АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том VIII 1962 Вып. 2

О ФЛЮКТУАЦИЯХ АМПЛИТУДЫ И ФАЗЫ ЗВУКОВОЙ ВОЛНЫ, ОТРАЖЕННОЙ ОТ СТАТИСТИЧЕСКИ НЕРОВНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Э. П. Гулин

В приближении Кирхгофа дается оценка флюктуаций амплитуды и фазы сферической волны, отраженной от абсолютно мягкой статистически неровной поверхности, для малых по сравнению с единицей значений параметра Рэлея.

Амплитуда и фаза звуковых сигналов, отраженных от неровной, изменяющейся во времени поверхности, подвержены флюктуациям. Примером может служить отражение звука от волнующейся поверхности моря. Величину флюктуаций амплитуды удобно характеризовать коэффициентом вариации, или относительным стандартным отклонением амплитуды $\eta = \frac{\sqrt{\overline{A^2}-(\overline{A})^2}}{\overline{A}}$. Однако во многих случаях непосредственное теоретическое определение средней амплитуды $\overline{A}$ затруднительно. Исключение составляет случай малых флюктуаций, когда $\overline{A} \cong A_0$, где A_0 — амплитуда звукового поля в отсутствие неровностей. В этом случае коэффициент вариации амплитуды можно записать в виде

$$\eta = \frac{\sqrt{\overline{(A-A_0)^2}}}{A_0}.$$

Флюктуации фазы характеризуют обычно средним квадратичным отклонением фазы $\sqrt{\overline{(\delta\varphi)^2}}$. Предположим, что излучатель и приемник расположены в точках с координатами $(0, 0, z_1)$ и $(L, 0, z_2)$ (фиг. 1). Используя теорему Грина, поле отраженной от неровной поверхности звуковой волны, состоящее из зеркальной и рассеянной компонент, можно записать в виде

$$p = \frac{1}{4\pi} \iint\limits_S \left[-p \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{ikR}}{R} \right) + \frac{e^{ikR}}{R} \frac{\partial p}{\partial n} \right] dS, \tag{1}$$

где n — внешняя нормаль к поверхности (положительное направление выбрано в полупространство, содержащее источник и приемник звука). В выражении (1) не учтено поле прямой волны, распространяющейся непосредственно от излучателя к приемнику, без отражения от поверхности. Поле на поверхности S мы задаем, следуя Эккарту [1]. Запишем граничные условия на поверхности S в виде

$$p_0' + p = 0, \quad \frac{\partial p_0'}{\partial n} = \frac{\partial p}{\partial n}, \tag{2}$$

при этом в качестве падающей на поверхность волны возьмем сферическую волну

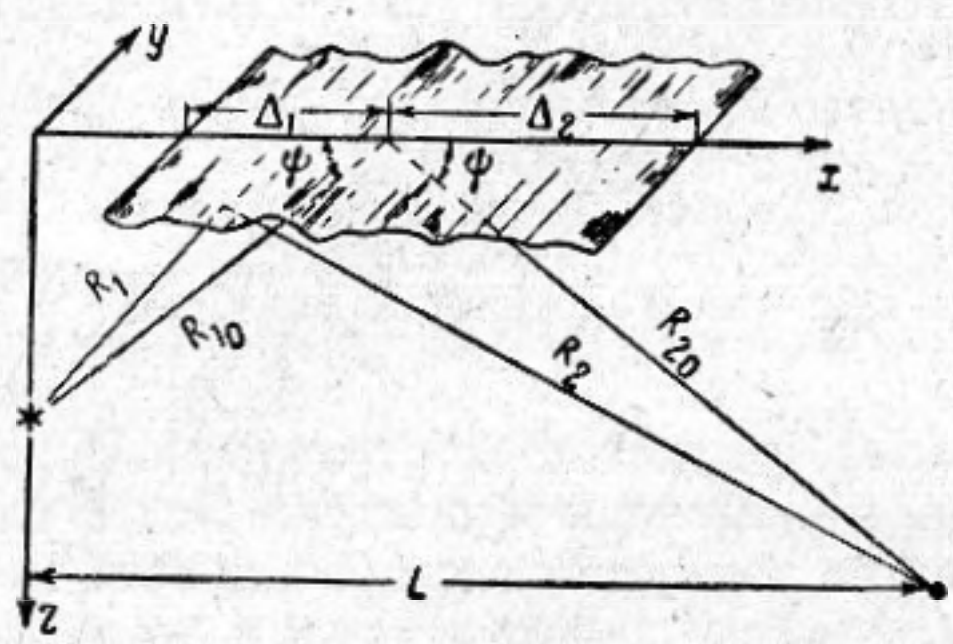
$$p_0' = \frac{e^{ikR_1}}{R_1}. \tag{3}$$

Полученное ниже решение соответствует приближению Кирхгофа в задаче о рассеянии звука неровными поверхностями, пределы применимости которого сформулированы в работах Бреховских [2] и Исаковича [3].

Используя (2) и (3), выражение для поля отраженной от поверхности волны можно записать в следующем виде:

$$p = \frac{1}{4\pi} \iint\limits_S \frac{\partial}{\partial n} \left[\frac{e^{ikR_1}}{R_1} \cdot \frac{e^{ikR_2}}{R_2} \right] dS. \tag{4}$$

Через R_1 и R_2 обозначены расстояния от некоторой точки на поверхности до излучателя и приемника соответственно. В случае достаточно пологих неровностей можно приближенно заменить дифференцирование по нормали дифференцированием по координате z, а интегрирование по неровной поверхности — интегрированием в плоскости xy. Считая, что R_1 и R_2 велики по сравнению с длиной звуковой волны, получаем



Фиг. 1

$$p = \frac{ik}{4\pi} \iint \frac{1}{R_1 R_2} \left(\frac{z_1'}{R_1} + \frac{z_2'}{R_2} \right) e^{ik(R_1+R_2)}\, dx\, dy. \tag{5}$$

Введем функцию $F(x, y)$, задающую форму неровной поверхности в некоторый момент времени $t = t_0$, при этом $F = z_1 - z_1' = z_2 - z_2'$. Считая $|F| \ll \min(z_1, z_2)$, заменим R_1 и R_2 приближенными выражениями:

$$R_1 = \sqrt{x^2 + y^2 + z_1'^2} \cong R_1' + \frac{z_1 F}{R_1'}, \quad R_2 = \sqrt{(L-x)^2 + y^2 + z_2'^2} \cong R_2' + \frac{z_2 F}{R_2'}$$

В дальнейшем, вместо R_1' и R_2' будем писать R_1 и R_2, считая, что $R_1 = \sqrt{x^2 + y^2 + z_1^2}$, $R_2 = \sqrt{(L-x)^2 + y^2 + z_2^2}$.

Рассмотрим простейший случай, когда выполняется условие:

$$\left| kF \left(\frac{z_1}{R_1} + \frac{z_2}{R_2} \right) \right| < 1. \tag{6}$$

Тогда в выражении (5) можно выделить рассеянную, флюктуирующую компоненту, которая в предположении $\frac{k(z_1 R_2 + z_2 R_1)^2}{R_1 R_2 (R_1 + R_2)} \gg 1$ будет иметь вид:

$$p_1 = -\frac{k^2}{4\pi} \iint \frac{1}{R_1 R_2} \left(\frac{z_1}{R_1} + \frac{z_2}{R_2} \right)^2 e^{ik(R_1+R_2)} F(x, y)\, dx\, dy. \tag{7}$$

Для нефлюктуирующей части поля получаем

$$p_0 = \frac{ik}{4\pi} \iint \frac{1}{R_1 R_2} \left(\frac{z_1}{R_1} + \frac{z_2}{R_2} \right) e^{ik(R_1+R_2)}\, dx\, dy. \tag{8}$$

Должно выполняться следующее равенство:

$$A_1 e^{i\Phi_1} + A_0 e^{i\Phi_0} = A e^{i\Phi}, \tag{9}$$

где $p_1 = A_1 e^{i\Phi_1}$ — рассеянная часть поля, $p_0 = A_0 e^{i\Phi_0}$ — нефлюктуирующая часть поля, $p = A e^{i\Phi}$ — суммарное поле. Логарифмируя обе части равенства (9) и считая, что $|p_1| \ll |p_0|$, получим

$$\ln \frac{A}{A_0} + i\delta\varphi \cong \frac{A_1}{A_0} e^{i(\Phi_1 - \Phi_0)}.$$

Полагая $\ln \frac{A}{A_0} \cong \frac{\delta A}{A_0}$, мы получаем следующие приближенные выражения для малых флюктуаций амплитуды и фазы звуковых сигналов, отраженных от неровной поверхности *

$$\frac{\delta A}{A_0} = \frac{k^2}{4\pi A_0} \iint \frac{1}{R_1 R_2} \left(\frac{z_1}{R_1} + \frac{z_2}{R_2}\right)^2 \cos\left[k(R_1 + R_2) - \Phi_0\right] F(x, y)\, dx\, dy, \quad (10)$$

$$\delta\varphi = \frac{k^2}{4\pi A_0} \iint \frac{1}{R_1 R_2} \left(\frac{z_1}{R_1} + \frac{z_2}{R_2}\right)^2 \sin\left[k(R_1 + R_2) - \Phi_0\right] F(x, y)\, dx\, dy. \quad (11)$$

Величины A_0 и Φ_0 определяются из выражения (8). Интегрирование в формулах (10) и (11) мы будем проводить по площадке конечных размеров. Конечность пределов интегрирования может быть, к примеру, обусловлена направленностью источника и приемника звука.

Предположим, что линейные размеры области интегрирования малы по сравнению с R_{10} и R_{20} (фиг. 1). Разлагая в ряд выражения для R_1 и R_2 и ограничиваясь квадратичными членами, получаем

$$\begin{aligned} R_1 &\cong R_{10} + \frac{y^2}{2R_{10}} - x_1 \cos\psi + \frac{x_1^2 \sin^2\psi}{2R_{10}}, \\ R_2 &\cong R_{20} + \frac{y^2}{2R_{20}} + x_1 \cos\psi + \frac{x_1^2 \sin^2\psi}{2R_{20}}, \end{aligned} \quad (12)$$

где $x_1 = x - \frac{Lz_1}{z_1 + z_2}$, а ψ — угол скольжения. Подставляя эти значения R_1 и R_2 в выражения (8), (10) и (11), получаем

$$\frac{\delta A}{A_0} = \frac{k^2 \sin^2\psi}{\pi R_{10} R_{20} A_0} \iint \cos\left[\frac{k x_1^2 \sin^2\psi}{R} + \frac{k y^2}{R} - \Phi_0'\right] \cdot F dx_1\, dy, \quad (13)$$

$$\delta\varphi = \frac{k^2 \sin^2\psi}{\pi R_{10} R_{20} A_0} \iint \sin\left[\frac{k x_1^2 \sin^2\psi}{R} + \frac{k y^2}{R} - \Phi_0'\right] \cdot F dx_1\, dy, \quad (14)$$

где $R = 2R_{10}R_{20} / R_{10} + R_{20}$, $\Phi_0' = \Phi_0 - k(R_{10} + R_{20})$. Интегрирование здесь проводится по x_1, в пределах от $-\Delta_1$ до Δ_2, и по y в пределах от $-l_1$ до l_2.

В дальнейшем для простоты будем считать, что $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta$, $l_1 = l_2 = l$, $R_{10} = R_{20} = R_0$ и $z_1 = z_2 = z_0$. Это упрощение значительно уменьшает громоздкость получающихся результатов и в то же время не приводит к принципиальному изменению вида решения. С учетом сделанного упрощения для нефлюктуирующей части поля получаем выражение

$$p_0 = -\frac{e^{i2kR_0}}{2R_0} e^{i \operatorname{arc\,tg} \frac{S_\Delta S_l - C_\Delta C_l}{C_\Delta S_l + C_l S_\Delta}} \sqrt{(C_\Delta C_l - S_\Delta S_l)^2 - (C_\Delta S_l + C_l S_\Delta)^2}, \quad (15)$$

где C_Δ, S_Δ, C_l, S_e — интегралы Френеля от аргументов $\sqrt{\frac{2}{\pi} \cdot \frac{k \sin^2\psi}{R_0}}\,\Delta$ и $\sqrt{\frac{2}{\pi} \cdot \frac{k}{R_0}} \cdot l$. Для больших по сравнению с единицей значений аргументов $p_0 = -\frac{e^{i2kR_0}}{2R_0}$.

Рассмотрим несколько частных случаев, отличающихся видом пространственной функции корреляции смещений поверхности. Пусть форма

* Такого рода переход от выражений для звуковых полей к выражениям для флюктуаций амплитуды и фазы содержится в работах Чернова [4], где рассматривается вопрос о флюктуациях звука, распространяющегося в среде со случайными неоднородностями показателя преломления.

поверхности задана в виде однородной случайной функции, которая зависит лишь от координаты x и является квазигармонической. При этом функция пространственной корреляции имеет вид:

$$F(x_1)\cdot F(x_2) = \overline{F}_0 e^{-\frac{(x_1-x_2)^2}{a^2}}\cdot\cos q(x_1-x_2),$$

где a — пространственный интервал корреляции смещений поверхности, $\overline{F_0^2}$ — средний квадрат амплитуды неровностей. Осуществим в выражениях (13) и (14) интегрирование по y в предположении $\frac{kl^2}{R_0}\gg 1$ и возведем получившиеся выражения в квадрат. Тогда для средних квадратов флюктуаций амплитуды и фазы получим выражения:

$$\frac{\overline{(\delta A)^2}}{A_0^2} = J_1 - J_2, \quad \overline{(\delta\varphi)^2} = J_1 + J_2, \tag{16}$$

где

$$J_1 = \frac{k^3\sin^4\psi\,\overline{F_0^2}}{\pi R_0^3 A_0^2}\int\limits_0^{\Delta} dx \int\limits_{-2(\Delta-x)}^{2(\Delta-x)} e^{-\xi^2/a^2}\cos q\xi\cdot\cos\left(\frac{2k\sin^2\psi}{R_0}x\right)d\xi, \tag{17}$$

$$J_2 = \frac{k^3\sin^4\psi\,\overline{F_0^2}}{\pi R_0^3 A_0^2}\int\limits_0^{\Delta} dx \int\limits_{-2(\Delta-x)}^{2(\Delta-x)} e^{-\xi^2/a^2}\cos q\xi\,\sin\left[\frac{2k\sin^2\psi}{R_0}\left(x^2+\frac{\xi_2}{4}\right)-2\Phi_0'\right]d\xi. \tag{18}$$

В интегралах (17) и (18) введены относительная координата $\xi = x_1 - x_2$ и координата центра тяжести $x = \frac{x_1+x_2}{2}$. Выражения (17) и (18) записаны после усреднения по совокупности экземпляров статистических поверхностей. Такое усреднение эквивалентно усреднению по времени, если смещение поверхности в данной точке является эргодическим случайным процессом.

Интегралы (17) и (18) в общем виде взять не удается. Дальнейшее рассмотрение мы ограничим случаем, когда размеры области, существенной для интегрирования по ξ, значительно меньше размеров облученного участка поверхности ($|\xi_{\max}|\ll\Delta$). Для определения размеров области, существенной для интегрирования по ξ, представим внутренний интеграл в выражении (17) в виде суммы интегралов типа

$$\int\limits_{-\xi_{\max}}^{\xi_{\max}} e^{-\frac{\xi^2}{a^2}\pm iQ\xi}\,d\xi,$$

где $Q = \left(\frac{2k\sin^2\psi}{R_0}x\pm q\right)\frac{a}{2}$. Взяв для Q выражение со знаком плюс в скобках, получим

$$\int\limits_{-\xi_{\max}}^{\xi_{\max}} e^{-\frac{\xi^2}{a^2}\pm i\left(\frac{2k\sin^2\psi}{R_0}x+q\right)\frac{a}{2}\cdot\xi}\,d\xi = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\left(\frac{2k\sin^2\psi}{R_0}x+q\right)^2\frac{a^2}{4}}[\Phi(\rho_1)+\Phi(\rho_2)],$$

где $\Phi(\rho) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{\rho} e^{-t^2}dt$ — интеграл вероятностей,

$$\rho_1 = \frac{\xi_{\max}}{a} - i\left(\frac{2k\sin^2\psi}{R_0}x+q\right)\cdot\frac{a}{2}, \quad \rho_2 = \frac{\xi_{\max}}{a} + i\left(\frac{2k\sin^2\psi}{R_0}x+q\right)\cdot\frac{a}{2}.$$

При $\left(\frac{2k\sin^2\psi}{R_0}x+q\right)\frac{a}{2}\ll 1$ размер области, существенной для интегрирования по ξ, определяется из соотношения $|\xi_{\max}|\sim a$, если же

$\left(\frac{2k\sin^2\psi}{R_0}x+q\right)\frac{a}{2}>1$, то размер области интегрирования приближенно определяется из соотношения

$$\frac{|\xi_{\max}|}{a}\gtrsim\left(\frac{2k\sin^2\psi}{R_0}x_{\max}+q\right)\cdot\frac{a}{2},$$

где $x_{\max}$ — размер области, существенной для интегрирования по x, при этом $|\xi_{\max}|$ может заметно превосходить величину a. Для выполнения неравенства ($|\xi_{\max}|\ll\Delta$) достаточно потребовать, чтобы

$$\frac{ka^2\sin^2\psi}{R_0}\ll 1,\quad \frac{\Delta}{a}\gg\frac{qa}{2}. \tag{19}$$

Первое неравенство означает, что пространственный интервал автокорреляции смещений поверхности должен быть значительно меньше размера зоны Френеля вдоль трассы распространения звука. Второе неравенство накладывает ограничение на квазигармоничность функции автокорреляции смещений поверхности. С учетом введенных ограничений интегралы (17) и (18) можно записать в виде

$$J_1=\frac{k^3\sin^4\psi\overline{F_0^2}}{\pi R_0^3A_0^2}\int\limits_0^{\Delta}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-\xi^2/a^2}\cos q\xi\cdot\cos\left(\frac{2k\sin^2\psi}{R_0}x\xi\right)dx\,d\xi, \tag{20}$$

$$J_2=\frac{k^3\sin^4\psi\overline{F_0^2}}{\pi R_0^3A_0^2}\int\limits_0^{\Delta}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-\xi^2/a^2}\cos q\xi\cdot\sin\left[\frac{2k\sin^2\psi}{R_0}\left(x^2+\frac{\xi^2}{4}\right)-2\Phi_0'\right]dx\,d\xi.$$

Выполняя интегрирование, получим

$$J_1=\frac{k^2\sin^2\psi\overline{F_0^2}}{4R_0^2A_0^2}[\Phi(\rho_1)+\Phi(\rho_2)], \tag{21}$$

$$J_2=\frac{k^2\sin^2\psi\overline{F_0^2}}{4R_0^2A_0^2}\frac{\sqrt{2D}}{\sqrt[4]{1+\frac{D^2}{4}}}e^{-\frac{q^2a^2}{4\left(1+\frac{D^2}{4}\right)}}\cos\left[\frac{q^2a^2}{4}\frac{D}{2\left(1+\frac{D^2}{4}\right)}-\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{D}{2}+\frac{\pi}{4}\right]. \tag{22}$$

В формулах (21) и (22) $\Phi(\rho)$ — интеграл вероятностей,

$$\rho_1=\frac{a}{2}\left(\frac{2k\sin^2\psi}{R_0}\Delta+q\right),\quad \rho_2=\frac{a}{2}\left(\frac{2k\sin^2\psi}{R_0}\Delta-q\right),\quad D=\frac{k\sin^2\psi a^2}{R_0}.$$

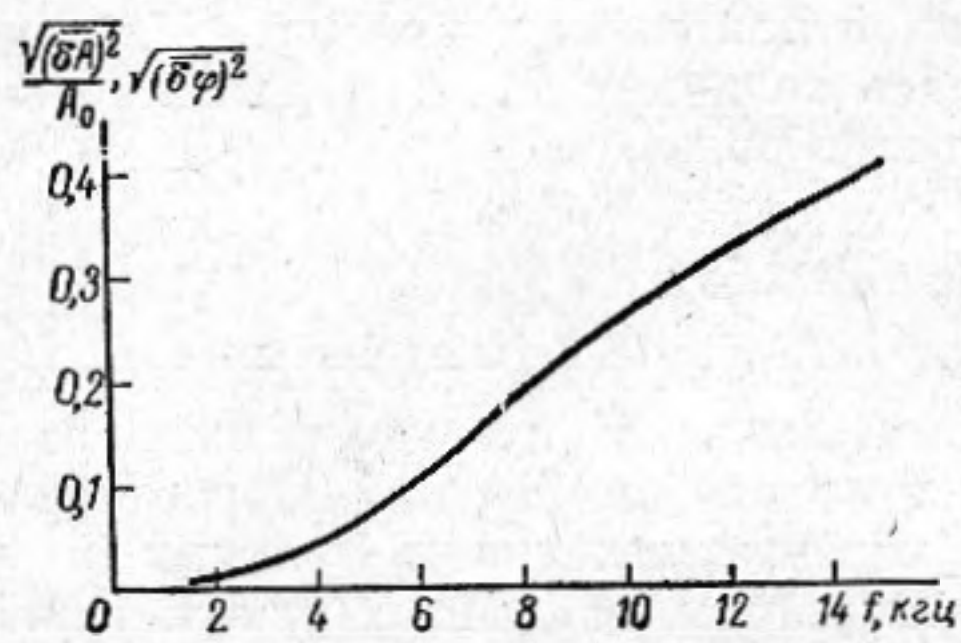
Нетрудно видеть, что вторым интегралом можно пренебречь по сравнению с первым, так как $D\ll 1$, согласно (19).

Рассмотрим два предельных случая. Пусть $\frac{2k\sin^2\psi}{R_0}\Delta>q$ и $\left(\frac{2k\sin^2\psi}{R_0}\Delta-q\right)\frac{a}{2}>1$. При этом будет выполнено также условие $\frac{k\sin^2\psi}{R_0}\Delta^2\gg 1$. В этом случае

$$A_0^2=\frac{1}{4R_0^2},\quad \frac{\overline{(\delta A)^2}}{A_0^2}\cong\overline{(\delta\varphi)^2}\cong 2k^2\sin^2\psi\overline{F_0^2},$$

т. е. флюктуации амплитуды и фазы определяются некоторым параметром, зависящим от частоты, угла скольжения и средней квадратичной амплитуды неровностей. Этот параметр был введен впервые Рэлеем для характеристики отражения плоской волны от неровной поверхности. При малых значениях параметра ($k\sqrt{\overline{F_0^2}}\sin\psi\ll 1$) отражение имеет зеркальный характер, при больших его значениях ($k\sqrt{\overline{F_0^2}}\sin\psi\gg 1$) отражение

приобретает диффузный характер. Рассматриваемый нами случай относится к зеркальному характеру отражения. Зависимость флюктуаций амплитуды и фазы от размеров рассеивающей площадки при выполнении указанных выше условий отсутствует, поскольку рассеянное поле в этом случае формируется областью достаточно малых размеров, лежащей на неровной поверхности в окрестности точки зеркального отражения. Формально это связано с тем, что величина интеграла вероятностей близка к единице при больших по сравнению с единицей значениях его аргумента.



Фиг. 2

Пусть теперь $\frac{2k\sin^2\psi}{R_0}\Delta < q$. В применении к задаче о рассеянии плоской волны на плоской синусоидальной структуре конечной длины 2Δ это условие означает, что точка наблюдения лежит в области разделения спектров рассеяния [5]. Аналогичная картина будет иметь место и для сферической волны при рассеянии достаточно малым участком неровной поверхности с квазигармоническими неровностями. В этом случае рассеивающая площадка не охватывает область, существенную для рассеяния, а флюктуации амплитуды и фазы значительно уменьшаются, что видно из соответствующих выражений, записанных при соблюдении условий

$$\frac{k\sin^2\psi}{R_0}\Delta^2 \gg 1 \text{ и } \left|\frac{a}{2}\left(q-\frac{2k\sin^2\psi}{R_0}\Delta\right)\right| > 1,$$

$$\frac{\overline{(\delta A)^2}}{A_0^2} \cong \overline{(\delta\varphi)^2} \cong \frac{k^2\sin^2\psi\overline{F_0^2}}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{e^{-\rho_2^2}}{|\rho_2|}-\frac{e^{-\rho_1^2}}{\rho_1}\right).$$

В промежуточных случаях следует обращаться к выражениям (21) и (22).

На фиг. 2 изображена зависимость от частоты коэффициента вариации амплитуды и средней квадратичной флюктуации фазы по результатам численных расчетов с помощью формул (21) и (22). Частота изменяется в пределах от 1,5 до 15 *кгц*. Для остальных параметров выбраны следующие числовые значения: $\sin\psi = 0{,}16$; $\sqrt{\overline{F_0^2}} = 3$ *см*; $R_0 = 500$ *м*; $\Delta = 170$ *м*; $a = 8$ *м*; $q = 0{,}42\,\frac{1}{м}\left(\Lambda = \frac{2\pi}{q} = 15\,м\right)$.

Предположим теперь, что форма поверхности характеризуется пространственной функцией корреляции вида

$$F(x_1, y_1)\cdot F(x_2, y_2) = \overline{F_0^2}e^{-\frac{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}{a^2}}.$$

Не останавливаясь на промежуточных выкладках и не выписывая выражения в общем виде, запишем окончательный результат для частного случая $\frac{k\Delta^2\sin^2\psi}{R_0} \gg 1$, $\frac{kl^2}{R_0} \gg 1$;

$$J_1 = 2k^2\sin^2\psi\overline{F_0^2}\Phi\left(\frac{k\sin^2\psi}{R_0}a\cdot\Delta\right)\Phi\left(\frac{ka}{R_0}\cdot l\right), \tag{23}$$

$$J_2 = k^2\sin^2\psi\overline{F_0^2}\sqrt{\frac{k\sin^2\psi a^2}{R_0}}.$$

Эти формулы справедливы лишь при выполнении условия $ka^2/R_0 \ll 1$, поэтому вторым интегралом можно пренебречь по сравнению с первым. Для малых значений аргументов мы получаем

$$\frac{\overline{(\delta A)^2}}{A_0^2} \cong \overline{(\delta\varphi)^2} \cong \frac{8}{\pi}k^4\sin^4\psi\overline{F_0^2}a^2\cdot l\cdot\Delta,$$

т. е. интенсивность флюктуаций амплитуды и фазы звукового сигнала оказывается пропорциональной 4-й степени частоты и площади рассеивающего участка неровной поверхности. Для больших значений аргументов получаем

$$\frac{\overline{(\delta A)^2}}{A_0^2} \cong \overline{(\delta\varphi)^2} \cong 2k^2 \sin\psi \cdot \overline{F}_0^2 .$$

В этом случае флюктуации амплитуды и фазы полностью определяются параметром Рэлея.

Заметим, что выражения для флюктуаций амплитуды и фазы получены на основе разложения в ряд фазовых множителей подынтегральных функций в выражениях (10) и (11) и отбрасывания членов выше 2-го порядка малости. Можно показать, что в рассмотренных нами случаях это допустимо при выполнении условий

$$\frac{k\sin^2\psi}{R_0}\, a' \cdot \Delta \cdot \frac{\Delta^2}{R_0^2} \ll 1, \quad \frac{kb'}{R_0}\, l \cdot \frac{l^2}{R_0^2} \ll 1,$$

где a' и b' — размеры областей, существенных для интегрирования по $\xi = x_1 - x_2$ и $\eta = y_1 - y_2$ соответственно. При этом для двумерной неровности (изменение лишь вдоль координаты x) достаточно выполнения только первого из написанных условий.

В приведенных выше расчетах мы заменяли дифференцирование по нормали в выражении (4) дифференцированием по координате z. Оценим поправку, возникающую при учете производной поля по x. Для флюктуаций амплитуды в случае двумерных неровностей эта поправка будет иметь такой вид:

$$\frac{\delta A'}{A_0} = \frac{k\sin^2\psi}{\pi R_0^2} \iint x \cdot \sin\left[\frac{kx^2\sin^2\psi}{R_0} + \frac{ky^2}{R_0}\right] \cdot \frac{dF}{dx}\, dx\, dy. \tag{24}$$

Предположим, что пространственная функция корреляции углов наклона неровностей совпадает по виду с функцией корреляции смещений поверхности

$$\overline{\frac{dF_1}{dx} \cdot \frac{dF_2}{dx}} \cong \overline{\alpha_1 \cdot \alpha_2} = \overline{\alpha^2} \cdot e^{-\xi^2/a^2} \cos q\xi.$$

Тогда для среднего квадрата поправки после выполнения интегрирования мы получим выражение:

$$\frac{\overline{(\delta A')^2}}{A_0^2} \cong \frac{\overline{\alpha^2}}{8k^2\sin^2\psi}\left\{[\Phi(\rho_1) + \Phi(\rho_2)]\left(\frac{q^2}{2} + \frac{1}{a^2}\right) - \frac{q}{\sqrt{\pi a^2}}[\rho_1 \cdot e^{-\rho_1^2} + \rho_2 e^{-\rho_2^2}] - \right.$$
$$\left. - \frac{2q}{\sqrt{\pi a^2}}(e^{-\rho_1^2} - e^{-\rho_2^2})\right\}. \tag{25}$$

Предположим, что область, существенная для интегрирования, охватывается рассеивающей площадкой. Тогда, при $qa \gg 1$ поправкой можно пренебречь при условии $(k\sin\psi/q)^4 \gg 1$, если же $qa \ll 1$, достаточно потребовать выполнения неравенства $(k\sin\psi a)^4 \gg 1$.

В заключение проведем оценку флюктуаций амплитуды и фазы для больших значений параметра D (т. е. для тех случаев, когда пространственный интервал корреляции смещений поверхности значительно больше размеров зоны Френеля). Запишем интегралы для средних квадратов флюктуаций амплитуды и фазы

$$\frac{\overline{(\delta A)^2}}{A_0^2} = \frac{4k^3\sin^4\psi\overline{F_0^2}}{\pi R_0} \int_{-\Delta}^{\Delta}\int_{-\Delta}^{\Delta} \cos\left(\frac{kx_1^2\sin^2\psi}{R_0} + \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{kx_2^2\sin^2\psi}{R_0} + \frac{\pi}{4}\right) \times$$
$$\times e^{-\frac{(x_1-x_2)}{a^2}} \cos q(x_1 - x_2)\, dx_1\, dx_2, \tag{26}$$

$$\overline{(\delta\varphi)^2} = \frac{4k^3 \sin^4 \psi \overline{F_0^2}}{\pi R_0} \int\limits_{-\Delta}^{\Delta} \int\limits_{-\Delta}^{\Delta} \sin\left(\frac{kx_1^2 \sin^2 \psi}{R_0} + \frac{\pi}{4}\right) \sin\left(\frac{kx_2^2 \sin^2 \psi}{R_0} + \frac{\pi}{4}\right) \times$$

$$\times e^{-\frac{(x_1-x_2)^2}{a^2}} \cos q(x_1 - x_2)\, dx_1\, dx_2. \qquad (27)$$

Интегрируя последовательно по x_1 и x_2 в выражениях (26) и (27) в предположении $\frac{k \sin^2 \psi}{R_0} \frac{\Delta}{q} \gg 1$, мы получаем

$$\frac{\overline{(\delta A)^2}}{A_0^2} = 2k^2 \sin^2 \psi \overline{F_0^2} \left[1 - \left(1 - \frac{3}{2D^2}\right) e^{-q^2a^2/D^2} \cos\left(\frac{q^2a^2}{2D}\right)\right],$$

$$\overline{(\delta\varphi)^2} = 2k^2 \sin^2 \psi \overline{F_0^2} \left[1 + \left(1 - \frac{3}{2D^2}\right) \sin^2\psi\, e^{-q^2a^2/D^2} \cos\left(\frac{q^2a^2}{2D}\right)\right].$$

Если пространственный интервал корреляции смещений поверхности и пространственный период осцилляций функции корреляции $\Lambda = 2\pi/q$ велики по сравнению с размерами зоны Френеля, то $\frac{\overline{(\delta A)^2}}{A_0^2} = 4k^2 \sin^2 \psi \overline{F_0^2} \frac{3}{4D^2}$, $\overline{(\delta\varphi)^2} = 4k^2 \sin^2 \psi \overline{F_0^2}$; при этом флюктуации амплитуды на порядок меньше, чем флюктуации фазы, поскольку $D = \frac{k \sin^2 \psi \alpha^2}{R_0} \gg 1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. C. Eckart. The scattering of sound from the sea surface. J. Acoust. Soc. America, 1953, 25, 566—570.
2. Л. М. Бреховских. Дифракция волн на неровной поверхности. Ж. эксп. и теор. физ., 1952, 23, 3, 275—288.
3. М. А. Исакович. Рассеяние волн от статистически шероховатой поверхности. Ж. эксп. и теор. физ., 1952, 23, 3, 305—314.
4. Л. А. Чернов. Распространение волн в среде со случайными неоднородностями. М., Изд-во АН СССР, 1958.
5. А. Н. Ленорский. Исследование рассеяния звуковых волн на неровных поверхностях (диссертация). Акустический ин-т АН СССР, 1955.

Акустический институт АН СССР
Москва

Поступила в редакцию
9 января 1961 г.