

О СФЕРИЧЕСКОЙ АБЕРРАЦИИ ТВЕРДЫХ ЗВУКОВЫХ ФОКУСИРУЮЩИХ ЛИНЗ

В. Д. Тартаковский

Исследуется зависимость продольной (и связанной с ней поперечной) абберации однородной звуковой линзы от величины показателя преломления и формы линзы. Показывается, что в отличие от оптических собирательных (стеклянных, находящихся в воздухе, с показателями преломления $1,4 \div 2$) линз звуковые линзы с показателем преломления $n < 1$ (для изображения предметов, находящихся на бесконечности) возможно сделать анаберрационными. Рассчитываются приближенные и тригонометрические точные количественные зависимости величины абберации от величины n твердых звуковых линз в области значений n , представляющих наибольший интерес с точки зрения создания анаберрационных линз. Выясняется роль поперечных волн, распространяющихся в твердых линзах в образовании дополнительного фокуса, и оценивается количественно помеха, вносимая этим фокусом в основном фокусе линзы (образованием распространением продольных волн в линзе). Даются рекомендации по выбору формы и материала линзы с целью уменьшения помех от сферической абберации и образования фокуса поперечных волн.

Необходимость увеличения коэффициента усиления и разрешающей способности в плоскости изображения заставляет увеличивать угол раскрытия звуковых линз. Это вызывает появление значительных аббераций, ослабление которых может быть достигнуто надлежащим выбором материала и формы линзы. Фокусирующие свойства звуковых линз, так же как и оптических, целесообразно исследовать геометрическими методами, хотя они могут давать лишь приближенную картину, поскольку абберация звуковых линз соизмерима с искажениями, обусловленными дифракцией.

В отличие от оптических, звуковые фокусирующие линзы могут быть сделаны из материала со скоростью распространения звуковых волн как меньше, так и больше скорости звука в окружающем пространстве, т. е. с показателем преломления больше или меньше единицы. Это допускает большую свободу при определении параметров звуковых линз и обуславливает необходимость достаточно общего рассмотрения зависимости фокусирующих свойств звуковых линз от их формы и материала. Наряду с этим детальное изучение аббераций, предпринимаемое при проектировании оптических фокусирующих систем с целью сравнить геометрические абберации рассчитываемой оптической фокусирующей системы с абберациями уже выполненных и экспериментально проверенных систем, не имеет смысла при расчете звуковых линз, ввиду отсутствия опыта в их расчете и использовании. Поэтому представляется целесообразным ограничиться лишь основными абберационными расчетами, не требующими громоздких вычислений и в то же время полезными для выбора параметров звуковых линз.

Ниже рассматривается зависимость продольной сферической абберации от величины показателя преломления и формы линзы и определяются оптимальные соотношения между ними. Рассматривается также фокус, образованный поперечными (сдвиговыми) волнами, распространяющимися в твердых линзах.

Рассмотрим вначале продольную сферическую абберацию 3-го порядка, которая, как известно, является первым приближением точной

(тригонометрически вычисленной) величины и сопоставим aberrации замедляющих и убыстряющих линз.

Для бесконечно удаленного источника на оси линзы выражение для продольной сферической aberrации 3-го порядка одиночной линзы, расположенной между одинаковыми средами, имеет вид [1]:

$$\delta = -\frac{H^2}{2F} \left[\left(\frac{n}{n-1} \right)^2 - \frac{2n+1}{n-1} \frac{F}{R_1} + \frac{n+2}{n} \frac{F^2}{R_1^2} \right], \quad (1)$$

где F — фокусное расстояние, n — относительный показатель преломления, т. е. отношение скоростей распространения звука в среде и в линзе, H — высота линзы*, R — первый радиус кривизны линзы по направлению луча. Фокусное расстояние и радиус кривизны считаются положительными, если они расположены за преломляющей поверхностью по направлению луча. Выражение в квадратных скобках, характеризующее зависимость величины aberrации от показателя преломления и формы линзы, принято обозначать через $2S$ и писать

$$\delta_S = -\frac{H^2}{2F} \cdot 2S. \quad (1a)$$

В обширной литературе по расчету aberrаций оптических систем исследована только зависимость $2S$ от формы линзы и показателя преломления для случая $n > 1$. Нас же будет интересовать более общая задача: $S(n)$; $0 < n < \infty$.

Сопоставление сферической aberrации замедляющих ($n > 1$) и убыстряющих ($n < 1$) линз удобно начать с рассмотрения преломления на одной поверхности, разделяющей две среды с различными скоростями звука; $c_1 < c_2$. Ориентируем эту поверхность таким образом, чтобы она создавала действительное изображение в каждой из разделяемых ею сред при источнике, соответственно расположенном в другой среде (фиг. 1).

Положив в выражении (1) $R = \infty$ и допустив, что источники находятся на бесконечности, получим

$$2S = \left(\frac{n}{n-1} \right)^2. \quad (2)$$

Подставив сюда показатель преломления $n_1 = c_2/c_1$, соответствующий падению луча μ_1 из среды I в среду II , а затем $n_2 = c_1/c_2$ для обратного луча μ_2 и, учтя, что $F_1 c_1 = F_2 c_2$, найдем

$$\frac{\delta S_1}{\delta S_2} = \left(\frac{c_1}{c_2} \right)^3. \quad (3)$$

То, что в среде с меньшей скоростью aberrация меньше, объясняется тем, что радиус кривизны преломляющей поверхности имеет для этого пространства такой же знак, как и радиус фронта сходящейся волны; в пространстве же с большей скоростью эти знаки различны, поэтому угол преломления i'_2 в пространстве с меньшей скоростью меньше угла преломления i'_1 в пространстве с большей скоростью, а следовательно, и aberrация меньше**.

* Под высотой линзы здесь и дальше в соответствии с терминологией, принятой в оптике, понимается расстояние от центра линзы до пересечения луча с главной плоскостью линзы.

** Следует однако отметить, что при увеличении скорости распространения звука в пространстве поперечная aberrация (см. (8)) возрастает медленнее, чем продольная. Кроме того, изменяется масштаб изображения и дифракционная структура фокуса. Все вместе взятое ослабляет зависимость качеств изображения от скорости, сравнительно с вытекающей из формулы (3).

Из соотношения (3) следует, что в пределе, при $c_1 \rightarrow 0$, $\delta S_1 \rightarrow 0$, фронт волны, преломленной сферической поверхностью, сближается с последней, фокус сближается с центром кривизны преломляющей поверхности, а преломленные лучи в пределе совпадают с радиусами. Таким образом, по мере уменьшения n при одном и том же радиусе кривизны преломляющей поверхности сферическая аберрация уменьшается, хотя угол раскрытия линзы увеличивается.

Точно так же ведут себя и плоскоферические линзы с плоскостью, обращенной к пространству предметов. Поэтому для плоскоферических линз (например, в ультразвуковых дефектоскопах с линзой, находящейся в непосредственном контакте с плоской стороной изделия) целесообразно брать материалы с показателем преломления $n < 1$.

Для сопоставления величины аберраций убыстряющей и замедляющей линзы с двумя преломляющими поверхностями введем понятие эквивалентных линз. Будем считать две линзы эквивалентными при равенстве их фокусных расстояний и попарном равенстве радиусов кривизны преломляющих поверхностей*. Величины, соответствующие эквивалентным линзам, в данном смысле мы будем обозначать звездочкой

$$R_1^* = R_2 \quad R_2^* = R_1. \quad (4)$$

Из формулы фокусного расстояния для тонких линз $\frac{1}{F} = (n-1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$ следует, что для эквивалентных линз должно соблюдаться условие

$$\tilde{n} + \tilde{n}^* = 2. \quad (5)$$

Коэффициент сферической аберрации можно представить в форме

$$2S^* = \frac{1}{(1-n)^2} \left(n^2 - \frac{2n+1}{\beta} + \frac{n+2}{n\beta^2} \right), \quad (2a)$$

где $\beta = 1 - R_1/R_2$ — коэффициент, характеризующий форму линзы.

Коэффициенты β для эквивалентных линз связаны между собой соотношениями:

$$\beta = \frac{\beta^*}{\beta^* - 1}; \quad \beta^* = \frac{\beta}{\beta - 1}. \quad (6)$$

Если приравнять коэффициенты сферической аберрации (2a) эквивалентных линз, сделав подстановку (6) и (5), получим уравнение вида

$$f(n_1\beta_1) = 0, \quad \text{либо} \quad f(n_1^*\beta_1^*) = 0.$$

Величина n_1^* , удовлетворяющая этим уравнениям, зависит от β_1^* и имеет максимум вблизи величины n , определяемой соотношением

$$\beta_1 = \frac{2(n_1+2)}{n_1(2n_1+1)}, \quad (7)$$

составляя при этом $n_1^* = 0,101$. При $n^* > n_1^*$, $S^* < S_1$.

Заметим, что соотношение (7) соответствует замедляющим линзам оптимальной формы, имеющим наименьшую возможную для данного показателя преломления сферическую аберрацию. Для линз с неоптимальным соотношением радиусов кривизны равенство $S = S^*$ имеет место при величине $n < 0,101$.

Таким образом, сферическая аберрация убыстряющих линз меньше, чем эквивалентных им замедляющих линз в области показателей преломления $0,101 < n < 1$, независимо от формы линзы.

* Приведенное определение эквивалентности двух линз не является единственно возможным: несколько ниже будет дано и другое.

Количественное сравнение сферических aberrаций убыстряющих и замедляющих линз может быть сделано по соотношению величин минимальной aberrации линз оптимальной формы с эквивалентными показателями преломления, получаемого при подстановке (7) в (1а)

$$\delta S_{\min} = -\frac{H^2}{2f} \frac{n(4n-1)}{4(n-1)^2(n+2)}$$

Тогда как при $n > 1$ $2S$ всегда положительная величина, в области $n^* < 1$ возможны три случая: а) $0 < n^* < 0,25$; $2S_{\min}^* < 0$; б) $n^* = 0$; $n^* = 0,25$; $2S_{\min}^* = 0$; в) $0,25 < n^* < 1$; $2S_{\min}^* > 0$.

Беря производную $2S$ по n , находим из уравнения $2n^4 - n^3 + 6n^2 - 8n + 1 = 0$ величину $n = 0,139$, при которой коэффициент $2S_{\min}^*$ имеет максимальное значение в области $0 < n < 0,25$; $2S_{\min}^* = 0,00922$.

В табл. 1 приведены коэффициенты сферической aberrации $2S$ и $2S^*$ для плоскосферических линз и линз с оптимальным соотношением радиусов кривизны.

Таблица 1

Коэффициенты, пропорциональные продольной сферической aberrации 3-го порядка убыстряющих и замедляющих линз $2S$

	$n^* < 1$					$n > 1$				
	0,25	0,4	0,5	0,6	0,8	1,75	1,6	1,5	1,4	1,2
Значения сопоставляемых показателей преломления $n^* < 1, n > 1$	0,25	0,4	0,5	0,6	0,8	1,75	1,6	1,5	1,4	1,2
Линза с оптимальной формой кривизны $n^* < 1, n > 1$	0	0,069	0,2	0,5	4	1,32	1,67	2,14	2,96	8,92
Плосковыпуклая линза $n^* < 1$	0,112	0,445	1	2,25	16	—	—	—	—	—
Выпуклоплоская линза $n > 1$	—	—	—	—	—	1,26	1,60	2,33	3,67	4,77

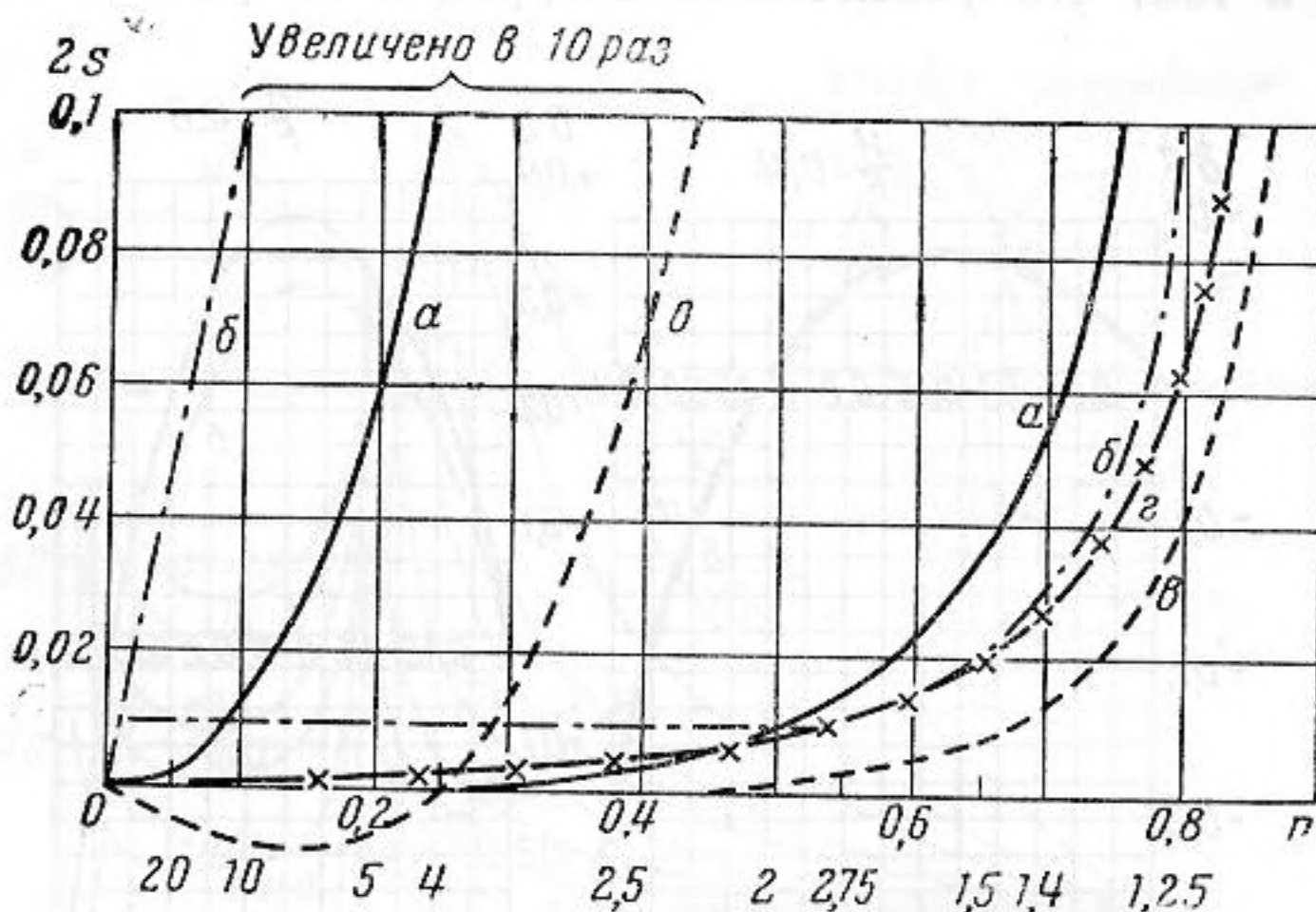
Сопоставление между собой коэффициентов сферической aberrации замедляющих (т. е. обычных оптических) линз, показывает, что линзы с оптимальным соотношением радиусов кривизны не имеют заметных преимуществ перед выпуклоплоскими линзами. Если же сравнить между собой убыстряющие (т. е. специфически звуковые) линзы, то окажется, что коэффициент сферической aberrации для линзы с оптимальным соотношением радиусов кривизны на порядок меньше, чем коэффициент плосковыпуклых линз. Существенно также, что сравнение коэффициентов сферической aberrации линз одного и того же типа показывает значительное преимущество убыстряющих линз.

Выше мы сравнивали убыстряющие и замедляющие линзы, беря для сопоставления показатели преломления, связанные между собой зависимостью (5). При этом максимальный показатель преломления замедляющих линз не может быть более чем 2. Так как сферическая aberrация уменьшается тем более, чем больше n отличается от единицы, то представляется интересным сопоставить с убыстряющими линзами замедляющие линзы с показателем преломления $n > 2$. Это можно сделать, приняв несколько иное условие эквивалентности двух линз, а именно $n^* = 1/n$.

Оказывается, что в диапазоне $n > 2$ и соответственно $n^* < 0,5$, aberrации убыстряющих линз плоскосферической (кривая а фиг. 2) и с оптимальным соотношением радиусов кривизны (кривая в) меньше aberrаций, соответствующих замедляющих линз (кривые б и г).

Из приведенного выше сравнения коэффициентов сферической aberrации линз различных типов следует, таким образом, что наилучшей

является убыстряющая линза с оптимальным соотношением радиусов кривизны. На фиг. 3 приведены формы линз с оптимальным соотношением радиусов кривизны при различных показателях преломления. В отличие от замедляющих линз у убыстряющих абсолютная величина радиуса

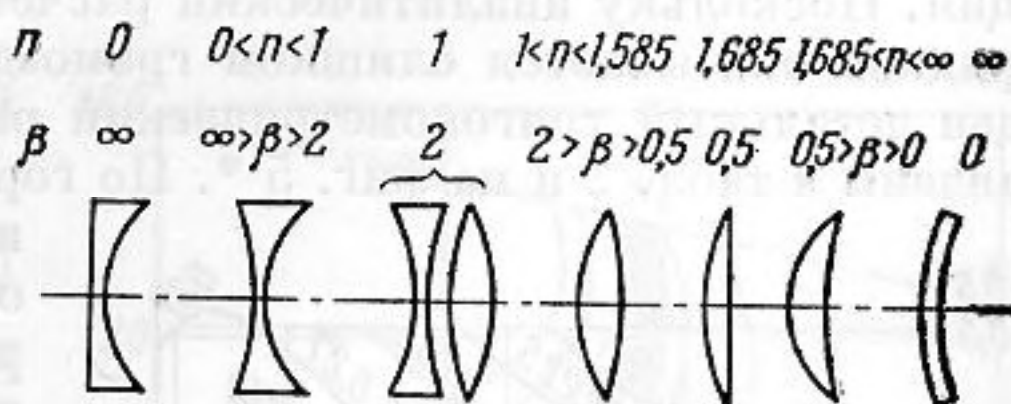


Фиг. 2

кривизны первой преломляющей поверхности больше, чем у второй поверхности.

Как показали проведенные нами расчеты, сферическая aberrация 3-го порядка является достаточно хорошим приближением к точной (вычисленной тригонометрически)

величине при всех значениях n кроме $n = 0,2 \div 0,3$. Для примера сопоставим приближенные и точные величины сферической aberrации убыстряющих линз с оптимальным соотношением радиусов кривизны, вычисленные для различных показателей преломления и одинакового угла раскрытия.



Фиг. 3

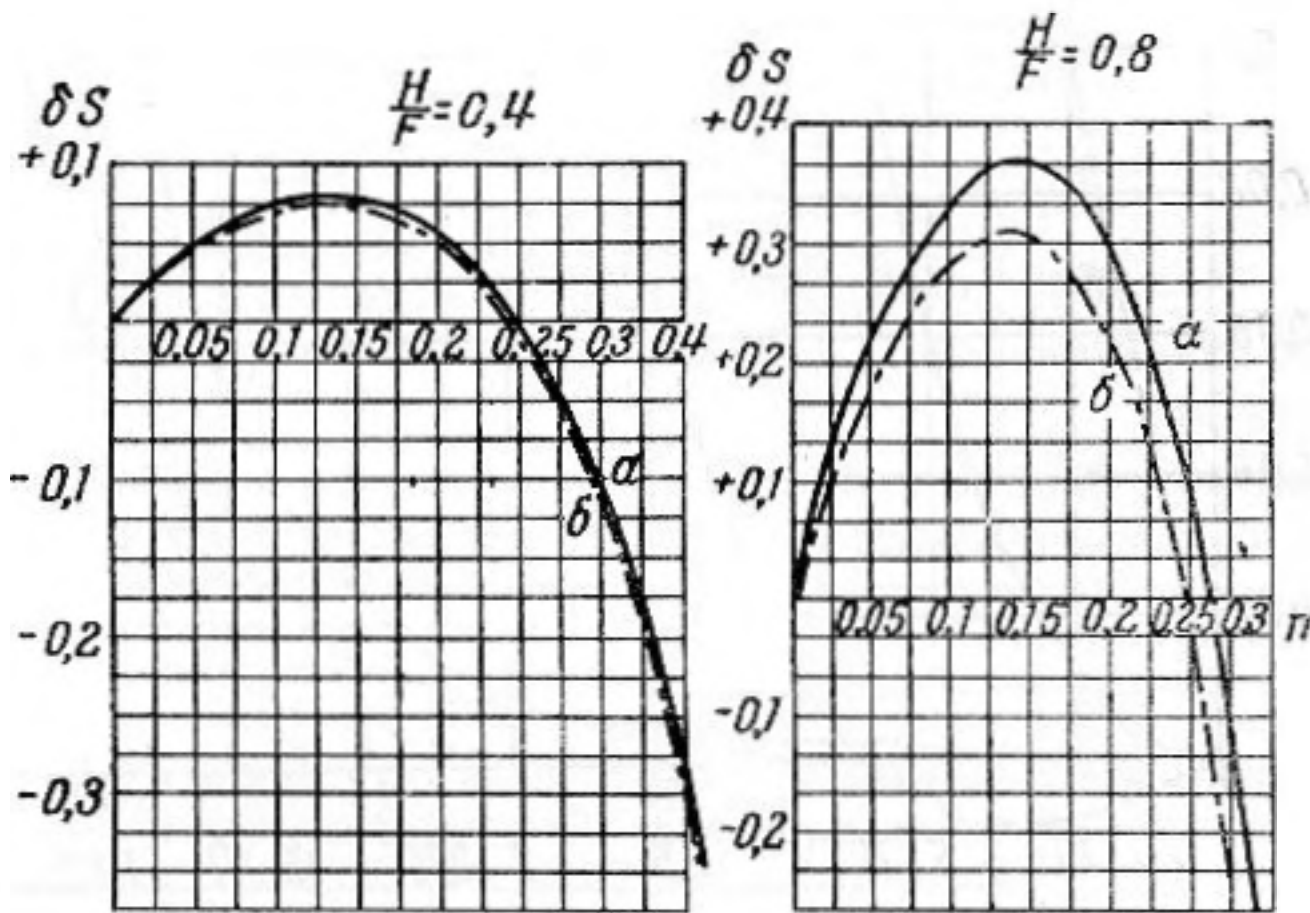
Кривые a на фиг. 4 показывают результаты тригонометрических вычислений, кривые b вычислены по формулам (1) и (7). Из сопоставления кривых видно, что в пределах $n^* < 0,2$ ошибка от замены точного значения приближенным меньше 0,2. Интересно, что в отличие от замедляющих линз, у которых, как известно, абсолютная величина сферической aberrации 3-го порядка меньше точной величины, у убыстряющих линз

Таблица 2

Тригонометрические (точные) значения продольной сферической aberrации убыстряющих линз оптимальной формы кривизны

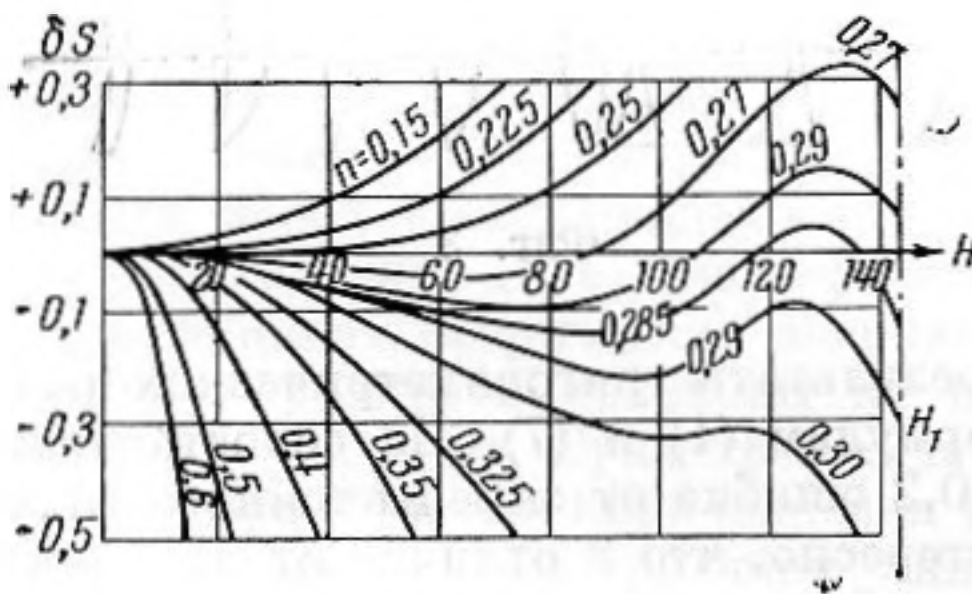
n	H								
	20	30	40	50	60	70	80	90	100
0,250	+0,001	+0,0022	+0,0067	+0,0144	+0,0315	+0,0594	+0,1047	+0,1691	—
0,255	-0,0027	-0,0040	-0,0027	+0,0022	+0,0136	+0,0350	+0,0727	+0,1322	—
0,260	-0,0045	-0,0067	-0,0092	-0,0102	-0,0050	+0,0117	+0,0424	+0,0940	—
0,265	-0,0071	-0,0135	-0,0196	-0,0249	-0,0257	-0,0152	+0,0035	+0,0509	—
0,270	-0,0137	-0,0182	-0,0289	-0,0366	-0,0447	-0,0429	-0,0300	+0,0075	+0,0668
0,275	-0,0101	-0,0242	-0,0379	-0,0541	-0,0669	-0,0724	-0,0646	-0,0387	+0,0110

с оптимальным соотношением радиусов кривизны, точная величина сферической aberrации в области значений $0,25 < n < 0,75$ меньше приближенной величины. Это свойство убыстряющих линз позволяет, задаваясь при расчете определенной величиной сферической aberrации, быть уверенным в том, что фактическая aberrация получится меньшей.



Фиг. 4

В области значения $0,2 < n^* < 0,3$, как уже отмечалось выше, приближения 3-го порядка недостаточно, чтобы судить о точной величине сферической aberrации. В то же время эта область величин n^* представляет, как уже говорилось, большой интерес в связи с малостью aberrации. Поскольку аналитический расчет приближения 5-го и следующих порядков оказывается слишком громоздким для этой области, был проведен детальный тригонометрический расчет, результаты которого представлены в табл. 2 и на фиг. 5*.



Фиг. 5

По горизонтальной оси фиг. 5 отложена высота линзы H , по вертикальной оси — величина продольной сферической aberrации, обе выраженные в долях фокусного расстояния, принятого за 100. Для каждого значения n бралась оптимальная форма линзы (7).

Как видно из графика, существуют значения n и H , при которых aberrация обращается в нуль. Стоит напомнить, что у замедляющих линз сферическая aberrация может быть сведена к нулю

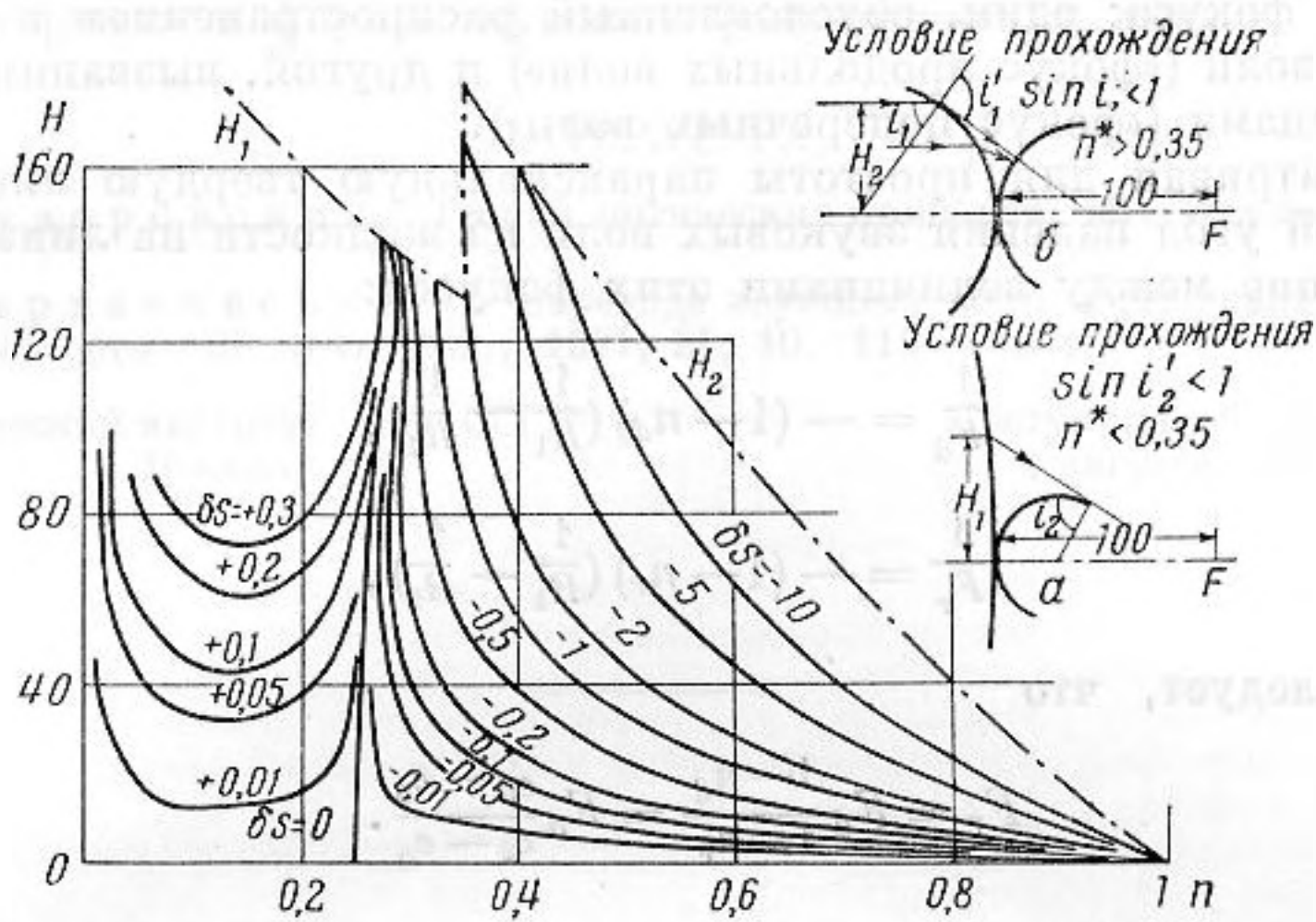
лишь при сочетании, по крайней мере, двух линз.

Соображения, изложенные выше, показывают, что по возможности следует отдавать предпочтение звуковым линзам с показателем преломления меньшим единицы. С этой точки зрения твердые линзы оказываются лучше жидких, ввиду возможности широкого выбора величин n , в частности, в области $0,2 < n < 0,3$, в которой может быть исправлена сферическая aberrация линзы.

Для удобства выбора убыстряющих линз оптимальной формы (по данным численного расчета по формуле (7) и таблицы 2) построена номограмма, дающая зависимость высоты линзы (H) от показателя преломления для заданной величины продольной сферической aberrации (фиг. 6 и 7, а).

* Тригонометрические расчеты проводились по схеме, принятой в геометрической оптике.

Высота линзы и величина aberrации отнесены к фокусному расстоянию, принятому за 100. Кривые H_1, H_2 показывают ограничения, накладываемые на высоту линзы условиями преломления луча на обеих поверхностях линзы. Характер этих ограничений ясен из схем, приведенных на фиг. 6.



Фиг. 6

Поскольку мы рассматривали зависимость продольной сферической aberrации от параметров линзы при заданном постоянном угле раскрытия H/F , все, что говорилось о продольной сферической aberrации может быть непосредственно перенесено на поперечную сферическую aberrацию, связанную с продольной известной зависимостью

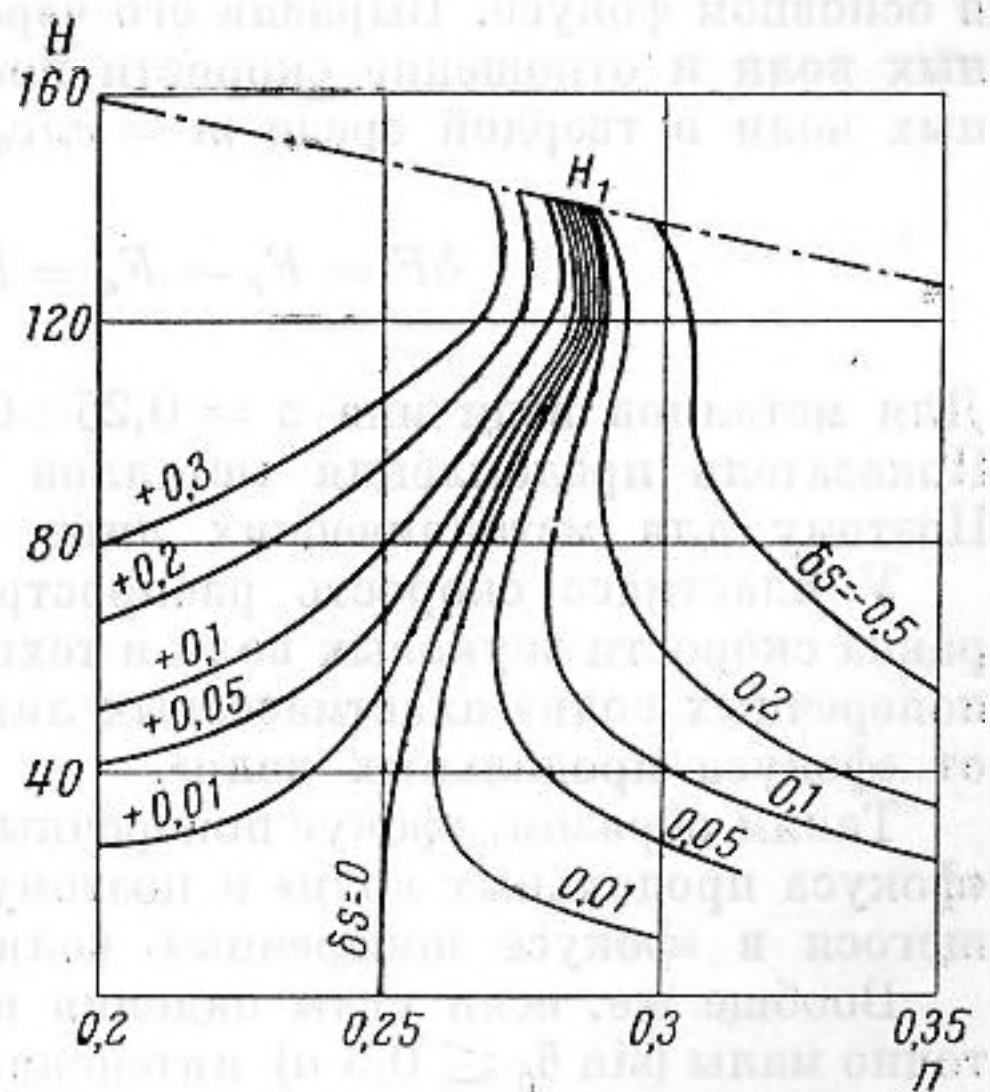
$$\delta S_q = \delta_s \frac{H}{F}. \quad (8)$$

В работе [2] был приведен расчет, показывающий изменение интенсивности продольных волн при переходе звука через границы твердой линзы в жидкость, обусловленное возникновением поперечных волн. Однако действие поперечных волн в твердых звуковых линзах этим не исчерпывается. Как было показано там же, твердую среду можно условно представлять как две «совмещенные» одна с другой «жидкие» среды, каждая из которых характеризуется скоростью распространения одного из типов волн, продольных или поперечных. Таким образом, твердая звуковая линза может условно рассматриваться как «две вставленные одна в другую линзы» с различными показателями преломления:

$$n_d = c_0/c_d, \quad n_r = c_0/c_r,$$

где индекс d относится к продольным волнам, r — к поперечным волнам.

Так как поперечные волны, возникающие в линзе при косом падении звуковых волн на первую границу распространяются по иным направ-



Фиг. 7

лениям, чем продольные волны, то при переходе через вторую границу они возбуждают в жидкости звуковые волны, распространяющиеся также по другим направлениям, чем звуковые волны, обусловленные распространением продольных волн в линзе. В результате появления двух независимо распространяющихся волновых пучков в жидкой среде появляются два фокуса: один, обусловленный распространением в линзе продольных волн («фокус продольных волн») и другой, вызванный поперечными волнами («фокус поперечных волн»).

Рассматривая для простоты параксиальную твердую линзу и взяв небольшой угол падения звуковых волн из жидкости на линзу, получим соотношение между величинами этих фокусов:

$$\frac{1}{F_d} = -(1 - n_d) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right), \quad (9)$$

$$\frac{1}{F_r} = -(1 - n_r) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right),$$

откуда следует, что

$$F_r = F_d \frac{1 - n_d}{1 - n_r} = F_d \frac{c_d - c_0}{c_r - c_0}. \quad (10)$$

Формула (10) показывает, что при условии $c_d > c_r > c_0$ «фокус поперечных волн» твердой линзы, утолщенной на краях, действительный, если же $c_r < c_0$, то «фокус поперечных волн» — мнимый. В последнем случае имеется полная аналогия с оптической рассеивающей линзой.

Определим расстояние между фокусами для оценки помехи, которую может создать волновой пучок, сходящийся в «фокусе поперечных волн», в основном фокусе. Выразив его через показатель преломления продольных волн и отношение скорости поперечных волн к скорости продольных волн в твердой среде $m = c_r/c_d$, получим

$$\delta F = F_r - F_d = F_d \cdot m \frac{1 - m}{m - n_d}. \quad (11)$$

Для металлов величина $\sigma = 0,25 \div 0,33$ и соответственно $m \approx 0,6 \div 0,5$. Показатель преломления металлов относительно воды $n_d = 0,2 \div 0,3$. Поэтому для металлических линз в воде $\delta F \approx 1,2 F_d$.

У пластмасс скорость распространения поперечных волн примерно равна скорости звуковых волн в технических жидкостях, поэтому «фокус поперечных волн» пластмассовых линз мнимый, либо расположен далеко от «фокуса продольных волн».

Таким образом, «фокус поперечных волн» обычно находится далеко от «фокуса продольных волн» и поэтому помеха от волнового пучка, сходящегося в «фокусе поперечных волн», мала.

Вообще же, если углы падения на первую поверхность линзы достаточно малы ($\sin \theta_0 \leq 0,5 n$) интенсивность возникающих поперечных волн в линзе мала, и, например, для алюминиевой линзы в воде интенсивность волнового пучка (на оси линзы), обусловленного поперечными волнами, составляет не более $1/50$ от интенсивности волнового пучка продольных волн.

При таком же угле падения, когда $\sin \theta_0 \approx (0,8 \div 0,9)$ интенсивности продольных и поперечных волн в линзе примерно равны и поэтому интенсивности в центрах обоих фокусов одного порядка. При таких углах падения помеха от фокуса поперечных волн может стать заметной. Наконец, при таких углах падения, когда выполняется соотношение $\sin \theta_0 > n_d$, интенсивность фокуса продольных волн по мере увеличения θ_0 будет резко уменьшаться, тогда как интенсивность фокуса поперечных

волн будет вначале расти и затем станет уменьшаться до нуля в области $\sin \theta_0 \approx n_r$. Интересно, что благодаря близости волновых сопротивлений ρc_r и $\rho_0 c_0$ интенсивность фокуса поперечных волн может при этом оказаться гораздо больше интенсивности фокуса продольных волн. Эти соображения, по-видимому, следует также принимать во внимание при выборе материала и формы звуковых фокусирующих линз.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. И. Тудоровский. Теория оптических приборов. М., Изд-во АН СССР, 1948.
2. Б. Д. Тартаковский. О переходе звуковых волн через границы твердых и жидких сред. Ж. техн. физ., 1951, 21, 10, 1194—1201.

Акустический институт АН СССР
Москва

Поступила в редакцию
3 августа 1960 г.