АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том VIII 1962 Вып. 2

КОЭФФИЦИЕНТ УСИЛЕНИЯ ТВЕРДОЙ ЗВУКОВОЙ ЛИНЗЫ С ПОТЕРЯМИ

Б. Д. Тартаковский

Из-за потерь в материале линзы коэффициент усиления твердой звуковой линзы возрастает с частотой не безгранично, а до некоторого максимального значения, определяемого материалом линзы, и в некоторых случаях ее размерами.

Сравниваются частотные характеристики коэффициентов усиления твердых звуковых линз, изготовленных из материалов, обладающих линейной и квадратичной зависимостью коэффициента пространственного затухания от частоты, в частности, характеристики алюминиевых и плексигласовых линз и даются рекомендации по выбору материалов для изготовления звуковых линз. Для количественной оценки качества материала, из которого изготовляется звуковая линза, вводится критерий (качественности), позволяющий оценивать целесообразность использования различных материалов.

Рассмотрим плоскосферическую параксиальную звуковую линзу с неравномерным распределением амплитуды по волновому фронту, возникшим только из-за потерь в линзе. Амплитуда на преломляющей поверхности такой линзы определяется выражением $p = p_0 e^{-\gamma l_n}$, где γ — коэффициент пространственного затухания в среде линзы, l_n — толщина линзы на расстоянии h от центра.

Можно показать, что коэффициент усиления такой линзы при произвольной величине γ имеет вид:

$$K = K_0 \frac{1 - e^{-\gamma l}}{-\gamma l}, \tag{1}$$

где K_0 — коэффициент усиления линзы без потерь $l = H^2 / 2R$ — толщина линзы на краю, R — радиус кривизны преломляющей поверхности линзы, H — радиус (высота) линзы. Если потери малы и $e^{-\gamma l} \approx 1 - \gamma l$, то

$$K \approx K_0 \left(1 - \frac{\gamma l}{2}\right) = K_0 (1 - \gamma l_{\text{ср}}), \tag{2}$$

где $l_{\text{ср}} = v / S_{\text{л}}$ — средняя толщина линзы (определяемая отношением объема линзы v к площади преломляющей поверхности $S_{\text{л}}$).

Формула (2) имеет простой физический смысл. Звуковое давление в фокусе является суммой эквифазных звуковых давлений, пропорциональных звуковым давлениям на волновой поверхности независимо от формы линзы. Поскольку в расчете принято, что уменьшение звукового давления из-за вязких потерь пропорционально толщине линзы, общее уменьшение коэффициента усиления оказывается пропорциональным объему линзы, а средняя потеря — пропорциональной средней толщине линзы. Если учесть следующий член разложения $\frac{(\gamma l)^2}{2}$, то коэффициент усиления может быть представлен в форме

$$K = \frac{i}{\lambda F} \left[S_{\text{л}} - \gamma v + \frac{\gamma^2 I_p}{4R} \right], \tag{3}$$

где I_p — полярный геометрический момент инерции линзы относительно оси. Так как разложение $e^{-\gamma l}$ дает знакопеременный и сходящийся ряд, то расчет величины K с дальнейшим приближением даст резуль-

таты, лежащие в пределах

$$\frac{i}{\lambda F}(S_{\text{л}} - \gamma v) < K < \frac{i}{\lambda F}\left(S_{\text{л}} - \gamma v + \frac{\gamma^2 I_p}{4R}\right). \tag{4}$$

Вернемся к рассмотрению линзы с произвольно большими потерями. Для всех существующих материалов γ растет с увеличением частоты и поэтому член $e^{-\gamma l}$ уменьшается и в пределе стремится к нулю. Рассматривая параксиальную линзу и учитывая, что $l = H^2 / 2F(1-n)$, получим

$$K = \frac{K_0}{\gamma l} = \frac{2\pi(1-n)}{\lambda\gamma}, \quad f \to \infty. \tag{5}$$

Измерения коэффициента затухания, проведенные различными авторами (см. обзор [1]) показывают, что для большинства твердых и жидких сред приближенно можно считать $\gamma = N_1 f^{m_1} + N_2 f^{m_2}$, где $N_{1,2}$ — коэффициенты, $m_{1,2}$ — показатели степени, характеризующие зависимость коэффициента затухания от частоты. Подставив это выражение для γ в выражение (5), получим

$$K = \frac{2\pi(1-n)f}{\gamma c_0} = \frac{2\pi(1-n)}{c_0}\,\frac{1}{N_1 f^{m_1-1} + N_2 f^{m_2-1}}, \tag{6}$$

где c_0 — скорость звука в пространстве изображения.

Коэффициент усиления K стремится к некоторой постоянной величине, если коэффициент затухания пропорционален частоте. Если коэффициент затухания растет с частотой быстрее, чем по линейному закону, то, начиная с некоторой частоты, K будет уменьшаться с увеличением частоты. Если же затухание будет возрастать медленнее, чем по линейному закону, то коэффициент усиления будет непрерывно возрастать с частотой, хотя и медленнее, чем по линейному закону.

Найдем частоту $f_{\max}$, при которой коэффициент усиления имеет наибольшую величину. Дифференцируя выражение (1) по f, получим, полагая для упрощения $N_2 = 0$ и опуская индекс 1,

$$\frac{d}{df}\left(K_0\,\frac{1-e^{-\gamma l}}{\gamma l}\right) = \frac{2\pi(1-n)}{c_0 N}\left[(1-m)f^{-m}(1-e^{-Nlf^m}) + Nle^{-Nlf^m}\right],$$

откуда

$$e^{-Nlf_{\max}^m} = \frac{m-1}{mNlf_m + (m-1)}. \tag{7}$$

При $m = 1$, как это и следовало ожидать из сказанного выше, уравнение (7) удовлетворяется лишь при значении $f_{\max} \to \infty$. При $m < 1$ решения в действительной области значений f нет. Для величин $m > 1$ можно найти значения $f_{\max}$, соответствующие максимуму усиления, решив уравнения (7). Для $m = 2$, решая уравнение (7) графически, получим $Nlf_{\max}^2 = 1{,}244$. Иначе говоря, максимальное усиление будет иметь место в том случае, когда амплитуда на краю линзы уменьшается в $e^{1{,}244} \approx 3{,}4$ раза.

Максимальная величина коэффициента усиления, получаемая подстановкой значения $f = f_{\max}$ в выражение (6) при затухании, пропорциональном частоте, составляет

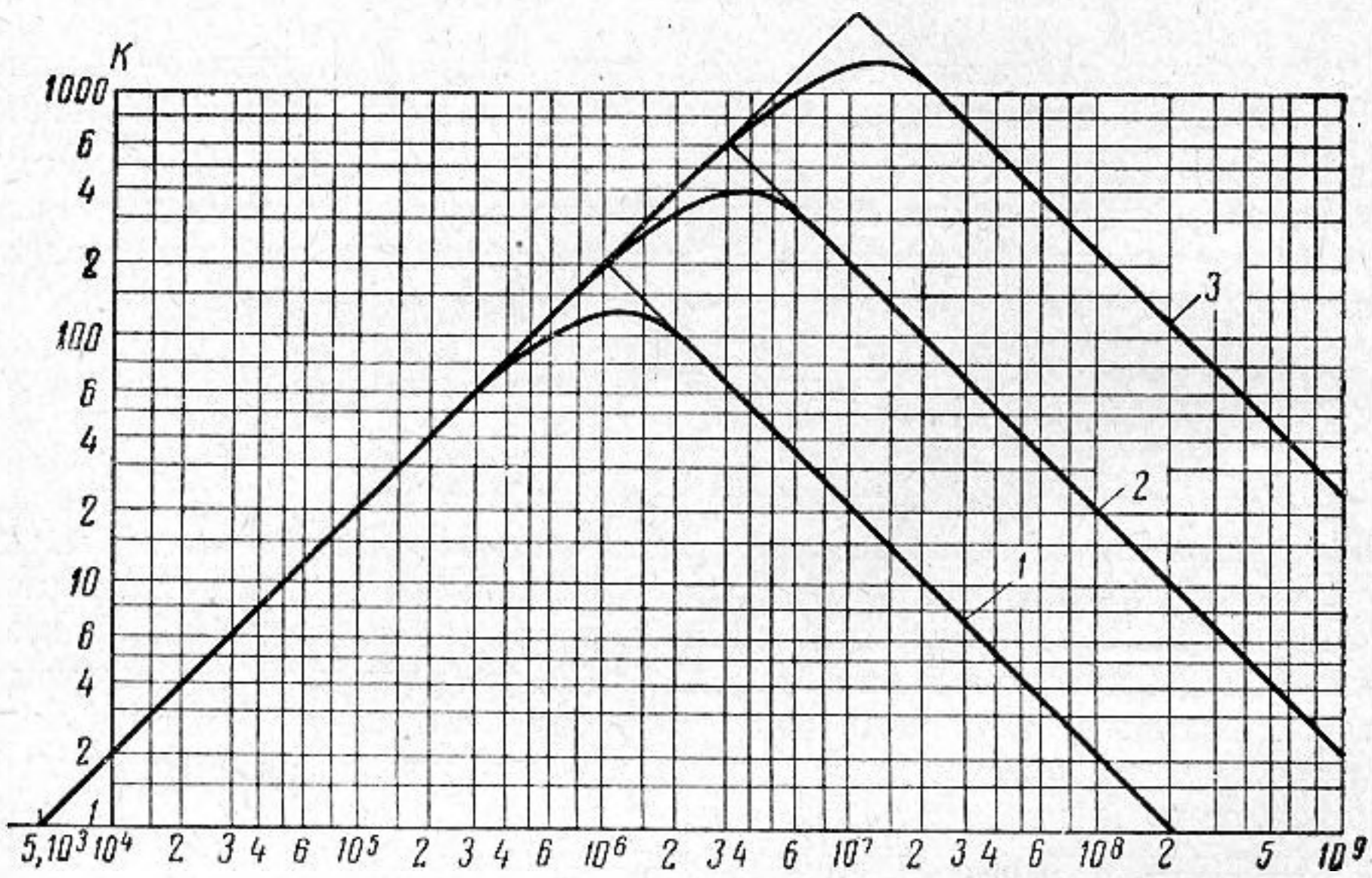
$$K_m = \frac{2\pi(1-n)}{c_0 N}; \tag{8}$$

при затухании, пропорциональном квадрату частоты —

$$K_m = \frac{\pi H^2}{\lambda F}\cdot\frac{1-e^{-1{,}244}}{1{,}244} = 0{,}573\,\frac{\pi H^2}{\lambda F} = \frac{1{,}275\pi(1-n)}{c_0}\sqrt{\frac{l}{N}}. \tag{9}$$

Независимость максимального значения коэффициента усиления при линейном законе роста затухания от размеров линзы объясняется тем, что оно достигается при $f \to \infty$. При этом затухание на краю линзы становится настолько большим, что добавка звукового давления, появляющаяся с увеличением высоты линзы, оказывается пренебрежимо малой сравнительно с единицей.

При квадратичном законе оптимум коэффициента усиления наступает уже при такой частоте, когда затухание на краю линзы приводит к уменьшению амплитуды только в 3,4 раза. Следовательно, размеры линзы должны при этом влиять на величину коэффициента усиления.



Фиг. 1

Поэтому, при линейном увеличении затухания с частотой невозможно добиться увеличения максимального коэффициента усиления путем увеличения размеров линзы; при квадратичном же законе, чем больше площадь линзы, тем больший может быть достигнут коэффициент усиления линзы.

Заметим, что поскольку в обоих случаях величина $K_{\max}$ пропорциональна $\frac{1-n}{c_0} = \frac{1}{c_0} - \frac{1}{c_d}$ (c_d — скорость звука в линзе), то для увеличения предельного коэффициента усиления выгодно брать возможно большую величину c_d и возможно меньшую величину c_0.

Рассмотрим частотные характеристики коэффициентов усиления K при $m = 2$ и $m = 1$. На фиг. 1 в двойном логарифмическом масштабе показаны частотные характеристики коэффициента усиления K_p при $m = 2$ для значений $N = 10^{-13}$ (*1*); 10^{-14} (*2*); 10^{-15} (*3*) при $2\pi(1-n)/c_0 = 2 \cdot 10^{-5}$.

С хорошим приближением можно аппроксимировать левые и правые ветви характеристик соответствующими асимптотами, определяя оптимальные частоты $f_{\max}$ местами их пересечений:

$$K = \frac{\pi H^2}{c_0 F} f_{\max} = \frac{2\pi(1-n)}{c_0 N f_{\max}}, \tag{10}$$

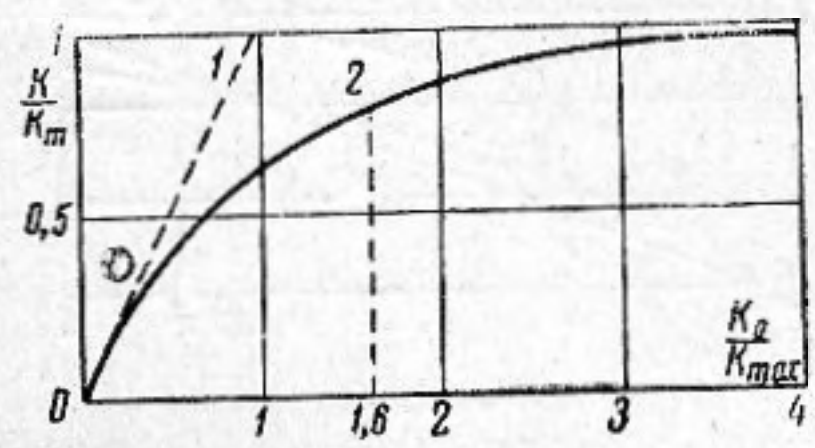
откуда $N f_{\max}^2 l = 1$, т. е. при $f = f_{\max}$ затухание на краю линзы равно $1/\pi$. Более точная величина затухания при оптимуме коэффициента усиления, как мы видели ранее, составляет $1/3{,}4$.

При линейном увеличении затухания с частотой ($m = 1$) частотная зависимость коэффициента усиления может быть представлена формулой

$$K = K_m (1 - e^{-K_0/K_m}), \tag{11}$$

где K — фактический коэффициент усиления при частоте f, K_m — предельный коэффициент усиления при $f \to \infty$, K_0 — коэффициент усиления линзы без потерь.

На фиг. 2 эта зависимость (кривая *2*) сопоставлена с частотной характеристикой коэффициента усиления линзы без учета затухания K_0 (кривая *1*). По горизонтальной оси отложено отношение K_0 / K_{max}, пропорциональное частоте. По вертикали оси отложено отношение K/K_{max}, пропорциональное коэффициенту усиления линзы.



Фиг. 2

Начиная со значений $K_0 / K_m = 1{,}6$ и выше, коэффициент усиления K уменьшается из-за вязких потерь более чем вдвое, приближаясь к предельному значению коэффициента усиления K_m в пределах величин: $K = 0{,}8\ K_m \div K_m$. Величина $K_0 / K_m = 1{,}6$ может быть принята в качестве граничного критерия при оценке применимости данного материала для изготовления линзы, работающей в заданном диапазоне частот.

До сих по мы не учитывали вязкие потери на постоянной составляющей толщины линзы (толщина линзы в центре). Если учесть это затухание, то коэффициент усиления будет иметь максимум даже при линейном законе возрастания затухания с частотой. Однако роль потери в этом слое может быть сведена до минимума уменьшением его толщины.

Значительные потери в линзах на высоких частотах заставляют осторожно подходить к выбору материалов для изготовления линз. Например, если для частот ниже 10^5 *гц* могут с успехом применяться пластмассы, то при частотах в $10^6 - 10^7$ *гц*, используемых в ультразвуковой дефектоскопии, эти материалы становятся малопригодными. Для этого диапазона частот более подходящими оказываются легкие сплавы, обладающие малыми вязкими потерями, например, алюминий, дюраль и электрон. В области частот $10^5 \div 10^6$ *гц* одинаково пригодны как те, так и другие материалы. Однако здесь уже следует учитывать затухание в пластмассах.

Выбор материала линз для этого частотного диапазона, в известной мере, определяется возможностью применения звуковых переходных слоев, обеспечивающих возможность полного перехода звуковой энергии через границы линзы и среды.

Для сравнительной оценки материалов, используемых для изготовления линз, полезно ввести количественный критерий качественности, характеризующий предельно возможный коэффициент усиления линзы, выполненный из данного материала. Учитывая помимо потерь в линзе также и проницаемость границ линзы и жидкости и беря для простоты коэффициент звукопроницаемости границы при нормальном падении, получим для материалов, потери которых пропорциональны частоте,

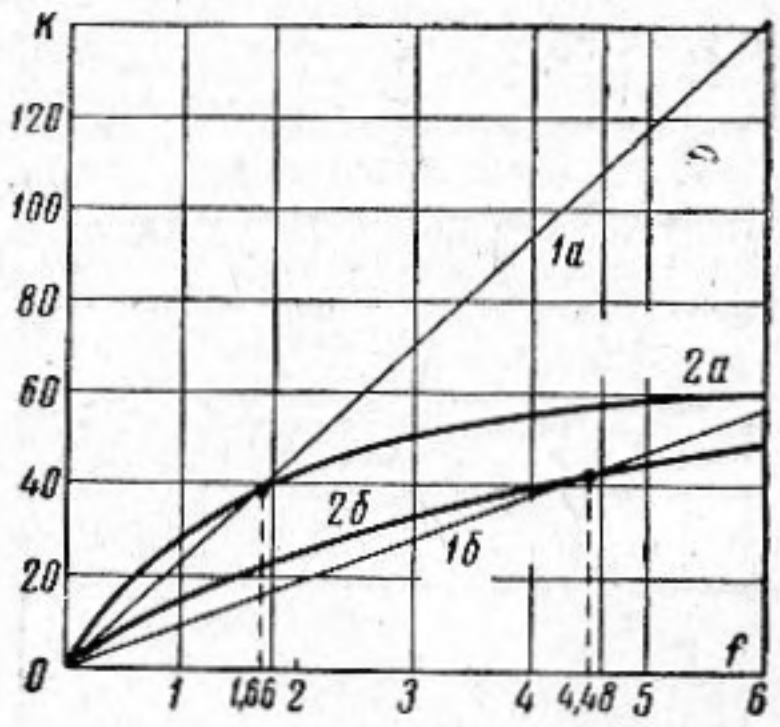
$$K = \frac{8\pi}{\rho_0 c_0} \left[\frac{1}{N} \frac{1-n}{n} \frac{\rho}{\left(1 + \frac{\rho}{\rho_0} \frac{1}{n}\right)^2} \right], \tag{12}$$

для материалов, потери которых пропорциональны квадрату частоты,

$$K = \frac{5{,}1\pi \sqrt{l}}{\rho_0 c_0} \left[\frac{1}{\sqrt{N}} \frac{1-n}{n} \frac{\rho}{\left(1 + \frac{\rho}{\rho_0} \frac{1}{n}\right)^2} \right]. \tag{13}$$

Величины, стоящие в квадратных скобках, характеризуют качественность материала, предназначаемого для линз высокочастотного диапазона.

Представляет также интерес сопоставить материалы для линз, предназначенных для работы при определенной частоте, или в некотором частотном диапазоне, по их эффективности на этих частотах. Для этого коэффициент усиления линзы удобно преобразовать к виду:



Фиг. 3

$$K = \frac{2\pi}{c_0} \frac{4\frac{\rho c_d}{\rho_0 c_0}(1-n)}{\left(1+\frac{\rho c_d}{\rho_0 c_0}\right)^2} \left[\frac{1-e^{-\gamma l}}{\gamma}\right] f, \quad (14)$$

при котором член в квадратных скобках определит собой эффективность материала для заданной частоты (частотную характеристику коэффициента усиления). Сравнивая, например, плексиглас ($\rho = 1{,}17$; $C_d = 2640$ *м/сек*; $N = 1{,}4 \cdot 10^{-7}$ 1/*смгц*) и алюминий ($\rho = 2{,}7$; $C_d = 6300$ *м/сек*; $N = 10^{-9}$ 1/*см гц*), взяв в качестве среды воду ($\rho = 1$; $C_0 = 1450$ *м/сек*), получим частотные характеристики коэффициента усиления для линз $l = 5$ *см* и $l = 2$ *см*, показанные на фиг. 3. Ниже частоты $f = 1{,}66$ *мггц* для линз толщиной 5 *см* (кривые 1*а* и 2*а*) и $f = 4{,}48$ *мггц* для линз толщиной 2 *см* (кривые 1*б* и 2*б*) коэффициент усиления плексигласовых линз (кривые 1*б*, 2*б*) больше, чем алюминиевых (кривые 2*а*, 2*б*); выше этих частот плексиглас оказывается хуже алюминия.

Легко видеть, что формула (14) позволяет сравнить материалы с произвольными частотными характеристиками потерь.

В заключение отметим, что хотя вычисления, приведенные выше, относились к параксиальным линзам, однако они дают возможность оценить характер частотной зависимости коэффициента усиления линзы с конечным углом раскрытия, в частности, безаберрационной плоскоэллиптической линзы. Различие в толщинах плоскосферической, плоскоэллиптической и параксиальной линз пренебрежимо мало сравнительно с толщиной линзы и поэтому не сказывается на расчетах, не учитывающих фазовых соотношений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Бергман. Ультразвук и его применение в науке и технике. Пер. с нем. М., ИЛ, 1956.

Акустический институт АН СССР
Москва

Поступила в редакцию
25 января 1961 г.