АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том VIII 1962 Вып. 1

РЕФРАКЦИЯ ИЗГИБНЫХ ВОЛН

В. Н. Красильников

Работа посвящена рассмотрению поверхностных волн, которые могут возникать в жидком полупространстве, благодаря наличию на его границе тонкой упругой и неоднородной пластины. Выводится основная система уравнений такой задачи, которая для случая слабонеоднородной пластины решается в приближении геометрической оптики. На частном примере иллюстрируется рефракция поверхностных изгибных волн, образование зоны тени и возникновение каустических поверхностей.

В наших предыдущих работах [1, 2] было выяснено, что вдоль границы жидкого полупространства, ограниченного тонким упругим однородным плоскопараллельным слоем, может распространяться поверхностная волна, обусловленная чисто изгибными колебаниями слоя (пластины). При этом оказалось, что при анализе такой «изгибной» волны возможно пластину считать невесомой, а жидкость несжимаемой.

Для ряда практических случаев ограничивающий слой нельзя считать однородным (его толщина и упругие постоянные могут зависеть от координат); поэтому интересно рассмотреть влияние неоднородности слоя на распространение изгибных волн. Для записи основных уравнений такой задачи нам потребуется выражение для упругих сил, развиваемых неоднородной пластиной при ее изгибе *. Следует отметить, что в теории упругости рассматривались уравнения равновесия неоднородных пластин [3], но при этом делалось предположение о том, что свойства пластины меняются только в радиальном направлении. Поэтому мы кратко рассмотрим статический изгиб неоднородной пластины и получим уравнения равновесия, следуя схеме, использованной Ландау и Лившицем [4], из условия минимума потенциальной энергии.

Рассмотрим бесконечно протяженную пластину переменной толщины $h(x, y)$; модуль Юнга материала пластины тоже, в общем случае, есть функция координат — $E(x, y)$, а коэффициент Пуассона σ можно считать практически постоянным (фиг. 1). Ради простоты предположим, что профиль пластины симметричен относительно ее средней плоскости (которую примем за плоскость $Z = 0$) и является достаточно пологим. Последнее требование можно сформулировать как малость отклонения нормали к поверхности пластины от нормали к срединной плоскости — только в этом случае деформация носит характер изгиба и справедлива гипотеза о неизменяемости нормального элемента [3].

Пусть под действием внешней нормальной силы $P(x, y)$ пластина приобрела статический изгиб $u(x, y)$, где u — смещение точки средней плоскости от положения равновесия по вертикали. Тогда запас упругой энергии dV в элементе объема dw (с центром в точке с координатами x, y, z) пластины дается формулой (11.5) из книги [4] (стр. 688):

$$dV = \frac{Ez^2}{2(1-\sigma^2)}\left\{\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)^2 + 2(1-\sigma)\left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right]\right\} dw. \quad (1)$$

* Напомним, что изгибная деформация в динамическом случае является главной только в пластинках, тонких по сравнению с длиной волны; ими мы ограничиваем наше рассмотрение.

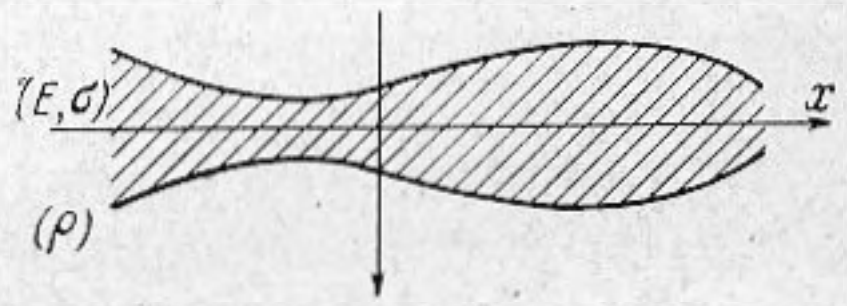
Отметим, что выражение (1) справедливо лишь для слабого изгиба пластин, когда $u \ll h$, т. е. когда мы решаем задачу в линейном приближении. Интегрируя выражение (1) по объему всей пластины, получим выражение для полной потенциальной энергии:

$$V = {}^1/_2 \iint\limits_{-\infty}^{\infty} D(x, y) \left\{ (\nabla^2 u)^2 + 2(1-\sigma) \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] \right\} dx dy, \quad (1a)$$

где жесткость неоднородной пластины $D(x, y)$ определена как

$$D(x, y) = \frac{E(x, y) h^3(x, y)}{12(1-\sigma^2)}. \quad (2)$$

Вычисление вариации потенциальной энергии осуществляется аналогично соответствующему расчету в книге [4], хотя непостоянство $D(x, y)$ несколько усложняет выкладки. Выпишем окончательное уравнение статического изгиба неоднородной пластины:



Фиг. 1

$$(1-\sigma) \left\{ 2 \frac{\partial^2 D}{\partial x\, \partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} - \frac{\partial^2 D}{\partial x^2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 D}{\partial y^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right\} + \nabla^2 (D \nabla^2 u) = P(x, y). \quad (3)$$

В случае радиальной неоднородности $D = D(r)$ и уравнение (3) переходит в известное уравнение изгиба круглой пластины [4]. Отметим, что при выводе уравнения (3) мы пренебрегали возникающими при вычислениях интегралами по контуру, ограничивающему рассматриваемую часть пластины, поскольку в нашем случае этот контур можно считать бесконечно удаленным, а поля достаточно быстро убывающими (проще всего предположить хотя бы малое поглощение волн в материале пластины).

Сформулируем теперь основные уравнения задачи. Малые колебания в идеальной несжимаемой жидкости с плотностью ρ (фиг. 1) описываются гармоническим уравнением для потенциала φ:

$$\nabla^2 \varphi = 0. \quad (4)$$

На границе жидкого полупространства с упругой пластиной выполняется кинематическое условие контакта *:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial z} \Big|_{z=0}, \quad (5)$$

и динамическое уравнение, которое для тонкой невесомой пластины, согласно (3), имеет вид:

$$(1-\sigma) \left\{ 2 \frac{\partial^2 D}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 D}{\partial x^2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 D}{\partial y^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right\} + \nabla^2 (D \nabla^2 u) = \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} \Big|_{z=0}, \quad (6)$$

где $D(x, y)$ — заданная функция. В общем случае построение решения системы (4) — (6), т. е. отыскание изгибных волн для произвольно-неоднородных пластин, невозможно. Поэтому в настоящей работе мы ограничимся случаем слабонеоднородной пластины, когда изменение D с расстоянием совершается довольно плавно. Тогда оказывается возможным применить в нашей задаче идеи метода геометрической оптики.

Легко заметить, что при постоянной жесткости D_0 существует простейшее решение задачи — плоская изгибная волна (ограничимся

* Как следует из [1], изменение поля изгибной волны на расстояниях порядка толщины слоя h мало, поэтому в линейном приближении мы можем относить граничные условия к плоскости $z = 0$.

монохроматическими полями; ω — круговая частота):

$$u = \frac{k_0}{i\omega} A e^{ik_0 x \sin\theta_0 + ik_0 y \cos\theta_0},$$
$$\varphi = A e^{ik_0 x \sin\theta_0 + ik_0 y \cos\theta_0 - k_0 z}, \tag{7}$$

где A — постоянная, θ_0 — угол, определяющий направление распространения изгибной волны, а k_0 — ее волновое число:

$$k_0 = \sqrt[5]{\frac{\omega^2 \rho}{D_0}}. \tag{7a}$$

Если же изменения D на расстояниях порядка длины изгибной волны (λ) малы

$$\frac{\partial D}{\partial l}\lambda \ll D, \qquad \frac{\partial^2 D}{\partial l^2}\lambda^2 \ll D, \tag{8}$$

то естественно предположить, что решение имеет вид, близкий к (7):

$$u = \frac{k_0}{i\omega}\Phi(x, y)\, e^{ik_0\Psi(x, y)},$$
$$\varphi = F(x, y, z)\, e^{ik_0\Psi_1(x, y) - k_0 f(z)}, \tag{9}$$

где k_0 — волновое число, отнесенное к некоторой точке, например к началу координат, а Φ, F, Ψ, Ψ_1 и f — некоторые функции, о которых мы делаем обычные для метода геометрической оптики предположения: все производные амплитудных множителей Φ и F малы (в смысле неравенств (8)), а у фазовых функций Ψ, Ψ_1 и f малы производные, начиная со второй. Подставляя (9) в (4) — (6) и приравнивая по отдельности нулю члены различных порядков *, получим уравнения изгибной волны в приближении геометрической оптики. Вместо (4) мы получим

$$(\nabla\Psi_1)^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2, \tag{10}$$

$$\nabla^2 F = 0. \tag{11}$$

Граничное условие (5) дает связь между фазами и амплитудами волн в жидкости и пластине:

$$\Psi(x, y) = \Psi_1(x, y), \tag{12}$$

$$\Phi(x, y) = F(x, y, 0)\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{z=0}. \tag{13}$$

Уравнение сил (6) в приближении геометрической оптики сводится к следующим двум уравнениям

$$D\Phi k_0^4 (\nabla\Psi)^4 = \rho\omega^2 F, \tag{14}$$

$$2(\nabla\Phi\nabla\Psi) + 2\Phi\nabla^2\Psi + \frac{\Phi}{D}(\nabla D\nabla\Psi) = 0. \tag{15}$$

Преобразуем уравнение (14). Для этого вспомним определение k_0 (7а); введем относительный показатель преломления $n(x, y)$:

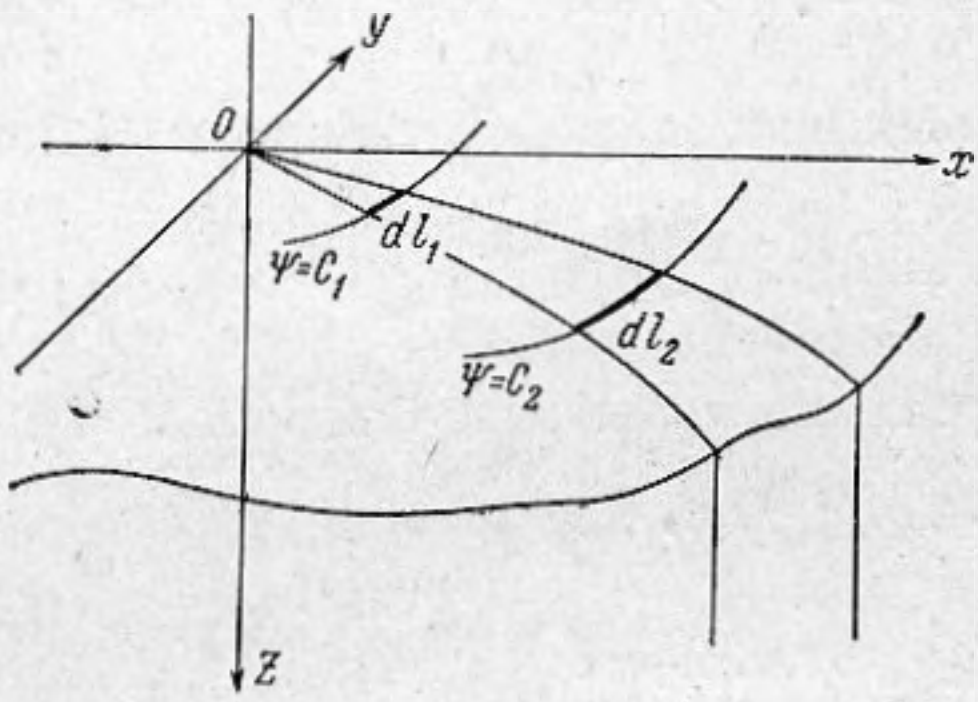
$$n(x, y) = \frac{k(x, y)}{k_0} = \left(\frac{D_0}{D}\right)^{1/5} \tag{16}$$

* Введенная в формулы (9) величина k_0 помогает в расчетах в том смысле, что порядок соответствующего члена в уравнении определяется степенью k_0 — волновое число в методе геометрической оптики может условно рассматриваться как большой параметр.

и на основании (10) и (13) заменим F на $\Phi/|\Delta\varphi|$. Тогда мы получим следующее уравнение для фазовой функции Ψ:

$$|\nabla\Psi|^{10}=n^{10}(x, y), \tag{14а}$$

отличающееся от обычного уравнения эйконала [5] лишь показателем степени. Последнее обстоятельство не является случайным, ибо при соответствующем выборе аргумента корня мы можем получить комплексные значения фазовой функции, что будет отвечать неоднородным изгибным волнам (экспоненциально затухающим с расстоянием). Существование подобных волн было отмечено нами в работе [1]. Но поскольку они играют заметную роль только вблизи от источника, то особого интереса они не представляют, и мы их рассматривать не будем. Для обычных же изгибных волн можно считать уравнение (14а) тождественным с обычным уравнением эйконала:



Фиг. 2

$$(\nabla\Psi)^2=n^2(x, y). \tag{14б}$$

Решение (14б) позволяет построить линии равной фазы $\Psi(x, y)=\text{const}$ и нормальные к ним кривые — лучи. Направление луча в каждой точке можно охарактеризовать единичным вектором $1/n\nabla\Psi$. Два близких луча будут образовывать в плоскости $z=0$ — лучевой «листок» — плоскую лучевую трубку. Аналогом пространственной лучевой трубки в нашем случае (когда рассматривается поверхностная волна) будет полубесконечный цилиндр, основанием которого является лучевой листок (фиг. 2). Заметим также, что несмотря на наличие дисперсии относительный показатель преломления (в пределах рассматриваемой идеализации) постоянен и лучевая картина не меняется с изменением частоты.

Переходя к интегрированию уравнения для амплитуды изгибной волны (15), заметим, что, согласно (16), $n\nabla D=5\nabla nD$, а дифференцирование (14б) дает $n\nabla n=\nabla^2\Psi\nabla\Psi$, после чего (15) запишется в виде

$$(\nabla\Phi\cdot\nabla\Psi)=\Phi\nabla^2\Psi. \tag{15а}$$

Составим теперь вспомогательный вектор $\mathbf{A}=\Phi^2\nabla\Psi/n^3$, параллельный направлению луча. На основании (14б) и (15а) нетрудно показать, что $\operatorname{div}\mathbf{A}=0$. Применяя теорему Гаусса к части элементарного лучевого листка, ограниченной двумя линиями равной фазы, получим $\int\limits_{L_1}A_n dl_1=\int\limits_{L_2}A_n dl_2$, откуда следует физический смысл уравнения (15) — закон сохранения потока вектора $\mathbf{A}$ в лучевом листке*. В случае дифференциально-узкого листка имеем простой закон изменения амплитуды Φ вдоль него

$$\Phi(M_2)=\Phi(M_1)\sqrt{\frac{dl_1}{dl_2}}\cdot\frac{n_2}{n_1}. \tag{17}$$

Наряду со стандартной зависимостью амплитуды от расходимости лучей в выражении (17) интересно отметить пропорциональность амплитуды показа-

* Легко убедиться, что вектор $\mathbf{A}$ пропорционален потоку энергии в пластине.

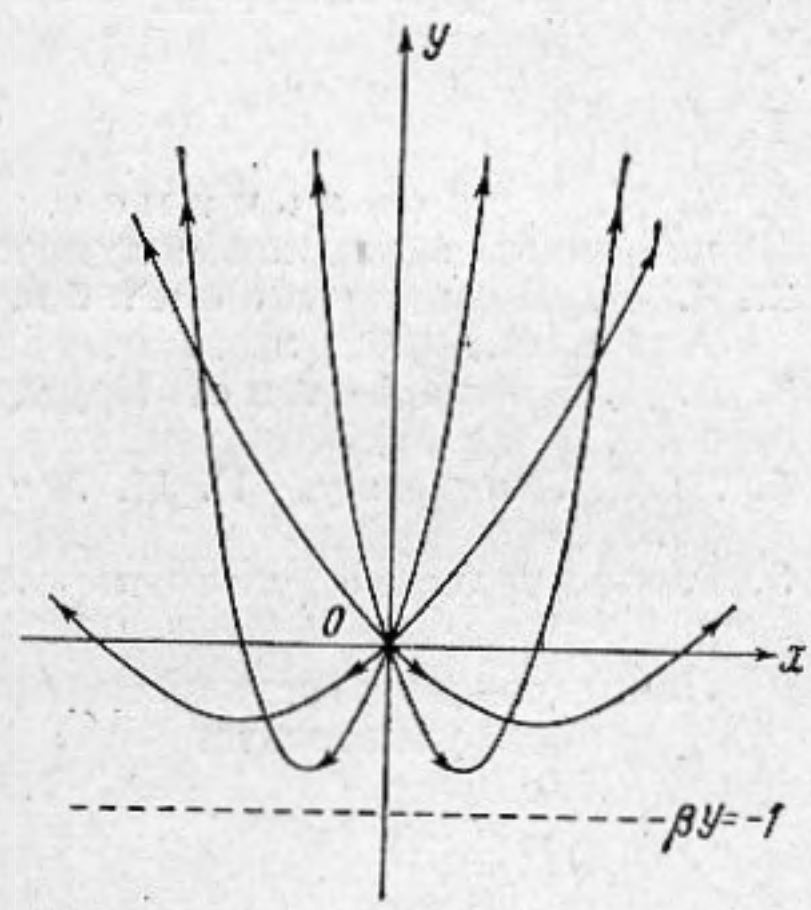
телю преломления $\bar{n}$. Как известно, в электродинамическом случае зависимость амплитуды E электрического вектора от показателя преломления иная: $E \sim n^{-1/2}$. Это обстоятельство приводит к известному эффекту «разбухания» поля в ионосфере. Отсутствие подобного явления в нашем случае объясняется тем, что, как следует из работы [1], поток энергии в пластине пропорционален $D^{2/5}\,\Phi^2$, поэтому амплитуда колебаний в более толстых частях пластины должна уменьшаться (что и дает выражение (17)).

По известным Φ и Ψ легко по уравнения (10) — (13) найти поле в жидкости, которое как бы «припасовывается» к колебаниям пластины. Однако на этом мы останавливаться не будем.

При решении конкретных задач следует иметь в виду, что с помощью нашего приближения нельзя описывать поля вблизи источников (ибо там не выполняется использованное нами предположение о медленном изменении амплитудной функции). Поэтому целесообразно задавать поле на некотором замкнутом контуре L, внутри которого находятся источники:

$$\Psi\,|_L = \Psi_0(x, y), \quad \Phi\,|_L = \Phi_0(x, y). \qquad (18)$$

При выборе контура L в волновой зоне источников метод уже применим; а значения Ψ_0 и Φ_0 на контуре (в силу слабой неоднородности среды) можно взять из решения задачи с однородной пластиной. Заметим, что первое из уравнений (18) задает не только фазу на контуре L, но и направление выхода луча (хотя для его определения надо дополнительно привлечь уравнение эйконала).



Фиг. 3

Рассмотрим в качестве примера случай, когда показатель преломления зависит только от одной координаты и описывается функцией $n(y) = \sqrt{1+\beta y}$, где $\beta \ll k_0$ и положительно — пластина постепенно утолщается в сторону отрицательных y *. В начале координат расположен точечный монохроматический источник (например, сосредоточенная сила, действующая по нормали к пластине). Интегрирование уравнения эйконала дает в этом случае следующее уравнение луча:

$$x = \sin\theta_0 \int\limits_0^y \frac{dy'}{\sqrt{n^2(y') - \sin^2\theta_0}}, \qquad (19)$$

где θ_0 — угол выхода луча из источника; после простых преобразований находим, что лучи имеют форму парабол:

$$(\beta x + \sin 2\theta_0)^2 = \sin^2 2\theta_0 \left(\frac{\beta y}{\cos^2\theta_0} + 1\right). \qquad (19а)$$

Ход лучей иллюстрируется на фиг. 3, где введены безразмерные координаты $x' = \beta x$ и $y' = \beta y$. Видна рефракция (заворот) лучей в сторону положительных y и образование зоны тени в полупространстве $y < 0$. Отраженные от нижнего полупространства лучи, пересекаясь, образуют каустическую поверхность, уравнение которой в полярных координатах имеет вид: $\rho = 2/(1 - \sin\varphi)$. Разумеется, в силу обычных ограничений наш

* Условность постановки подобной задачи очевидна; предполагаемое увеличение D до бесконечности при $\beta y \to -1$ противоречит нашим предположениям о тонкости пластины и так далее. Но рассмотрение такого случая все же представляет известный интерес.

метод не позволяет рассчитывать интенсивность поля вблизи границы зоны тени, на каустической поверхности и вблизи источника, но все же качественную картину явления он дает. В частности, становится ясным, почему волнения на поверхности, существующие в полярных морях в районе ледовой кромки, не проникают в центральные области ледовых массивов, где лед толще, а относительный показатель преломления изгибных волн ($n = (h_0/h)^{3/5}$) существенно меньше. Как следует из обобщенного закона Снеллиуса * $n \sin \theta = \sin \theta_0$, уже при возрастании толщины пластины в два раза более половины энергии точечного источника будет отражаться в результате рефракции.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Н. Красильников. Влияние тонкого упругого слоя на распространение звука в жидком полупространстве. Акуст. ж., 1960, 6, 2, 220—228.
2. В. Н. Красильников. О возбуждении изгибно-гравитационных волн. Акуст. ж., 1962, 8, 1.
3. А. Д. Коваленко. Круглые пластины переменной толщины. М., Физматгиз 1959.
4. Л. Д. Ландау, Е. М. Лившиц. Механика сплошных сред. М., ГИТТЛ, 1954.
5. Распространение ультракоротких радиоволн. М., Сов. радио, 1954.

Ленинградский государственный университет

Поступила в редакцию 28 марта 1960 г.

---

* Такая форма его записи справедлива только в слоисто-неоднородном случае, когда $n=n(y)$.