АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

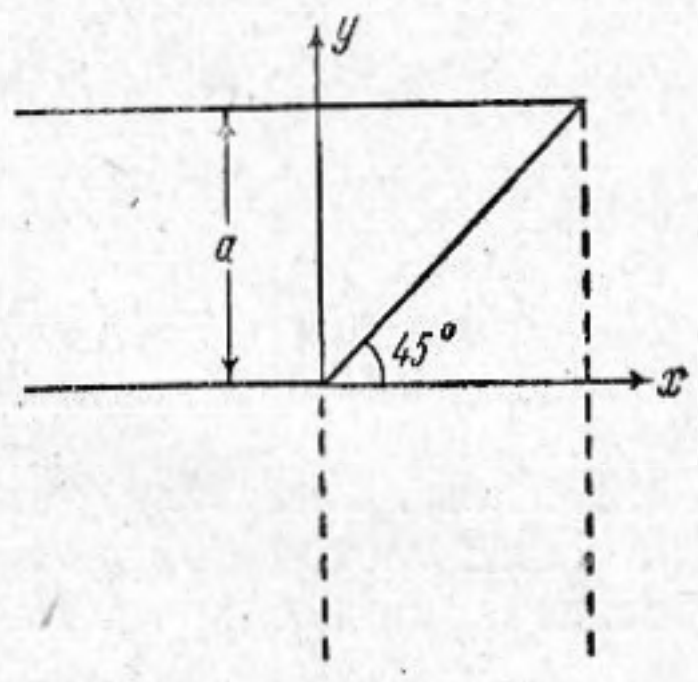
Том VIII 1962 Вып. 2

ОБ ОТРАЖЕНИИ НОРМАЛЬНЫХ ВОЛН ОТ ЗАКРЫТОГО КОНЦА ВОЛНОВОДА

А. Д. Лапин

Рассмотрена плоская задача об отражении нормальных волн от конца волновода, закрытого жесткой или мягкой стенкой, расположенной под углом 45° к его оси. Путем рассмотрения зеркального отражения поля в плоскости стенки, закрывающей волновод, эта задача сведена к задаче о распространении звука в двух одинаковых волноводах, сочлененных под прямым углом. Последняя задача решается «сшиванием» полей на границах областей, в которых собственные функции известны. Для амплитуд нормальных волн отраженного поля получена бесконечная система алгебраических уравнений, которая решена численно методом редукции при некоторых соотношениях между шириной волновода и длиной волны звука. Полученные результаты использованы для решения задачи о рассеянии плоской волны на пилообразной неровной поверхности.

Как известно, в волноводе при отражении нормальной волны от стенки, расположенной перпендикулярно к его оси и характеризующейся реактивным импеданцем Z, вся энергия падающей волны переходит в отраженную нормальную волну того же номера, что и падающая; нормальные волны других номеров не возбуждаются. Структура отраженного поля существенно изменится, если стенка расположена не перпендикулярно к оси волновода. В этом случае в отраженном поле будут присутствовать, вообще говоря, все нормальные волны, которые могут существовать в этом волноводе (однородные и неоднородные). В настоящей работе рассмотрен случай, когда стенка, закрывающая волновод, расположена под углом 45° к его оси (фиг. 1). Предполагается, что импеданц этой стенки равен бесконечности (жесткая стенка) или нулю (мягкая стенка).



Фиг. 1

Обозначим падающее поле в волноводе через p_0. Найдем отраженное поле p. Для нахождения поля p применим следующий прием. Введем фиктивные поля $\tilde{p}_0$ и $\tilde{p}$, получающиеся зеркальным отражением полей p_0 и p в плоскости $x = y$. Из симметрии следует, что введение этих полей позволяет убрать стенку, закрывающую волновод. Следовательно, задача об отражении нормальных волн от закрытого конца волновода сведется к задаче о распространении нормальных волн в двух одинаковых волноводах, сочлененных под прямым углом. Последняя задача уже рассматривалась в работе [1] методом электроакустических аналогий. В настоящей работе эта задача решается путем «сшивания» полей на границах областей, в которых собственные функции известны.

Рассмотрим вначале случай, когда волновод имеет жесткие стенки $y = 0$ и $y = a$. Выберем в качестве падающего поля нормальную волну номера r:

$$p_0(x, y) = e^{i\varkappa_r x} \cos(\xi_r y), \tag{1}$$

где $\xi_r = r\pi/a$, $\varkappa_r = \sqrt{k^2 - \xi_r^2}$. Отраженное поле p будем искать при $x < 0$ в виде суммы нормальных волн

$$p(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{-i\varkappa_n x} \cos(\xi_n y). \tag{2}$$

Путем зеркального отражения p_0 и p в плоскости стенки, закрывающей волновод, получим для $\widetilde{p}_0$ и $\widetilde{p}$ следующие формулы:

$$\widetilde{p}_0(x, y) = \pm e^{i\varkappa_r y} \cos(\xi_r x), \quad \widetilde{p}(x, y) = \pm \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{-i\varkappa_n y} \cos(\xi_n x).$$

Здесь и далее верхний знак соответствует волноводу, закрытому абсолютно жесткой стенкой; нижний знак — волноводу, закрытому абсолютно мягкой стенкой.

Обозначим через P поле в объеме $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant a$. Выразим это поле через его граничные значения. Поле P имеет нулевую нормальную скорость на стенках $x = a$, $y = a$, а при $x = 0$ и $y = 0$ «сшивается» соответственно с полями $(p_0 + p)$ и $(\widetilde{p}_0 + \widetilde{p})$, т. е. это поле удовлетворяет следующим граничным условиям:

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)_{x=a} = 0, \quad \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)_{y=a} = 0, \tag{3}$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)_{x=0} = i \sum_{n=0}^{\infty} (\delta_{nr} - A_n) \varkappa_n \cos(\xi_n y), \tag{4}$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)_{y=0} = \pm i \sum_{n=0}^{\infty} (\delta_{nr} - A_n) \varkappa_n \cos(\xi_n x), \tag{5}$$

$$P_{x=0} = \sum_{n=0}^{\infty} (\delta_{nr} + A_n) \cos(\xi_n y), \tag{6}$$

$$P_{y=0} = \pm \sum_{n=0}^{\infty} (\delta_{nr} + A_n) \cos(\xi_n x). \tag{7}$$

Здесь введено обозначение $\delta_{nr} = \begin{cases} 1 & \text{при } n = r \\ 0 & \text{при } n \neq r \end{cases}$. Поле P будем искать в два этапа. Вначале удовлетворим граничным условиям (3), (4), (5). Применяя метод Фурье, получим, что решение волнового уравнения, удовлетворяющее граничным условиям (3), (4), (5), имеет вид:

$$P(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i(\delta_{nr} - A_n)}{\sin(\varkappa_n a)} \{\cos[\varkappa_n(a - x)] \cos(\xi_n y) \pm \cos(\xi_n x) \cos[\varkappa_n(a - y)]\}. \tag{8}$$

Удовлетворим теперь граничным условиям (6) и (7). Это можно сделать, подбирая соответственным образом коэффициенты A_n в формуле (8). Подставим (8) в (6), умножим обе части полученного соотношения на $\cos(\xi_l y)$ и проинтегрируем по y от 0 до a. Тогда мы получим бесконечную систему алгебраических уравнений для A_n:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\{2\alpha_{nl} \pm \delta_{nl}\theta_l a e^{-i\varkappa_l a}\}}{\sin(\varkappa_n a)} A_n = \frac{\{2\alpha_{rl} \pm \delta_{rl}\theta_l a e^{i\varkappa_r a}\}}{\sin(\varkappa_r a)}, \tag{9}$$

где $\theta_l = \begin{cases} 2 & \text{при } l = 0 \\ 1 & \text{при } l \neq 0, \end{cases}$

$$\alpha_{nl} = \begin{cases} a & \text{при } \varkappa_n = \xi_l = 0 \\ \dfrac{(-1)^l a}{2} & \text{при } \varkappa_n = \xi_l \neq 0 \\ \dfrac{\varkappa_n}{(\varkappa_n^2 - \xi_l^2)} \sin(\varkappa_n a) & \text{при } \varkappa_n \neq \xi_l. \end{cases}$$

Подстановка формулы (8) в граничное условие (7) приводит также к системе уравнений (9).

Решение бесконечной системы алгебраических уравнений (9) дает амплитуды нормальных волн отраженного поля. В двух вырожденных случаях, а именно $ka = m\pi$, $r = 0$ и $ka = \sqrt{2}r\pi$, $r \neq 0$, это решение очевидно. В первом случае ($ka = m\pi$, $r = 0$) оно имеет вид $A_0 = 1$, $A_m = \pm 2$, $A_{n(n\neq 0,\, n\neq m)} = 0$, т. е. отраженное поле в волноводе состоит только из двух нормальных волн номеров 0 и m. Заметим, что нормальная волна номера m состоит из двух плоских волн, распространяющихся по оси y, поэтому она не дает потока энергии по оси волновода.

Второй случай ($ka = \sqrt{2}r\pi$, $r \neq 0$) является вырожденным только для волновода, закрытого жесткой стенкой. В этом случае решение имеет вид $A_r = 1$, $A_{n(n\neq r)} = 0$, т. е. отраженное поле состоит только из нормальной волны номера r. Эта нормальная волна представляет собой суперпозицию двух плоских волн, распространяющихся под углом 45° к оси волновода.

Таким образом, в рассмотренных вырожденных случаях вся энергия падающей волны переходит в отраженную нормальную волну того же номера, что и падающая, в других случаях часть энергии падающей волны переходит в нормальные волны других номеров.

В общем случае алгебраическую систему уравнений (9) удобно решать численно методом редукции [2]. Для возможности применения этого метода достаточно, чтобы коэффициенты системы удовлетворяли условию Коха [3], которое при $\varkappa_n a \neq m\pi$ состоит в сходимости ряда

$$\sum_{n,l} \left| \frac{k\alpha_{nl}}{\theta_l} \frac{\sin(\varkappa_l a)}{\sin(\varkappa_n a)} e^{i\varkappa_l a} \right|^2.$$

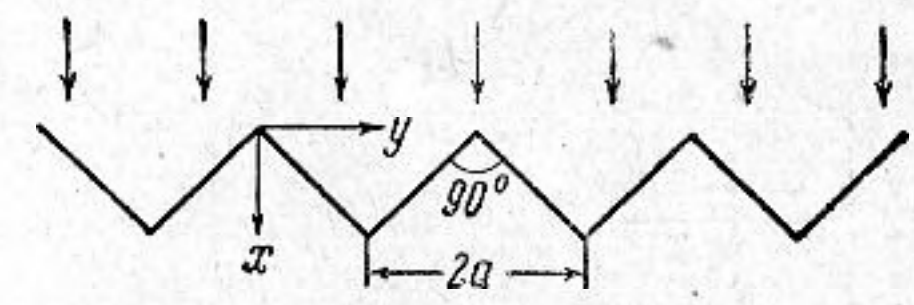
В рассматриваемом случае это условие выполнено, так как мажорирующий ряд

$$\sum_{n,l} \left| \frac{\left[1 - \left(\frac{n\pi}{ka}\right)^2\right]}{\left[1 - \left(\frac{n\pi}{ka}\right)^2 - \left(\frac{l\pi}{ka}\right)^2\right]^2} \right|$$

сходится.

Численное решение системы алгебраических уравнений (9) было выполнено для частного случая $r = 0$. В этом случае решение задачи об отражении нормальных волн от закрытого конца волновода является также решением задачи о рассеянии плоской волны, нормально падающей на пилообразную неровную поверхность (фиг. 2). На фиг. 3—5 приведены графики модулей амплитуд спектров рассеянного поля, вычисленные при различных значениях параметра ka для жесткой поверхности и падающей волны единичной амплитуды. Эти графики показывают сильное возбуждение боковых спектров. Максимальную амплитуду — единицу — имеют спектры, скользящие вдоль неровной поверхности.

Все предыдущие вычисления были сделаны для волновода с абсолютно жесткими стенками. Аналогичные вычисления можно выполнить и для



Фиг. 2

волновода с абсолютно мягкими стенками. В этом случае, задавая падающее поле в виде

$$p_0(x, y) = e^{i\varkappa_r x} \sin(\xi_r y), \tag{10}$$

получим для отраженного поля следующее выражение:

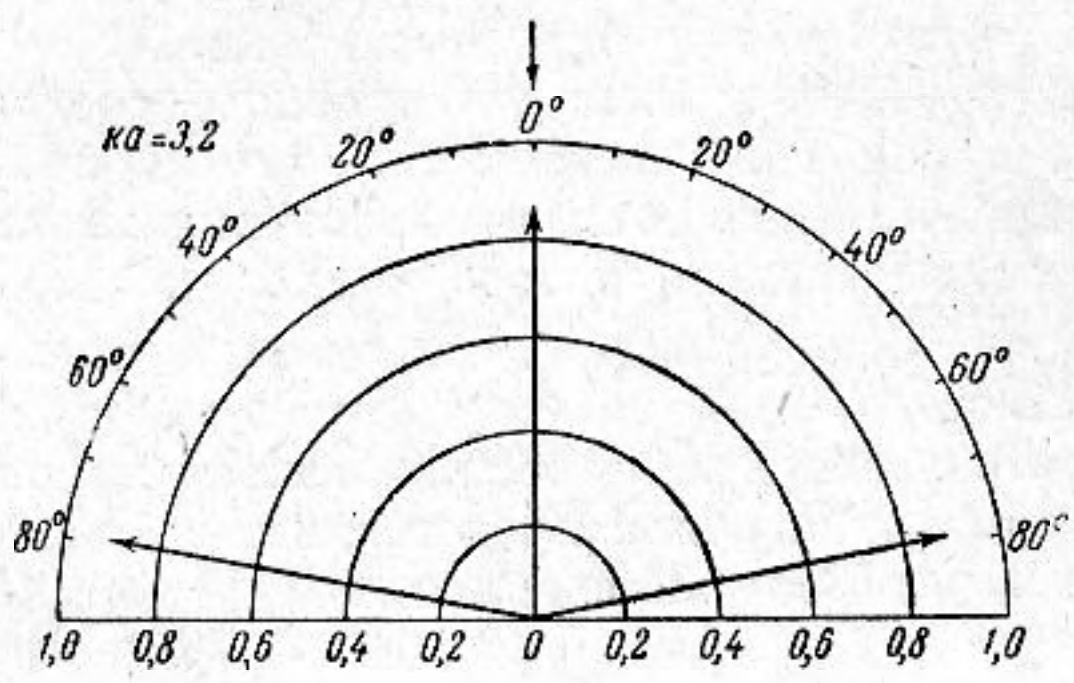
$$p(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-i\varkappa_n x} \sin(\xi_n y), \tag{11}$$

где B_n — решения бесконечной системы алгебраических уравнений

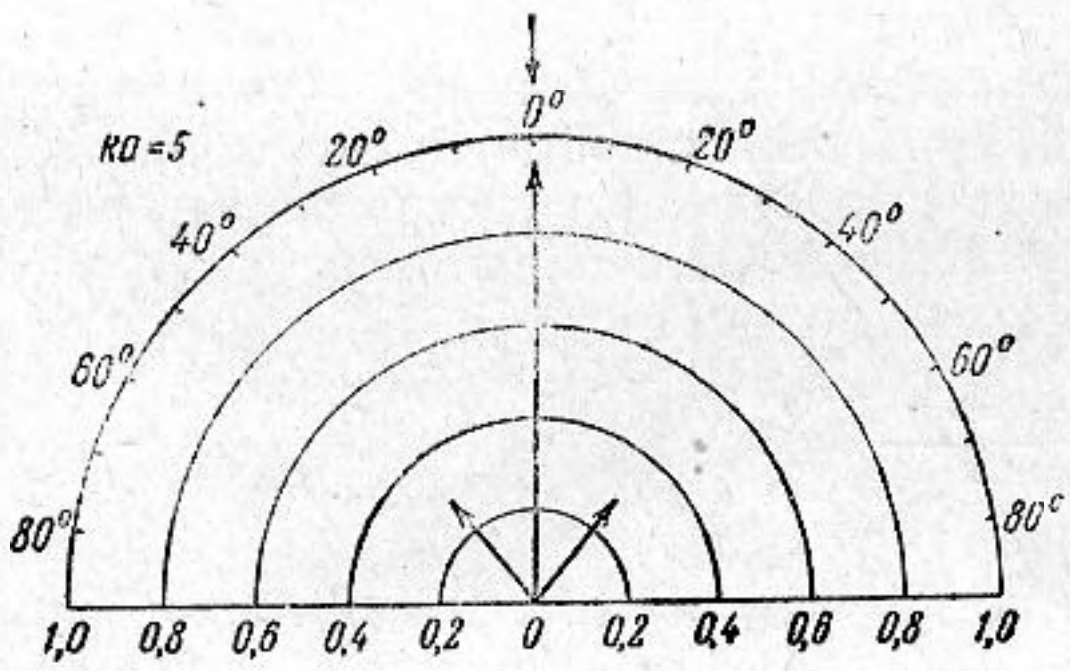
$$\sum_{s=1}^{\infty} \frac{\{2\xi_l \xi_n \alpha_{nl} \pm \delta_{nl} \varkappa_n^2 a e^{-i\varkappa_n a}\}}{\varkappa_n \sin(\varkappa_n a)} B_n = -\frac{\{2\xi^l \xi^r \alpha_{rl} \pm \delta_{rl} \varkappa_r^2 a e^{i\varkappa_r a}\}}{\varkappa_r \sin(\varkappa_r a)}. \tag{12}$$

Выбор знаков в формуле (12) производится по тому же правилу, что и в формулах для волновода с абсолютно жесткими стенками.

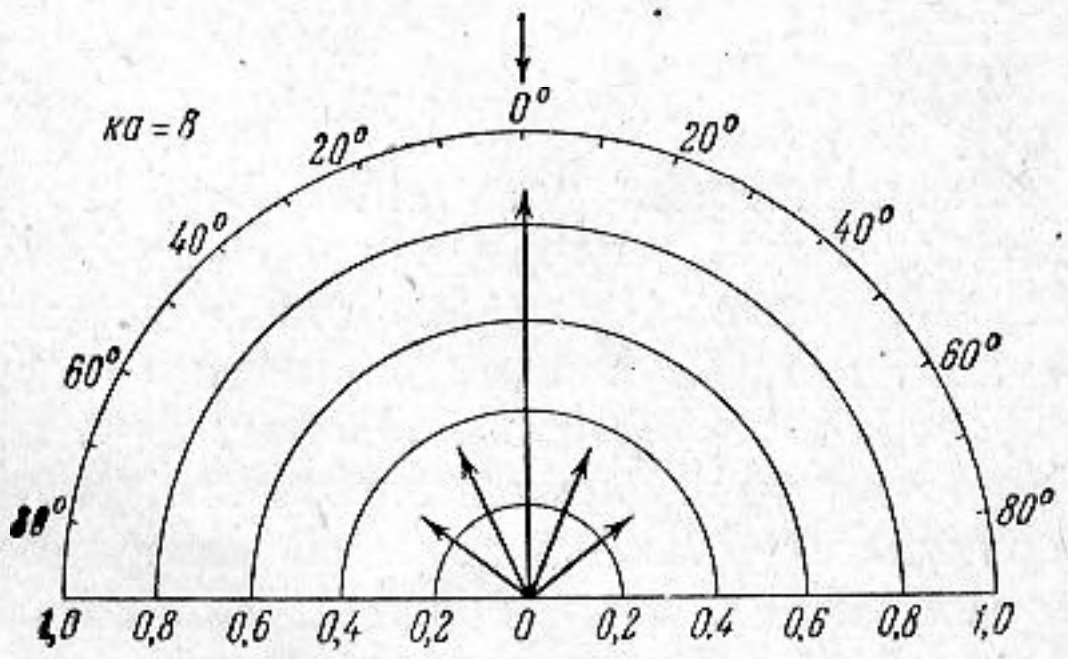
Полученное решение задачи об отражении нормальных волн от закрытого конца волновода можно использовать для нахождения точного решения задачи о рассеянии плоской волны $p_0(x, y) = \exp[i(\varkappa_r x + \xi_r y)]$ на пилообразной неровной поверхности, изображенной на фиг. 2. Рассеянное поле p, соответствующее выбранной нами падающей волне, будем искать следующим образом. Представим падающее поле в виде $p_0 = p_0' + ip_0''$, где p_0' и p_0'' выражаются соответственно формулами (1) и (10) при любых значениях y. Обозначим рассеянные поля, соответствующие па-



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

дающим волнам p_0' и p_0'', через p' и p''. Из симметрии видно, что поля p' и p'' будут выражаться соответственно формулами (2) и (11) при любых значениях y. Следовательно, искомое поле $p = p' + ip''$ запишется в следующем виде:

$$p(x,y) = A_0 \exp[-ikx] + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \{(A_n + B_n) \exp[i(-\varkappa_n x + \xi_n y)] + \\ + (A_n - B_n) \exp[-i(\varkappa_n x + \xi_n y)]\},$$

где A_n и B_n — решения бесконечных систем алгебраических уравнений (9) и (12).

ЛИТЕРАТУРА

1. J. W. Miles. The diffraction of sound due to right—angled joints in rectangular tubes. J. Acoust. Soc. America, 1947, 19, 4, 572—579.
2. Л. В. Канторович, В. И. Крылов. Приближенные методы высшего анализа. М., ГТТИ, 1949.
3. Л. В. Канторович. Функциональный анализ и прикладная математика. Усп. мат. наук, 1948, 3, 6, 89—185.

Акустический институт АН СССР
Москва

Поступила в редакцию
26 мая 1961 г.