим из (13)

$$c''_s \approx c''^{\text{оф}}_p - r/T,$$

и, следовательно, $\psi'' \approx \frac{c''^{\text{оф}}_p}{T} - \frac{r}{T^2}\left(2 - \frac{r}{Tc''^{\text{оф}}_p}\right)$. Здесь $r \approx TV'' \cdot dp/dT$, а $V'' \approx RT_\sigma / p_\sigma$.

Таким образом, при достаточном удалении от критической точки в правой части уравнения (12) фигурируют лишь величины, характеризующие зависимость $p_\sigma - T_\sigma$, и теплоемкости c_p жидкости и пара. Это обстоятельство, естественно, облегчает приближенный расчет по уравнению (12) в указанной области параметров состояния.

В заключение приведем пример численного расчета по уравнению (13). Вычислим скорость звука в сухом насыщенном водяном паре (c'') при температуре 0°, исходя из величины скорости звука в воде на линии насыщения (c') при этой температуре и используя существующие данные по термическим и калорическим свойствам воды и водяного пара. Величина $c' = 1406$ *м/сек* принята по данным [3], величины $V'' = 206{,}3$ и $V' = 0{,}0010002$ *м³/кг*, $c'^{\text{оф}}_p = 0{,}446$, $c''_s = -1{,}747$ и $c'^{\text{оф}}_p \approx c'_s = 1{,}0075$ *ккал/кг·град*, $dp/dT = 4{,}525$ *кг/м²·град* и $d^2p/dT^2 = 0{,}2915$ *кг/м²·град²* — по данным [2, 4, 5]. Полученная в результате расчета величина $c'' = 409{,}1$ *м/сек* согласуется с величиной c'', экспериментально найденной Массоном [6], с точностью 1,9%. Это расхождение не выходит за пределы суммарной ошибки эксперимента и расчета.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Ф. Ноздрев. Применение ультраакустики в молекулярной физике. М., ГТТИ, 1958.
2. В. В. Сычев. Теплоемкость C_v в двухфазной области параметров состояния воды. Инж.-физ. ж., 1960, 3, 7, 10—16.
3. П. П. Прозоров, В. Ф. Ноздрев. О температурной зависимости скорости ультразвука в жидкости. Ж. эксп. и теор. физ., 1939, 9, 5, 625—629.
4. А. Е. Шейндлин, Э. Э. Шпильрайн, В. В. Сычев. Теплоемкость C_p воды и водяного пара на линии насыщения. Теплоэнергетика, 1960, 7, 23—27.
5. N. S. Osborne, H. F. Stimson, D. C. Ginnings. Thermal property of saturated water and steam. J. Res. N. B. S., 1939, 23, 261—270.
6. M. A. Masson. Mémoire sur la vitesse du son dans les solides, les liquides et les fluides élastiques et sur la corrélation des propriétés physiques des corps. Compt. rendus, 1857, 44, 9, 464—467.

Московский энергетический институт

Поступила в редакцию 26 сентября 1960 г.