Нам представляется, что предлагаемый способ выгодно сочетает простоту с точностью получаемых экспериментальных результатов. Практика использования дандого способа позволяет нам рекомендовать ее для применения в работах научно-исследовательского и прикладного характера.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Н. Феофанов. Труды семинара по физике и применению ультразвука, посвященного памяти проф. М. Я. Соколова, Л., 1958, стр. 173.
2. И. И. Первушин. Методика измерения скорости ультразвука (дипл. работа). МГУ, 1959.
3. У. Р. Мэзон. Пьезоэлектрические кристаллы и их применение в ультраакустике. М., ИЛ, 1952.
4. Л. Бергман. Ультразвук и его применение в науке и технике, М., ИЛ., 1957.

Кафедра молекулярной физики Московского государственного университета

Поступило в редакцию 13 мая 1960 года

К ВОПРОСУ О ГРАНИЦАХ ПРИМЕНИМОСТИ МЕТОДА ПЛАВНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ В ЗАДАЧЕ О РАСПРОСТРАНЕНИИ ИЗЛУЧЕНИЯ ЧЕРЕЗ СРЕДУ С НЕОДНОРОДНОСТЯМИ

В. В. Писарева

В связи с работой [1] и статьей Широковой [2] целесообразно указать на следующее.

В работе [2] границы применимости метода плавных возмущений находятся из условий малости модуля среднего значения 2-го приближения по сравнению с нулевым. Однако из простых соображений ясно, что область применимости приближенного решения $\psi = \psi_0 + \alpha\psi_1$ можно определить, сравнивая среднеквадратичные значения 2-го и 1-го приближений, $\alpha^2\sqrt{\overline{\psi_2^2}}$ и $\alpha\sqrt{\overline{\psi_1^2}}$. Здесь ψ_0, $\alpha\psi_1$, $\alpha^2\psi_2$ — нулевое, 1-е и 2-е приближения в методе плавных возмущений (см. [2]). Требуя выполнения неравенства $\alpha^2|\overline{\psi_2}| \ll \alpha\sqrt{\overline{\psi_1^2}}$, мы получим, по крайней мере, необходимые условия справедливости приближенного решения, поскольку всегда имеет место соотношение $|\overline{\psi_2}| \leqslant \sqrt{\overline{\psi_2^2}}$. Используя для $\overline{\psi_2}$ выражение (29) работы [2], получаем, что для того, чтобы неравенство $\alpha^2|\overline{\psi_2}| \ll \alpha\sqrt{\overline{\psi_1^2}}$ имело место, необходимо выполнение тех же условий, что и полученные в работе [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Писарева. О границах применимости метода плавных возмущений в задаче о распространении излучения через среду с неоднородностями. Акуст. ж., 1960, 6, 1, 87—91.
2. Т. А. Широкова. Второе приближение в методе плавных возмущений. Акуст. ж., 1959, 5, 4, 485—489.

Н.-и. Радиофизический институт при Горьковском государственном университете

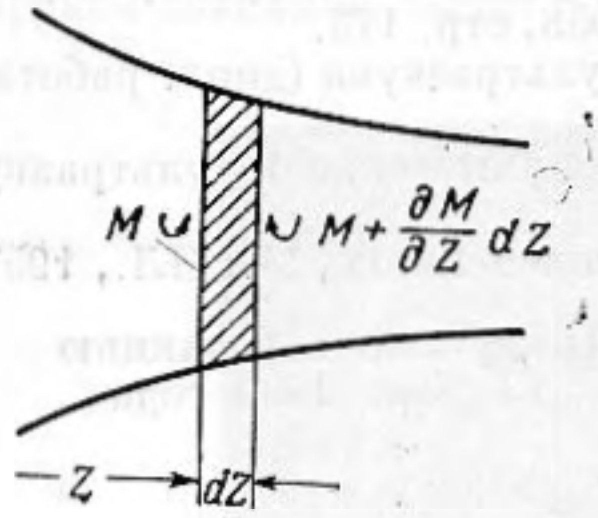
Поступило в редакцию 20 декабря 1960 г.

КРУТИЛЬНЫЕ УЛЬТРАЗВУКОВЫЕ КОНЦЕНТРАТОРЫ

А. В. Харитонов

Для получения больших амплитуд смещения и деформации в твердых телах широко используются резонансные стержни переменного сечения, получившие в литературе название концентраторов. Первоначально для указанных целей применялись концентраторы, работающие на продольных колебаниях; теория и методы расчета таких концентраторов достаточно полно изложены в работах [1—3]. В последние годы в связи с развитием техники ультразвуковой сварки возник интерес к концентраторам, в которых используются крутильные колебания [4—6]. Данное сообщение имеет целью показать, что для их расчета можно использовать результаты анализа концентраторов, работающих на продольных колебаниях.

Предположим, что крутильный концентратор имеет форму сплошного или полного осесимметричного стержня переменного сечения, причем максимальный поперечный размер стержня значительно меньше длины волны. В этом случае можно считать, что поперечные сечения при колебаниях остаются плоскими и перпендикулярными оси стержня, радиусы, проведенные в сечениях, не искривляются, а напряжения, действующие в сечениях, касательны к ним, перпендикулярны радиусам и пропорциональны расстоянию от оси стержня. При сделанных допущениях задачу можно решать в одномерном приближении и записать уравнение вращательного движения элемента dz (см. фигуру) в виде



$$\rho I dz \frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} = \frac{\partial M}{\partial z} dz,$$

где $\theta = \theta(z, t)$, $I = I(z)$ — угловое смещение и полярный момент инерции сечения с координатой z, $M = M(z, t)$ — скручивающий момент в этом сечении, ρ — плотность материала стержня.

Подставляя $M = \mu I \partial\theta/\partial z$, где μ — модуль сдвига, и рассматривая случай установившихся синусоидальных колебаний, получим дифференциальное уравнение для угловых смещений:

$$\frac{d^2\theta}{dz^2} + \frac{1}{I}\frac{dI}{dz}\frac{d\theta}{dz} + k_t^2\theta = 0, \tag{1}$$

где $k_t = \omega/c_t$, ω — угловая частота колебаний, $c_t = \sqrt{\mu/\rho}$ — фазовая скорость поперечных волн в материале стержня.

Сравнение уравнения (1) с дифференциальным уравнением для продольных смещений в стержне переменного сечения [1, 2]

$$\frac{d^2u}{dz^2} + \frac{1}{S}\frac{dS}{dz}\frac{du}{dz} + k_l^2 u = 0,$$

показывает, что все выводы и расчетные соотношения, полученные для концентраторов, работающих на продольных колебаниях [1—3], остаются справедливыми и для крутильных концентраторов, если заменить u, F, k_l, k_l', c_l, c_l', E, S на соответствующие величины θ, M, k_t, k_t', c_t, c_t', μ, I, а под величиной N^2 понимать отношение полярных моментов инерции начального и конечного сечений концентратора.

Представляет интерес определить формы стержней, характерной особенностью которых является постоянство фазовой скорости распространения крутильных (или продольных) волн вдоль стержня. Для таких стержней справедливо общее решение задачи о колебаниях концентратора, изложенное в работе [2].

Подстановкой $y = \theta/\sqrt{I}$ можно привести уравнение (1) к виду:

$$\frac{d^2y}{dz^2} + \left[k_t^2 - \frac{1}{2I}\frac{d^2I}{dz^2} + \frac{1}{4I^2}\left(\frac{dI}{dz}\right)^2\right] y = 0.$$

Для стержней с фазовой скоростью распространения крутильных волн, независящей от z,

$$\frac{1}{2I}\frac{d^2I}{dz^2} - \frac{1}{4I^2}\left(\frac{dI}{dz}\right)^2 = \beta^2 = \text{const}, \tag{2}$$

и уравнение (1) имеет решение:

$$\theta = \left(A\cos k_t' z + B\sin k_t' z\right)/\sqrt{I},$$

где $k_t' = \sqrt{k_t^2 - \beta^2}$, а фазовая скорость крутильных волн

$$c_t' = \frac{\omega}{k_t'} = \frac{c_t}{\sqrt{1 - (\beta c_t/\omega)^2}}.$$

Уравнение (2) легко решается после подстановки $I = v^2$ и определяет интересующие нас формы стержней:

$$I(z) = \begin{cases} (Cz + D)^2; & \beta = 0; \\ (Ce^{\beta z} + De^{-\beta z})^2; & \beta^2 > 0; \\ (C\cos bz + D\sin bz)^2; & \beta^2 < 0; \quad \beta = jb. \end{cases} \tag{3}$$

Первое семейство из (3), частным случаем которого является стержень постоянного сечения ($C = 0$), характеризуется отсутствием дисперсии скорости ($c_t' = c_t$), второе — отрицательной дисперсией скорости ($c_t' = c_t / \sqrt{1 - (\beta c_t / \omega)^2}$), третье — положительной дисперсией скорости ($c_t' — c_t / \sqrt{1 + (bc_t / \omega)^2}$).

Для случая продольных колебаний теми же свойствами обладают стержни, у которых по закону (3) изменяется площадь поперечного сечения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Г. Меркулов. Теория ультразвуковых концентраторов. Акуст. ж., 1957, 3, 3, 230—238.
2. Л. Г. Меркулов, А. В. Харитонов. Теория и расчет составных концентраторов. Акуст., ж., 1959, 5, 2, 183—190.
3. Л. О. Макаров. О работе стержневого концентратора в нагруженном режиме. Акуст., ж., 1959, 5, 3, 373—374.
4. Л. О. Макаров. Использование крутильных колебаний для ультразвуковой сварки. Сб. докладов «Примен. ультразвука в технологии машиностроения», М., 1960.
5. И. Д. Глизбург, И. И. Краснов, Г. В. Сысолин, В. В. Филимонов. Оборудование для ультразвуковой сварки. Там же.
6. Л. О. Макаров. Стержневой ультразвуковой концентратор. Авт. св. СССР № 127079 с приоритетом от 18 июля 1959 г.

Ленинградский электротехнический институт им. В. И. Ульянова (Ленина)

Поступило в редакцию 27 марта 1961 г.