АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том VII 1961 Вып. 3

О ВЫРОЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЯХ И ДУБЛЕТНОМ РАСЩЕПЛЕНИИ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ ПЬЕЗОРЕЗОНАТОРОВ*

Б. А. Финагин

Проводится обсуждение и теоретический анализ явления дублетного расщепления ряда собственных частот колебаний пьезопластинки. Путем применения теории возмущения к задаче о колебаниях пьезопластинки, показано, что дублетное расщепление собственных частот и сопровождающий его поворот на некоторый угол фигуры колебаний пьезопластинки являются результатом снятия вырождения под влиянием малого возмущения у некоторых видов колебаний, являющихся вырожденными. Отмечается аналогия между дублетностью собственных частот у пьезорезонаторов и соответствующим явлением дублетности в электромагнитных резонаторах и волноводах.

Приводятся экспериментальные данные о явлении дублетного расщепления собственных частот для мембранного типа колебаний турмалиновых пьезопластинок и делаются практические выводы о влиянии дублетного расщепления собственных частот пьезорезонаторов на их работу.

При экспериментальном исследовании колебаний круглых турмалиновых пьезопластин Z-среза нами было обнаружено явление дублетного расщепления ряда собственных частот [1, 2]. Оказалось, что многие собственные частоты, характеризуемые формой колебаний в виде системы узловых диаметров и концентрических окружностей представляют собой дублет, величина которого для различных резонансов колеблется от сотых до десятых долей процента от частоты резонанса. При этом фигуры колебания, соответствующие данному резонансу, на обеих частотах дублета совершенно одинаковы, но повернуты на угол $\pi/2n$, где $n = 1, 2, \ldots$ — число узловых диаметров.

Форма колебаний пластинки, характеризуемая системой n-узловых диаметров и m-узловых концентрических окружностей на ее поверхности, где $n = 0, 1, 2, \ldots$ и $m = 0, 1, 2, \ldots$ может соответствовать продольным колебаниям по Ляву [3] типа A, B, C, описанным Петржилкой [4], колебаниям изгиба по Кирхгофу [5] и поперечным колебаниям мембраны [6].

В наших опытах исследуемая пластинка с металлизированной верхней поверхностью свободно лежала на плоском электроде, т. е. не была зажата. При колебаниях на различных собственных частотах на краях пластинки наблюдались как узлы, так и пучности колебаний [1, 2]. Наблюдение формы колебаний поверхности производилось оптическим интерференционным методом. Более подробно обстановка опытов описана в предыдущих работах автора [1, 2].

Сравнение экспериментально определенных частот с вычисленными для различных видов колебаний дано в таблице. В столбце «f_{mn}» обозначены формы колебаний поверхности, причем индекс m соответствует числу узловых окружностей, индекс n — числу узловых диаметров.

Под рубриками «пластинка 1» и «пластинка 2» даны сведения соответственно о двух исследованных нами турмалиновых пластинках Z-среза: пластинка 1 — диаметром 16,8 *мм* и толщиной 0,84 *мм*, и пластинка 2— диаметром 20 *мм* той же толщины. В столбцах 1 даны собственные частоты

* Доложено на Всесоюзной научной сессии, посвященной столетию со дня рождения А. С. Попова, в Москве 10 июня 1959 г.

f_{mn}	Пластинка 1					Пластинка 2				
	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
f_{20}	—	425	1513	1248	194	286,05	311	1270	1049	137
f_{30}	—	665	2070	1590	446	470,53	486	1736	1334	314
f_{40}	883,57	884	2620	1938	—	674,80	666	2203	1629	
f_{50}	1158,05	1160								
f_{60}	1421,22	1390								
f_{31}	751,03	784				568,61 568,84	576			
f_{41}	1014,79 1016,55	1025				780,31 781,19	750			
f_{51}	1282,00 1284,50	1268								
f_{32}	873,55 873,85	892				666,97 667,15	654			
f_{42}	1141,40 1141,87	1135								
f_{52}	1411,70 1413,75	1380								
f_{23}	728,38 729,25	750			569					404
f_{33}	993,62	999				765,28 765,76	733			
f_{43}	1265,30 1267,56	1240								
f_{53}	1541,53	1490				641,55 642,03	625			
f_{24}		854								
f_{34}	1113,55 1114,95	1110								
f_{35}	1232,85 1233,58	1208								

соответствующих колебаний, определенные нами экспериментально, причем в фигурные скобки заключены дублетные частоты.

В столбцах 2, 3, 4 и 5 даны собственные частоты $\omega_{mn}/2\pi$, рассчитанные соответственно для колебаний мембранного типа * продольных колебаний по Петржилке типа A и B [4], колебаний изгиба по Кирхгофу [5]. Все частоты даны в килогерцах. Из таблицы видно хорошее совпадение измеренных частот с рассчитанными для колебаний мембранного типа.

Для сравнительно толстых пластинок (отношение диаметра к толщине ≈ 20) это само по себе является интересным фактом и позволяет легко рассчитывать спектр собственных частот данного вида колебаний.

Дадим математический анализ явления дублетного расщепления. Уравнение собственных колебаний мембраны имеет вид:

$$\frac{\partial_2 U}{\partial t^2} - a^2 \Delta U = 0,$$

где a — постоянная, зависящая от упругих констант, плотности и геометрических параметров пластинки. Для круглых пластинок в стационарном случае будем искать решение в виде $U = U_0(r, \varphi)\sin\omega t$, и получим для амплитуды уравнение $\Delta U + k^2 U = 0$, где $k = \omega/a$. Отыскивая решение в виде $U_0(r, \varphi) = R(r)\,\Phi(\varphi)$, получим $U_{mn} = A_{mn}\sin(\omega_{mn}t)\,J_n(k_m^n r)\begin{cases}\sin n\varphi\\ \cos n\varphi\end{cases}$,

где $J_n(k_m^n r)$ — функция Бесселя.

Таким образом, мы имеем два класса решений в зависимости от угла φ, т. е. колебания с частотой ω_{mn} являются двукратно вырожденными.

* Собственные частоты ω_{mn} рассчитывались по приведенной ниже формуле (1), в которой постоянная a определялась для каждой пластинки как среднее, вычисляемое из ряда значений частот, соответствующих различным числам узловых окружностей и диаметров.

Форма колеблющейся поверхности при таких колебаниях представляет собой систему пучностей и узловых линий. Система узловых линий может быть разделена на две системы: одну, состоящую из концентрических окружностей и другую, состоящую из условных диаметров.

Собственная частота ω_{mn} для таких колебаний может быть найдена из уравнения системы узловых окружностей [6] $I_n(k_m^n r) = 0$. Обозначим корень функции Бесселя $(k_m^n R_m) = \alpha_m^n$, где $m = 1, 2, 3, \ldots$ номер корня, $n = 0, 1, 2, \ldots$ порядок функции Бесселя, k_m^n — значения параметра k, соответствующие значениям $M\,\alpha_m^n$ корней функции Бесселя.

При собственных колебаниях m соответствует числу узловых концентрических окружностей, а n — числу узловых диаметров. Так как $k_m^n = \frac{\omega_{mn}}{a}$, то

$$\omega_{mn} = \frac{\alpha_m^n a}{R_m}, \tag{1}$$

где R_m — радиус m-ой узловой окружности данной формы колебаний. Теория мембранных колебаний рассматривалась многими авторами и, в частности, весьма детально Рэлеем [6].

Снятие вырождения может произойти за счет наличия малого возмущения. В реальной пластинке причиной такого возмущения может являться некоторая анизотропия (неоднородность) пластинки или граничных условий, приводящая к искажению формы волновой поверхности ее колебаний, а значит и изоэластической кривой, получаемой в результате пересечения волновой поверхности плоскостью пластинки.

Турмалиновая пластинка с плоскостью, нормальной к электрической оси (Z-срез), изотропна для колебаний, распространяющихся в плоскости пластинки и изоэластическая кривая для нее — окружность [4, 7]. Поэтому для круглой турмалиновой пластинки Z-среза ее контур является изоэластической кривой. В этом случае характер колебаний всех точек на границе пластинки одинаков, что приводит к вырождению по углу φ. Если же под действием малого возмущения происходит отступление формы изоэластической кривой от формы реального контура, то появляется зависимость от угла φ и вырождение снимается.

Отклонение формы изоэластической кривой от формы контура может происходить либо вследствие отклонения формы реального контура пластинки от окружности, либо вследствие отклонения изоэластической кривой от окружности в результате наличия некоторой анизотропии пластинки, либо, наконец, вследствие одновременного отклонения от окружности как изоэластической кривой, так и реального контура.

Не задаваясь физическими причинами отклонения формы изоэластической кривой от формы контура будем считать величину этого отклонения $\delta r = r \cdot \delta(\varphi)$ характеристикой малого возмущения, приводящего к снятию вырождения.

Решением при наличии возмущения в первом приближении будет

$$U = U(r + \delta r,\ \varphi) = U^0(r, \varphi) + U^{0\prime}(r, \varphi)\,\delta r,$$

где U^0 — решение невозмущенной задачи. Тогда на m-ой концентрической узловой линии решение при наличии возмущения будет иметь вид:

$$0 = A_{mn} \sin(\omega_{mn} t)\,[J_n(k_m^n R_m) \cdot \cos n(\varphi - \beta) + R_m \cdot k_m^n J_n'(k_m^n R_m)\,\delta(\varphi)], \tag{2}$$

где R_m — радиус m-ой концентрической узловой линии в отсутствии возмущения, β — угол, определяющий начало отсчета, т. е. угол между каким-либо фиксированным направлением и любым узловым диаметром, принятым за начальный. В случае узла на краю пластинки R_m равно радиусу пластинки.

Для определения характера зависимости частоты ω_{mn} от β, следуя известному методу (см. [6], стр. 358) умножаем выражение (2) на $\frac{1}{\pi}\cos n(\varphi-\beta)$ и интегрируем по φ от 0 до 2π. При этом мы получаем

$$A_{mn}\cdot\sin(\omega_{mn}t)\Big[J_n(k_m^nR_m)\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\cos^2 n(\varphi-\beta)\,d\varphi+$$
$$+R_mk_m^nJ_n'(k_m^nR_m)\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\delta(\varphi)\cos^2 n(\varphi-\beta)\,d\varphi\Big]=$$

$$=A_{mn}\sin(\omega_{mn}t)\Big[J_n(k_m^nR_m)+R_m\cdot k_m^nJ_n'(k_m^nR_m)\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\delta(\varphi)\cos^2 n(\varphi-\beta)\,d\varphi\Big]=$$

$$=A_{mn}\sin(\omega_{mn}t)\Big\{J_n\Big[k_m^nR_m\Big(1+\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\delta(\varphi)\cdot\cos^2 n(\varphi-\beta)\,d\varphi\Big)\Big]\Big\}=$$
$$=A_{mn}\sin(\omega_{mn}t)\,J_n(k_m^nR_m')=0,\ \text{где}\ R_m'=R_m\,[1+b(\beta)]$$

и

$$b(\beta)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\delta(\varphi)\cos^2 n(\varphi-\beta)\,d\varphi.$$

Таким образом, для концентрических узлов колебаний $J_n(k_m^nR_m')=0$, откуда собственная частота возмущенного колебания будет

$$\omega_{mn}'=\frac{\alpha_m^na}{R_m'}=\frac{\alpha_m^na}{R_m\,[1+b(\beta)]}=\frac{\alpha_m^na}{R_m\Big(1+\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\delta(\varphi)\cos^2 n(\varphi-\beta)\,d\varphi\Big)},\qquad(3)$$

где α_m^n — корень функции Бесселя, R_m — радиус m-й узловой окружности при отсутствии возмущения, R_m' — некоторый эффективный радиус m-й узловой окружности с учетом возмущения [6].

При отсутствии возмущения, т. е. при $\delta(\varphi)=0$, выражение (3) для частоты возмущенных колебаний ω_{mn}' переходит в выражение для частоты невозмущенных колебаний — $\omega_{mn}=\alpha_m^na\,/\,R_m$.

Для идеально изотропной круглой пластинки угловое положение узловых диаметров неопределенно, так как в ней нет каких-либо преимущественных направлений и узловые диаметры расположены равномерно вокруг центра; в остальном — положение их произвольно. Определен только угол между соседними диаметрами одной и той же системы, равный π/n, где $n=1, 2, \ldots$ — число узловых диаметров. Поэтому угол β в такой идеальной пластинке неопределен. Отсюда следует независимость собственной частоты ω_{mn} невозмущенных колебаний от положения системы узловых диаметров, что характеризуется независимостью ω_{mn} от параметра β. При наличии возмущения $\delta(\varphi)\neq 0$ положение системы узловых диаметров перестает быть неопределенным и оказывается связанным с каким-то направлением в пластинке, определяемым имеющимся в реальной пластинке малым возмущением — некоторой анизотропией свойств или граничных условий. Вследствие этого угол β при каком-либо фиксированном начале его отсчета становится вполне определенным. Это подтверждается опытными данными, а именно тем, что при повороте пьезопластинки относительно электродов вокруг оси, нормальной к ее плоскости, фигура колебания связана с пластинкой и вращается вместе с ней [1]. Собственная частота ω'_{mn} в этом случае, как следует из выражения (3), при $\delta(\varphi) \neq 0$, также становится зависимой от параметра β.

Согласно известной теореме об экстремальности собственных частот любой колебательной системы [6, стр. 359], [8], в нашем случае значения параметра β, а значит и расположения систем узловых диаметров должны быть такими, при которых частота ω'_{mn} принимала бы экстремальные значения.

Чтобы освободиться от задания направления начала отсчета и исключить многозначность угла β, так как он может быть азимутом любого из n узловых диаметров, будем искать разность параметров β, соответствующих максимальному и минимальному значению частоты.

Из требования экстремальности собственной частоты мы имеем $\partial\omega'_{mn}/\partial\beta = 0$, что соответствует условию $\partial b(\beta)/\partial\beta = 0$, т. е.

$$\frac{\partial}{\partial\beta}\int_0^{2\pi} \delta(\varphi)\cos^2 n(\varphi-\beta)\,d\varphi =$$

$$= -n\left(\sin 2n\beta \int_0^{2\pi} \delta(\varphi)\cos 2n\varphi\,d\varphi - \cos 2n\beta \int_0^{2\pi} \delta(\varphi)\sin 2n\varphi\,d\varphi\right) = 0.$$

Введя обозначения

$$\int_0^{2\pi} \delta(\varphi)\cos 2n\varphi\,d\varphi \equiv A = \text{const},$$

$$\int_0^{2\pi} \delta(\varphi)\sin 2n\varphi\,d\varphi \equiv B = \text{const},$$

мы получаем $A\sin 2n\beta - B\cos 2n\beta = 0$, или $\operatorname{tg} 2n\beta = \dfrac{B}{A} = C = \text{const}$.

Поскольку период tg равен π, то

$$\beta_2 - \beta_1 = \pi/2n, \tag{4}$$

где $n = 1, 2, 3, \ldots$ — число узловых диаметров. Из выражения (4) следует, что имеются два допустимых положения систем узловых диаметров, одно из которых отвечает максимальному значению частоты возмущенного колебания, а другое — ее минимальному значению.

При этом формы колебаний пластинки на обеих частотах дублета отличаются только тем, что система узловых диаметров соответствующая одной частоте, повернута относительно такой же системы диаметров на другой частоте на угол $\beta_2 - \beta_1 = \pi/2n$, т. е. диаметры одной системы делят пополам углы между диаметрами другой, что подтверждается опытными данными [1].

Таким образом, условие $\delta r \neq 0$ приводит к снятию вырождения, т. е. к дублетному расщеплению одной собственной частоты $\omega_{mn} = \alpha_m^n a/R_m$ на две различные частоты:

$$\omega'_{1mn} = \frac{\alpha_m^n a}{R_m[1+b(\beta_1)]} = \frac{\alpha_m^n a}{R_m\left[1+\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\delta(\varphi)\cos^2 n(\varphi-\beta_1)\,d\varphi\right]},$$

$$\omega'_{2mn} = \frac{\alpha_m^n a}{R_m[1+b(\beta_2)]} = \frac{\alpha_m^n a}{R_m\left[1+\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\delta(\varphi)\sin^2 n(\varphi-\beta_1)\,d\varphi\right]}.$$

Найдем величину дублетного расщепления

$$\Delta\omega'_{mn} = \omega'_{1mn} - \omega'_{2mn} = \frac{\alpha^n_m a}{R_m}\left(\frac{1}{1+b(\beta_1)} - \frac{1}{1+b(\beta_2)}\right) = \tag{5}$$

$$= \omega_{mn}\frac{\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\delta(\varphi)\cos 2n(\varphi-\beta)\,d\varphi}{1+\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\delta(\varphi)\,d\varphi},$$

где произведением $b(\beta_1)\,b(\beta_2)$ пренебрегаем ввиду второго порядка малости его по $\delta(\varphi)$. Таким образом, $\Delta\omega'_{mn} = f(m, n, \delta(\varphi))$.

Попытаемся сделать некоторые заключения о физических причинах возникновения малого возмущения. Если бы $\delta(\varphi)$ не зависело от m и n, т. е. от формы колебаний, то для данного n из равенства (5) должно было бы следовать условие:

$$\frac{\Delta\omega_{m_1n}}{\Delta\omega'_{m_2n}} = \frac{\omega_{m_1n}}{\omega_{m_2n}}, \tag{6}$$

что на опыте не наблюдается.

Отсюда следует, что $\delta(\varphi)$ существенно зависит от формы колебаний, или, иначе говоря, влияние имеющейся в пластинке малой анизотропии свойств или граничных условий различно при различных формах колебаний.

Часто встречающимся отступлением формы контура пластинки или изоэластической кривой от окружности яляется небольшая эллиптичность. Однако в нашем случае δr и вызываемое им дублетное расщепление не могут быть обусловлены допущенной при обработке небольшой эллиптичностью контура пластинки или небольшой эллиптичностью изоэластической кривой, являющейся, например, следствием неточности среза. Действительно, если считать δr обусловленным небольшой эллиптичностью пластинки или изоэластической кривой, то, выражая δr через эксцентриситет ε эллипса, получим

$$\delta r = R\frac{\varepsilon^2}{2}\sin^2\varphi \text{ или } \delta(\varphi) = \frac{\varepsilon^2}{2}\cdot\sin^2\varphi. \tag{7}$$

Подставляя это значение $\delta(\varphi)$ в формулу (3), будем иметь следующее значение относительной величины дублетного расщепления

$$\frac{\Delta\omega'}{\omega'} = \frac{\varepsilon^2}{4}, \tag{8}$$

которое становится заметным лишь при достаточно больших значениях ε. Это противоречит нашим опытным данным, согласно которым для исследованных пластинок отклонение контура от окружности было меньше 0,05% диаметра пластинки, а значение относительной величины дублетного расщепления при этом оказалось равным сотым и даже десятым долям процента, что на 4—5 порядков выше значения ее рассчитанного по формуле (8).

То, что в наших опытах малое возмущение, вызывающее дублетное расщепление, имело более сложный характер, чем малая эллиптичность контура пластинки или изоэластической кривой, подтверждается еще и следующими положениями.

Пусть возмущение $\delta r \approx f(\varphi)$. Тогда на основании выражения (5) следует, что дублетное расщепление не будет наблюдаться для видов колебаний, характеризуемых такими номерами порядка n функции Бесселя (n — соответствует также числу узловых диаметров), для которых

$f(\varphi)$ ортогональна функции $\cos 2n\varphi$. В частности, для разобранного нами случая малой эллиптичности границы пластинки, дублетное расщепление на основании сказанного должно наблюдаться только для колебаний с одним узловым диаметром ($n = 1$), описываемых функцией Бесселя 1-го порядка, так как для $n > 1$, согласно выражениям (5) и (7). соблюдается условие

$$\Delta\omega \sim \int_0^{2\pi} \sin^2\varphi \cos 2n\varphi d\varphi \equiv 0.$$

В нашем случае колебания с $n = 2, 3, 4, \ldots$ также показывают дублетное расщепление (см. табл. и работы [1, 2]). Таким образом, малым возмущением у данных пластинок не может быть малая эллиптичность их контура или изоэластической кривой.

Нами были исследованы колебания целого ряда круглых, турмалиновых пластинок Z-среза, причем всегда обнаруживалось явление дублетного расщепления собственных частот колебаний мембранного типа. Это позволяет заключить, что дублетное расщепление присуще самой природе таких пьезопластинок и данному виду колебаний последних, т. е. в реальной пластинке всегда имеется какая-то небольшая анизотропия свойств или граничных условий, вызывающая малое возмущение, приводящее к снятию вырождения и дублетному расщеплению собственных частот. Можно также считать, что явление дублетного расщепления собственных частот колебаний пьезорезонаторов может иметь место не только для турмалиновых пластинок, но и для пьезорезонаторов из других материалов, например, из кварца и керамики титаната бария.

Исходя из теории механических колебаний пластин, в частности из работ Рэлея [6], можно ожидать явления дублетного расщепления при колебаниях пьезорезонаторов не только для колебаний мембранного типа, но и для других видов колебаний как, например, продольных по Ляву [3] и изгиба по Кирхгофу [5].

Следует также заметить, что явление дублетного расщепления собственных частот пьезорезонаторов аналогично таковому для электромагнитных колебаний в цилиндрических волноводах и резонаторах, описанному в работе [9].

В заключение, как нам кажется, необходимо хотя бы кратко остановиться на том влиянии, которое может оказывать дублетное расщепление на работу пьезорезонаторов при их практическом использовании. В радиотехнике, при использовании пьезорезонаторов в качестве стабилизаторов и фильтров частоты, дублетное расщепление может привести или к нарушению одноволновости пьезорезонатора при сравнительно большой величине дублета, или к уширению полосы пропускания при очень малой величине дублета. В ультраакустике, например, при работе пьезорезонаторов в качестве излучателей ультразвука, в случае недостаточной стабильности частоты задающего генератора, дублетное расщепление может привести к скачкообразному изменению частоты, структуры и интенсивности создаваемого ультразвукового поля. В оптотехнике при использовании пьезорезонаторов, например, для высокочастотной модуляции света в дифракционных и интерференционных модуляторах, например, в световых дальномерах, дублетное расщепление может привести не только к изменению частоты и глубины модуляции света, но и вообще к срыву модуляции.

Из сказанного видно, что дальнейшая работа по выяснению физических причин, вызывающих явление дублетного расщепления и способов его устранения представляет несомненный теоретический и практический интерес.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. А. Финагин. О дублетном расщеплении резонансных частот колебаний турмалиновой пьезопластинки. Ж. техн. физ., 1957, 27, 9, 2185—2187.
2. Б. А. Финагин. Исследование спектра и формы колебаний поверхности пьезопластинок. Ж. техн. физ., 1960, **30**, 9, 1115—1123.
3. А. Ляв. Математическая теория упругости. М., ОНТИ, 1935.
4. V. Petrzilka. Längs und Biegungsschwingungen von Turmalinplatten. Ann. Phys., 1932, 15, 881—902.
5. G. Kirchoff. Ueber die Schwingungen einer kreisförmigen elastischen Scheibe. Ann. Phys., 1850, **1**, 10, 258—264.
6. Д. В. Рэлей. Теория звука, т. 1, М., ГИТТЛ, 1955.
7. W. Voigt. Lehrbuch d. Kristallphysik, Lpz., 1928.
8. С. П. Стрелков. Введение в теорию колебаний. М., ГИТТЛ, 1950.
9. В. Б. Штейншлейгер. Явления взаимодействия волн в электромагнитных резонаторах. М., 1955.

Ленинград

Поступила в редакцию
1 июля 1960 г.