АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том VIII 1962 Вып. 1

ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В АКУСТИЧЕСКИХ ПОЛЯХ, ВОЗНИКАЮЩИХ ПРИ КОЛЕБАНИЯХ СФЕРИЧЕСКОГО СЕГМЕНТА

О. Г. Козина, Г. И. Макаров, Н. Н. Шапошников

Рассматривается акустически жесткая сфера, на поверхности которой расположены поршневые мембраны, имеющие вид сферических сегментов. Считается, что до момента $t=0$ окружающая среда и мембрана находятся в покое, а в момент $t=0$ сегменты начинают двигаться по некоторому определенному закону. Рассматриваются переходные процессы для трех случаев: а) на поверхности сферы расположен один излучающий сегмент, б) на поверхности сферы симметрично расположено два излучающих сегмента, движущихся синфазно, в) на поверхности сферы симметрично расположены два излучающих сегмента, движущихся в противофазе.

Будем считать, что в безграничной жидкой среде, характеризуемой плотностью ρ и скоростью звука c, расположена жесткая сфера радиуса R, центр которой совмещен с началом сферической системы координат. Предполагается, что на сфере имеются один или два движущихся сферических сегмента, размеры которых определяются центральным углом θ_0.

Эти сегменты и окружающая сферу среда до момента $t = 0$ находятся в покое. В момент $t = 0$ сегменты начинают движение как мембраны по закону $f(t)$:

$$U_r\big|_{r=R} = \begin{cases} f(t), & 0 \leqslant \theta \leqslant \theta_0 \\ 0, & \theta_0 \leqslant \theta \leqslant \pi - \theta_0 \\ \pm f(t), & \pi - \theta_0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \end{cases} \tag{1}$$

где U_r — радиальная составляющая скорости мембраны.

При выборе в граничных условиях (1) знака плюс перед $f(t)$ оба сегмента движутся синфазно, и в этом случае мы будем называть их в дальнейшем пульсирующими сегментами (фиг. 1, *а*). В случае же противофазного движения мы назовем их осциллирующими сегментами (фиг. 1, *б*).

Для односторонне излучающего сегмента (фиг. 1, *в*) граничные условия представятся так:

$$U_{|r=R} = \begin{cases} f(t), & 0 \leqslant \theta \leqslant \theta_0 \\ 0, & \theta_0 \leqslant \theta \leqslant \pi. \end{cases} \tag{2}$$

Если теперь найти решение волнового уравнения с учетом нулевых начальных данных и подчинить его граничным условиям (1) или (2), то получим для пульсирующих, осциллирующих и односторонне излучающих сегментов соответственно

$$P_1 = \sum_{n=0}^{\infty} D_{2n}(r, t)\,[P_{2n-1}(\cos\theta_0) - P_{2n+1}(\cos\theta_0)]\,P_{2n}(\cos\theta), \tag{3}$$

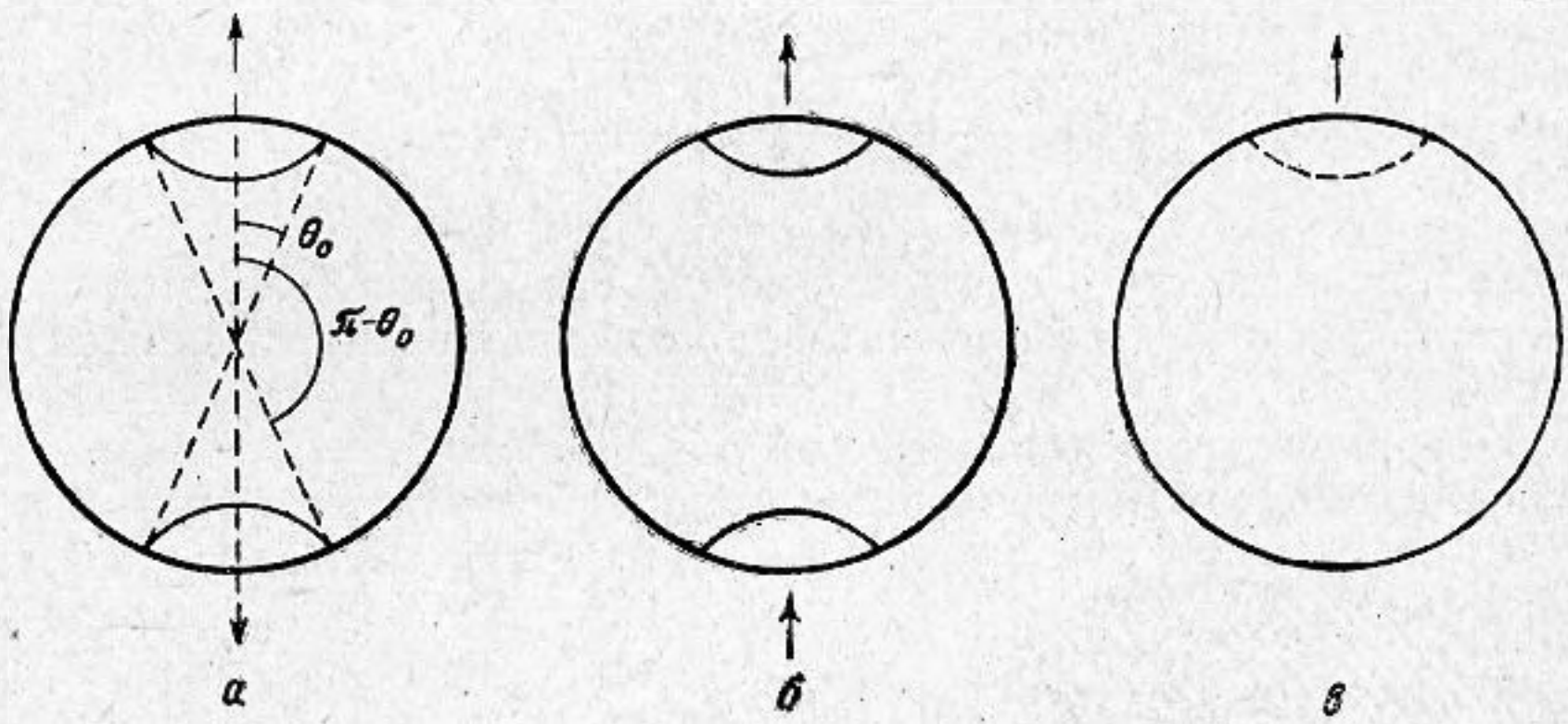
$$P_2 = \sum_{n=0}^{\infty} D_{2n+1}(r, t)\,[P_{2n}(\cos\theta_0) - P_{2n+2}(\cos\theta_0)]\,P_{2n+1}(\cos\theta), \tag{4}$$

$$P_3 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2} D_n(r, t)\,[P_{n-1}(\cos\theta_0) - P_{n+1}(\cos\theta_0)]\,P_n(\cos\theta), \tag{5}$$

где $P_n(\cos\theta)$ — полином Лежандра. Радиальная часть D_ν имеет вид

$$D_\nu(r, t) = \frac{\rho c}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} f(s)\,\frac{\zeta_\nu^{(1)}\left(\frac{isr}{c}\right)}{\zeta_\nu^{(1)\prime}\left(\frac{isR}{c}\right)}\,e^{st}\,ds \tag{6}$$

и представляет собой сферическую волну с передним фронтом $ct = r - R$, а все решение — суперпозицию сферических волн; $f(s)$ — спектр сигна-



Фиг. 1

ла (1), излученного сегментом, а $\zeta_\nu^{(1)}(x)$ связано с функцией Ханкеля следующим образом:

$$\zeta_\nu^{(1)}(x) = \sqrt{\frac{\pi x}{2}}\,H^{(1)}_{\nu+\frac{1}{2}}(x). \tag{7}$$

Исследование построенного решения проводится различно в зависимости от области, где ищется решение. Поле в окрестности волновых фронтов находится методом асимптотических оценок, предложенным Петрашенем и Макаровым [1, 2], а поле вдали от фронта — с помощью теоремы о вычетах.

При рассмотрении окрестности волновых фронтов ряд, представляющий решение, разбивается на две части: $\sum\limits_0^\infty = \sum\limits_0^{n_0} + \sum\limits_{n_0}^\infty$. Первая сумма справа характеризует медленно меняющуюся часть поля и в окрестности волновых фронтов во внимание не принимается. При рассмотрении же второй суммы используется большой параметр задачи ($n > n_0$), что облегчает вычисление радиальных функций D_ν. Для этого применяется метод наибыстрейшего спуска. Положим, что $f(s)$ в интеграле (6) имеет вид $f(s) = 1/s$, что соответствует спектру временно́й функции в виде единичного толчка скорости. Тогда после замены переменных $isR/c = \nu' z$, где $\nu' = \nu + {}^1/_2$, интеграл (6) примет вид:

$$D_\nu(r, t) = \frac{\rho c}{2\pi}\int\limits_{\infty+i\sigma_1}^{-\infty+i\sigma_1} \frac{1}{z}\,\frac{\zeta_\nu^{(1)}(\nu' z r_0)}{\zeta_\nu^{(1)\prime}(\nu' z)}\,e^{-\frac{i\nu' z c t}{R}}\,dz. \tag{8}$$

Будем считать, что главная часть интеграла (8) расположена в области, где аргумент бесселевых функций больше их номера (в этом нетрудно убедиться), тогда можно воспользоваться асимптотическими представле-

ниями функции $\zeta_\nu^{(1)}(x)$ и ее производной и выделить фазовую функцию в интеграле. Она оказывается равной

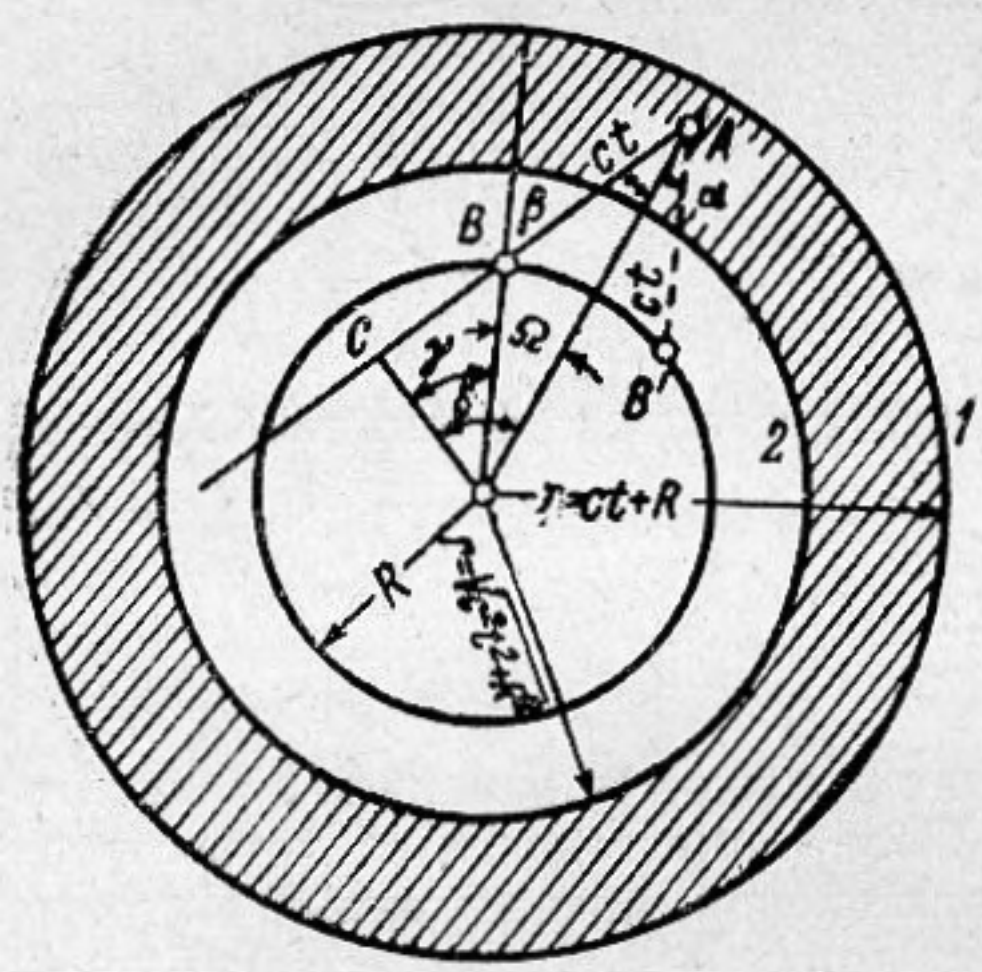
$$F(z) = \sqrt{(\nu' z r_0)^2 - (\nu')^2} - \nu' \arccos \frac{1}{z r_0} - \sqrt{(\nu' z)^2 - (\nu')^2} + \nu' \arccos \frac{1}{z} - \\ - \nu' \frac{zct}{R} = \nu' \psi(z). \tag{9}$$

Уравнение, определяющее положение седловых точек z_0, имеет вид:

$$r_0 \sqrt{1 - \frac{1}{z_0^2 r_0^2}} - \sqrt{1 - \frac{1}{z_0^2}} = \frac{ct}{R}. \tag{10}$$

Легко показать, что область применимости метода стационарной фазы ограничена некоторым сферическим поясом, заштрихованным на фиг. 2 (область *1*).

Рассматривая уравнение (10) для седловой точки z_0, можно придать последней простой геометрический смысл. Действительно, пусть мы имеем какую-нибудь точку наблюдения A внутри указанного сферического пояса. Проведем из нее окружность радиуса ct, которая пересечет нашу сферу в каких-нибудь двух точках B и B'. Соединим их с точкой наблюдения A; тогда можно показать, что выражение для z_0 имеет вид $z_0 = 1/\sin\beta$, а так как интеграл (8) вычисляется в окрестности седловой точки, то, следовательно, он имеет смысл пучка лучей, вышедших из точки поверхности сферы под углом, близким к углу β. Это значит, что основную часть поля в точке A создают выделенные нами две точки B и B', которые назовем «питающими».



Фиг. 2

Геометрическое место концов лучей, вышедших из каждой точки поверхности сферы под углом $\sin\beta = 1/z_0$, представляет в пространстве поверхность $z_0 = \text{const}$. Эти поверхности имеют вид сфер. Поверхность $z_0 = \infty$ определяет передний фронт элементарной сферической волны. Если же из каждой точки поверхности излучателя провести касательную длиной ct, то получится поверхность $z_0 = 1$, совпадающая с внутренней окружностью (фиг. 2), ограничивающая область применимости метода наибыстрейшего спуска.

Таким образом, неприменимость этого метода на больших расстояниях от фронта связана с тем, что соответствующие «питающие точки» выходят за пределы геометрической видимости, что приводит к плавному изменению поля, в то время как метод наибыстрейшего спуска применим лишь для выделения быстро меняющихся частей.

Само наличие переходных процессов в области *2* (фиг. 2) связано с явлениями дифракции. Поэтому область *2* будем называть областью дифракционных переходных процессов.

Для выделения волновых фронтов и исследования поля в их окрестности необходимо выполнить суммирование рядов, представляющих решение. С этой целью подставим в ряды (3), (4), (5) найденное значение радиальной функции D_ν и заменим полиномы Лежандра $P_n(\cos\theta_0)$ интеграль-

ным представлением Меллера по формуле

$$P_n(\cos\theta_0) = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\int\limits_0^{\theta_0} \frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi\, d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi - \cos\theta_0}}, \tag{11}$$

а $P_n(\cos\theta)$ — асимптотической формулой, справедливой при $n > n_0$ и $\theta \neq 0,\ \pi$;

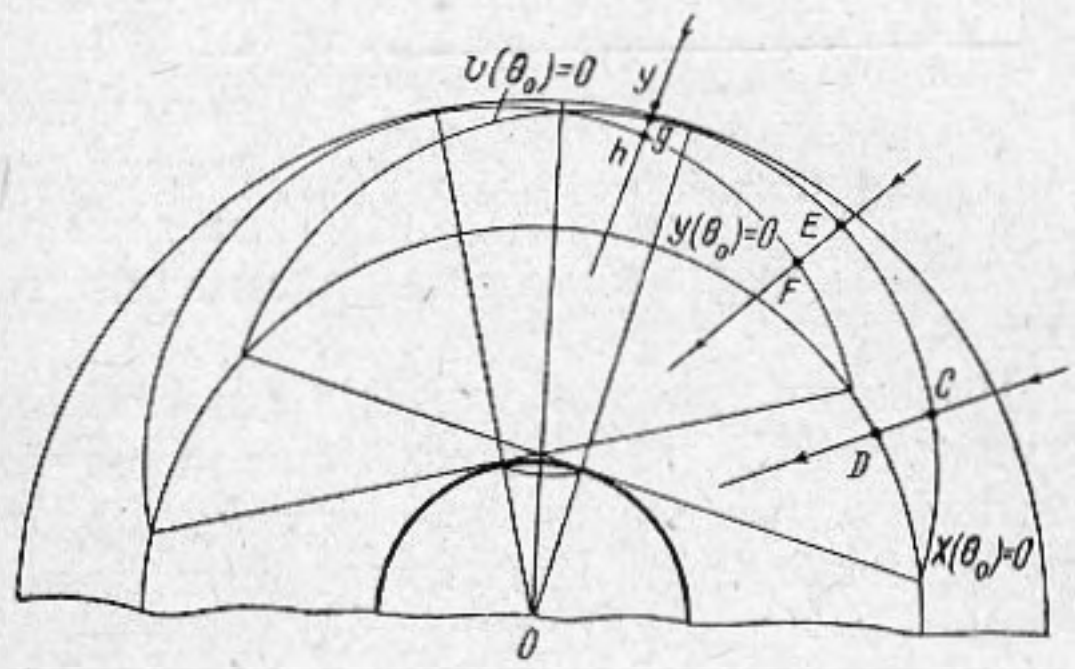
$$P_n(\cos\theta) = \sqrt{\frac{2}{n\pi\sin\theta}}\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta + \frac{\pi}{4}\right].$$

Тогда получаем для пульсирующего сегмента вместо (3) следующую формулу:

$$P = \frac{\rho c}{\pi}\frac{R}{r}\sqrt{\frac{\sin 2\alpha\cos\beta}{\sin\theta}}\sqrt{\frac{R}{ct}}\int\limits_0^{\theta_0}\frac{\sin\varphi}{\sqrt{\cos\varphi-\cos\theta_0}}\sum_{n=n_0}^{\infty}\frac{\sin\left[\left(2n+\frac{1}{2}\right)X(\varphi)\right]}{2n+\frac{1}{2}} +$$

$$+\sum_{n=n_0}^{\infty}\frac{\sin\left[\left(2n+\frac{1}{2}\right)Y(\varphi)\right]}{2n+\frac{1}{2}} + \sum_{n=n_0}^{\infty}\frac{\cos\left[\left(2n+\frac{1}{2}\right)V(\varphi)\right]}{2n+\frac{1}{2}} - \sum_{n=n_0}^{\infty}\frac{\cos\left[\left(2n+\frac{1}{2}\right)W(\varphi)\right]}{2n+\frac{1}{2}}, \tag{12}$$

где $X(\varphi) = \varphi - \theta + \Omega$, $Y(\varphi) = \varphi + \theta - \Omega$, $V(\varphi) = \varphi - \theta - \Omega$, $W(\varphi) = \varphi + \theta + \Omega$. Смысл углов Ω, α и β ясен из фиг. 3.



Фиг. 3

Аналогичные формулы получаем для осциллирующих и односторонне излучающих сегментов, если для первого $2n + {}^1/_2$ заменить на $2n + {}^3/_2$, а для последнего $2n \to n$. Для вычисления интеграла от первого слагаемого выражения (12) воспользуемся формулой

$$\sum_0^{\infty}\frac{\sin[(2n+1)X(\varphi)]}{2n+1}\begin{cases}\frac{\pi}{4} & x>0\\ -\frac{\pi}{4} & x<0,\end{cases}$$

аналогичной сумме из (7), у которой суммирование начинается с $n = 0$. При такой замене мы добавили конечное число непрерывных функций, т. е. получаемое при этом поле будет отличаться от исходного на некоторую медленно меняющуюся функцию. Это вполне допустимо, так как все наши вычисления вообще производятся с точностью до функции подобного рода.

Обозначим через φ_0 корень уравнения $X(\varphi_0) = 0$. Тогда при $\varphi_0 < \theta_0$ первое слагаемое в выражении (12) примет вид:

$$P_x = \frac{R}{r}\frac{\rho c}{\pi}\sqrt{\frac{R}{ct}}\sqrt{\frac{\sin 2\alpha\cos\beta}{\sin\theta}}\left\{\sqrt{\cos\zeta_0-\cos\theta_0} - \frac{1}{2}\sqrt{1-\cos\theta_0}\right\}, \tag{13}$$

а при $\varphi_0 > \theta_0$ мы получаем

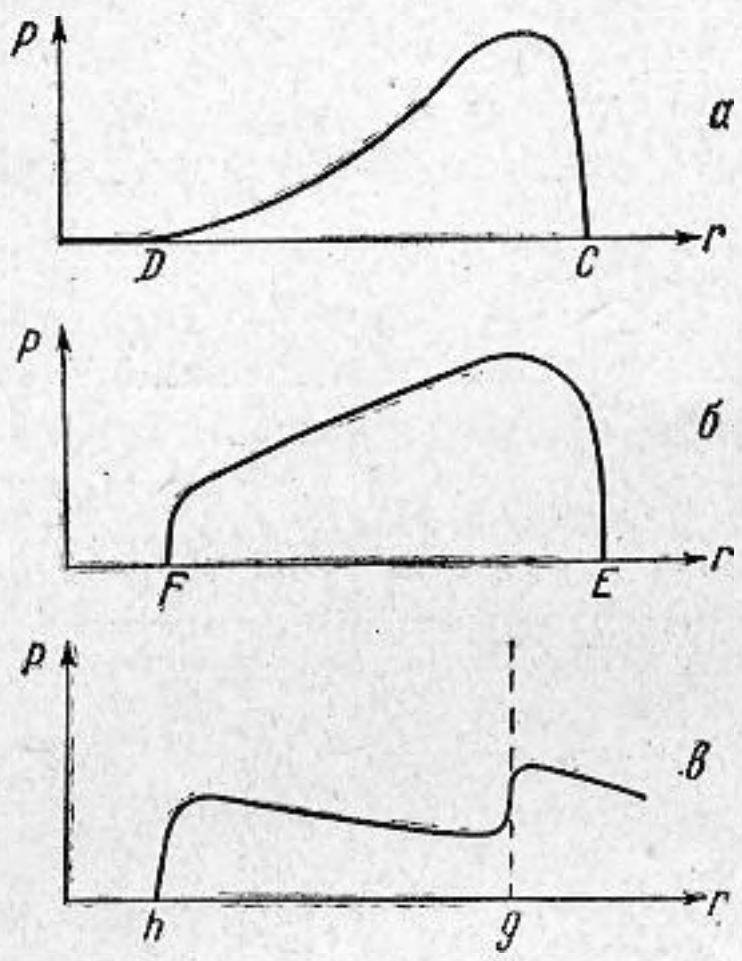
$$P_x = -\frac{R}{2r}\frac{\rho c}{\pi}\sqrt{\frac{R}{ct}}\sqrt{\frac{\sin 2\alpha\cos\beta}{\sin\theta}}\sqrt{1-\cos\theta_0}. \tag{14}$$

Из выражения (13) видно, что при

$$\varphi_0 = \theta_0 \text{ или } \theta_0 - \theta + \Omega = 0 \tag{15}$$

производная от поля по φ_0 терпит разрыв, и нетрудно показать, что (15) есть уравнение одного из фронтов, которые представляются отрезками окружностей с радиусами ct и центром в крайней правой и крайней левой точках сегмента. Формула (14) описывает поле перед фронтом, а формула (13) — за фронтом.

То обстоятельство, что поле перед фронтом не равно нулю, а представляется некоторой медленно меняющейся функцией, связано с уже отмеченным ранее фактом, заключающимся в том, что все наши вычисления производятся с точностью до некоторой медленно меняющейся функции.



Фиг. 4

Можно также убедиться в том, что последние три слагаемых в формуле (12) описывают непрерывные функции в той области, где производные от первой суммы терпят разрыв. Поэтому их можно здесь не учитывать.

Рассуждения, аналогичные только что проделанным, приводят нас к выводу, что производные от второй и третьей суммы в выражении (12) терпят разрыв на линиях $\theta_0 + \theta - \Omega = 0$ и $\theta_0 - \theta - \Omega = 0$, что соответствует дополнительным фронтам. Четвертая же сумма описывается непрерывной функцией и поэтому во всей области применимости метода стационарной фазы может не рассматриваться. Все фронты представлены на фиг. 3.

Поведение поля в окрестности остальных фронтов описывается формулами типа (13), (14). Рассматривая с их помощью характер поля в окрестности фронтов, можно качественно представить себе давление в довольно широкой области. Например, при движении точки наблюдения вдоль линии CD (фиг. 3) характер изменения давления имеет вид (фиг. 4, *а*), который можно объяснить так: пока точка наблюдения не дошла до точки C, т. е. до фронта, ее питающая точка расположена вне излучающего сегмента, поэтому поле равно нулю. Когда точка наблюдения совпадает с точкой C, ее левая питающая точка совпадает с крайней правой точкой сегмента. Этот момент будет соответствовать разрыву производной поля и росту давления с корнем из расстояния от фронта. По мере движения к точке D питающая точка будет двигаться по поверхности сегмента, причем угол β будет все время увеличиваться, стремясь к $\pi/2$. Благодаря этому давление будет непрерывно убывать. По мере ухода питающей точки за линию горизонта давление асимптотически стремится к нулю.

Пусть теперь точка наблюдения движется вдоль линии EF. Тогда изменение давления примет вид, показанный на фиг. 4, *б*. Отличие, возникающее здесь, сравнительно с предыдущим случаем можно объяснить тем, что теперь питающая точка выходит из сегмента, находясь все время в освещенной области и поэтому момент ее выхода из сегмента также характеризуется разрывом производной поля в точке F. Аналогично можно интерпретировать изменение поля при движении точки наблюдения вдоль линии Ygh (фиг. 4, *в*).

При рассмотрении переходных процессов в области, удаленной от фронта, поле меняется плавно и метод стационарной фазы здесь неприменим. При этом оказывается, что удобнее всего находить переходный процесс, вычисляя интегралы Меллина с помощью леммы Жордана и теоремы о вычетах. Вычеты в нулях падающего возмущения * дают нам теперь стацио-

* Вдали от фронта нас интересуют резонансные явления, поэтому берем источник возмущения в виде $-e_0^{i\omega t}$ при $t>0$ и при $t<0$.

нарный процесс [первый член выражения (16)], а вычеты в нулях функции $\zeta_\nu^{(1)\prime}(isR/c) = 0$ [второй член (16)] соответствуют переходному режиму

$$D_\nu(r,\ t) = \frac{\rho c e^{\frac{-i\nu\pi}{2}} e^{i\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)}}{kr\ \zeta_\nu^{(1)\prime\prime}\left(-\frac{\omega R}{c}\right)} +$$

$$+\ \rho c \sum_{k=1}^{\nu} \frac{e^{\frac{\nu ct}{R}(-a_{\nu k} \pm ib_{\nu k})} \cdot e^{-\frac{\nu r}{R}(-a_{\nu k} \pm ib_{\nu k})}}{\left[\frac{\nu c}{R}(-a_{\nu k} \pm ib_{\nu k}) - i\omega\right] \cdot \zeta_\nu^{(1)\prime\prime}\left[i\nu(-a_{\nu k} \pm ib_{\nu k}\right]} \frac{c}{r\nu} \frac{1}{(-a_{\nu k} \pm ib_{\nu k})}. \quad (16)$$

Этот переходный режим может быть интерпретирован как своеобразное звучание сферы на собственных частотах $b_{\nu k}$, связанных с размерами сферы, причем каждой собственной частоте соответствует определенная величина коэффициента затухания $a_{\nu k}$. Чем меньше последний, тем сильнее выражено звучание на частоте $b_{\nu k}$. Поэтому основную роль в сумме (16) играет член, соответствующий минимальному $a_{\nu k_{\min}} = a_{\nu_1}$. Эти члены в дальнейшем и рассматриваются. Если внешняя частота ω совпадает с собственной частотой $b_{\nu k}$, то наблюдается своеобразное явление резонанса. Поскольку $a_{\nu k_{\min}} = a_{\nu_1} \backsim \nu^{1/3}$ растет с ростом ν, то резонанс будет практически заметен только для нескольких первых членов рядов (3), (4), (5). Физически рост затухания с ростом номера ν соответствует тому, что на более высоких частотах растут потери на излучение.

Величина резонансной частоты зависит от типа колебания сегментов (пульсирующие, осциллирующие и так далее) и размера сферы. Так, для односторонне излучающего сегмента резонансные длины волн, соответствующие основным собственным частотам (только об этих частотах будет идти речь в дальнейшем), примерно равны $\lambda_{\text{рез}} \approx 2\pi R/n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ Таким образом, резонанс наблюдается, когда на периметре сферы укладывается целое число длин волн. Это можно объяснить тем, что при такой длине волны дифрагированное поле оказывается в фазе с падающим.

Для пульсирующих сегментов резонансных частот больше. Для них аналогичные условия имеют вид: $\lambda_{\text{рез}} \approx \pi R/n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ Этот резонанс можно объяснить тем, что при выполнении данного условия дифрагированное поле нижнего сегмента синфазно с верхним. Отсюда ясно также, почему в случае пульсирующих сегментов отсутствуют резонансные длины волн $\lambda_{\text{рез}} \approx 2\pi R$, $^2/_3\pi R$ и так далее. Действительно, при таких частотах поле нижнего излучателя ослабляет поле верхнего. Усиление же поля верхнего излучателя за счет собственного дифрагированного поля менее заметно.

Для осциллирующих сегментов резонансные длины волн примерно равны $\lambda_{\text{рез}} \approx 2\pi R/2n + 1$, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ При таких длинах волн поле нижнего сегмента синфазно с верхним.

Приведенные качественные рассмотрения полей указанных трех типов излучателей позволяют сделать следующие выводы:

1. По характеру переходных процессов поля всех трех типов излучателей можно разбить на 2 области: а) область геометрических переходных процессов, б) область дифракционных переходных процессов.

2. Все волновые фронты расположены исключительно в области геометрических переходных процессов, где поля всех трех указанных типов излучателей аналогичны.

3. Существенная разница между полями указанных излучателей проявляется в области дифракционной. При этом оказывается, что рассматриваемые три типа излучателей имеют различные частоты свободных колебаний, что и влечет за собой разницу в их полях.

4. Сравнение переходных процессов в поле сферического колеблющегося сегмента с полем плоских поршневых мембран, рассмотренное в наших предыдущих работах [3, 4], показывает, что область геометрических переходных процессов по своему характеру близка к переходным процессам, рассмотренным ранее. Дополнительно появившиеся дифракционные переходные процессы, вызванные механизмом огибания, приводят к тому, что переходной процесс здесь с ростом времени стремится к нулю лишь асимптотически. В случае же плоских поршневых мембран в жестком бесконечном экране переходные процессы заканчиваются на заднем фронте, т. е. они конечны во времени.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. И. Петрашень, Г. И. Макаров. Нестационарная дифракция акустических и электромагнитных волн от сферы. Уч. зап. ЛГУ, 1953, 27, 170, 266.
2. Г. И. Макаров. Нестационарная дифракция от сферы (диссертация). ЛГУ, 1952.
3. О. Г. Козина, Г. И. Макаров. Переходные процессы в акустических полях поршневых мембран некоторых конкретных форм. Акуст. ж., 1962, 8, 1.
4. О. Г. Козина, Г. И. Макаров. Переходные процессы в акустических полях, создаваемых поршневой мембраной произвольной формы и при произвольном характере колебаний ее поверхности. Акуст. ж., 1961, 7, 1, 53—58.

Ленинградский государственный университет

Поступила в редакцию 3 января 1961 г.