АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том VIII 1962 Вып. 2

ОТРАЖЕНИЕ И ПРЕЛОМЛЕНИЕ ИЗГИБНЫХ ВОЛН НА ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА ДВУХ ПЛАСТИН

В. В. Тютекин

Получены общие формулы для коэффициентов отражения и преломления при падении плоской изгибной волны под произвольным углом θ на границу раздела двух полубесконечных пластин. Приводятся расчетные графики для случая $\theta = 0$ при различных соотношениях параметров пластин, а также угловая зависимость коэффициента отражения при равенстве волновых чисел пластин.

Как известно, изгибные волны, распространяющиеся в упругих пластинах, имеют ряд особенностей по сравнению со звуковыми волнами, а также с упругими волнами в среде, модуль сдвига которой отличен от нуля. Специфичность изгибных волн очень наглядно проявляется, в частности, при их отражении и преломлении на границе раздела двух пластин, имеющих разные параметры. Насколько нам известно, подобная задача для одного частного случая граничных условий впервые, по-видимому, была решена Л. Я. Гутиным.

Пусть две полубесконечные пластины, толщины которых малы по сравнению с длиной изгибной волны, расположены в плоскости чертежа (фиг. 1) и имеют общие срединные поверхности I; граница раздела проходит по оси x прямоугольной системы координат. Из всех возможных случаев соединения пластин мы рассмотрим наиболее общий случай — жесткого скрепления торцов пластин между собой*.

Рассматривая случай достаточно низких частот, как обычно, пренебрежем эффектом сдвига и инерции вращения. Тогда уравнения движения пластин для синусоидального во времени процесса запишутся так**:

$$\Delta^2 w - k^4 w = 0, \tag{1}$$

$$\Delta^2 w_1 - k_1^4 w_1 = 0, \tag{2}$$

где Δ — двумерный оператор Лапласа, а $\Delta^2 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$, w — смещение пластины, перпендикулярное к плоскости пластины: волновое число k выражается через параметры пластины — плотность ρ, толщину h, цилиндрическую жесткость $D = Eh^3 / 12(1 - \nu^2)$, где E — модуль Юнга и ν — коэффициент Пуассона, следующим образом: $k = \sqrt[4]{\rho h \omega^2 / D}$ и, соответственно, $k_1 = \sqrt[4]{\rho_1 h_1 \omega^2 / D_1}$. Пусть по «верхней» пластине распространяется плоская изгибная волна единичной амплитуды, угол паде-

---

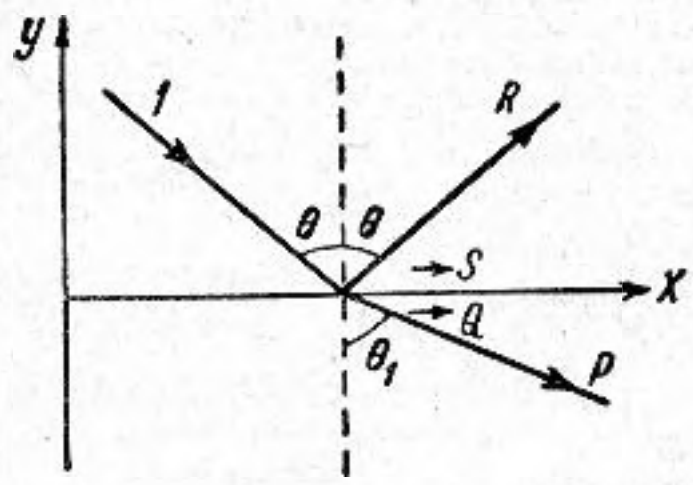
* Строгое решение такой задачи возможно только при одинаковых толщинах пластин. Поскольку, однако, все величины деформаций, сил, моментов и так далее, рассмотренные ниже, отнесены к срединной плоскости пластин, то будем считать толщины последних различными, пренебрегая эффектами, обусловленными их несоответствием на границе.

** В дальнейшем все обозначения без индекса относятся к «верхней» пластине, а с индексом 1 — к «нижней» пластине.

ния которой по отношению к границе раздела равен θ. Опуская, как и всюду в дальнейшем, временной множитель $e^{-i\omega t}$, запишем эту падающую волну в виде

$$w = e^{ik(\sin\theta x - \cos\theta y)}. \tag{3}$$

Поскольку уравнения движения пластин (1) и (2) являются уравнениями 4-й степени, то для удовлетворения всех граничных условий необходимо принять во внимание две отраженные волны: одну — «обычную», распро-страняющуюся от границы раздела под углом отражения θ, а другую — неоднородную волну, фаза которой изменяется вдоль оси x, а амплитуда убывает в положительном направлении оси y. По той же причине необходимо рассматривать две преломленные волны: одну — распространяющуюся в «нижней» пластине под некоторым углом преломления θ_1, а другую — неоднородную волну, амплитуда которой убывает в отрицательном направлении оси y. Легко видеть из (1), (2) и (3), что эти четыре волны запишутся следующим образом: отраженные волны



Фиг. 1

$$w = Re^{ik(\sin\theta x + y\cos\theta)} + Se^{ik\sin\theta(x) - k\sqrt{1+\sin^2\theta}\, y} \tag{4}$$

и преломленные волны

$$w_1 = Pe^{ik_1(\sin\theta_1 x - \cos\theta_1 y)} + Qe^{ik_1\sin\theta_1 x + k_1\sqrt{1+\sin^2\theta_1}\, y}. \tag{5}$$

В выражениях (4) и (5) коэффициенты R, S, P, Q являются неизвестными пока амплитудами, которые подлежат определению из граничных условий. Поскольку неоднородные волны, описываемые коэффициентами S и Q, не связаны с переносом энергии в направлении границы раздела или от нее, то в соответствии с [1] величина $|R|$ является коэффициентом отражения изгибной волны (3) (по амплитуде).

Граничные условия, соответствующие жесткому скреплению пластин друг с другом, имеют вид [2]:

$$w = w_1, \quad M_y = M_{y1}, \quad \partial w/\partial y = \partial w_1/\partial y, \quad v_y = v_{y1} \quad \text{при } y = 0, \tag{6}$$

где

$$M_y = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) \text{ — изгибающий момент,}$$

$$v_y = \left(Q_y - \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}\right), \text{ где } Q_y \text{ — перерезывающая сила,}$$

M_{xy} — крутящий момент, Q_y — перерезывающая сила, так что

$$v_y = -D\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + (2-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right].$$

Для того чтобы при $y = 0$ периодичность по оси x в обеих пластинах была одной и той же, необходимо положить

$$k\sin\theta = k_1\sin\theta_1. \tag{7}$$

Это равенство выражает собой закон преломления Снеллиуса и по форме точно совпадает с аналогичным законом в оптике или акустике.

Подставляя (3), (4), (5) в (6) и учитывая (7), получим систему четырех уравнений для определения неизвестных коэффициентов R, S, P и Q:

$$R + S - P - Q = -1, \tag{8}$$

$$\cos\theta R + i\sqrt{1+\sin^2\theta}\, S + \xi\cos\theta_1 P + i\xi\sqrt{1+\sin^2\theta_1}\, Q = \cos\theta, \tag{9}$$

$$-\sigma^- R + \sigma^+ S + \psi\xi^2(\sigma_1^- P - \sigma_1^+ Q) = \sigma^-, \tag{10}$$

$$i\cos\theta\sigma^+ R + \sqrt{1+\sin^2\theta}\,\sigma^- S + \psi\xi^3(i\cos\theta_1\sigma_1^+ P + \\ + \sqrt{1+\sin^2\theta_1}\,\sigma_1^- Q) = i\cos\theta\sigma^+. \tag{11}$$

Здесь введены обозначения: $\xi = k_1/k$, $\psi = D_1/D$, $\sigma^\pm = 1 \pm \sin^2\theta(1-\nu)$, $\sigma_1^\pm = 1 \pm \sin^2\theta_1(1-\nu_1)$.

Оставляя в стороне вопрос о неоднородных волнах, описываемых амплитудами S и Q, найдем из (8)—(11) величины R и P:

$$R = -\frac{\Delta_R}{\Delta_0}, \quad P = \frac{\Delta_p}{\Delta_0}, \tag{12}$$

где

$$\Delta_p = 4i\cos\theta\,[\sqrt{1+\sin^2\theta}\,(\psi\xi^2\sigma_1^+ + \sigma^-) + \xi\sqrt{1+\sin^2\theta_1}\,(\psi\xi^2\sigma_1^- + \sigma^+)], \tag{12а}$$

$$\left.\begin{matrix}\Delta_0\\ \Delta_R\end{matrix}\right\} = \psi^2\xi^5\,[(\sigma_1^-)^2\sqrt{1+\sin^2\theta_1} + i\cos\theta_1(\sigma_1^+)^2]\,(\sqrt{1+\sin^2\theta} \pm i\cos\theta) + \\ + 4i\psi\xi^2(\xi^2\sqrt{1+\sin^2\theta_1}\cos\theta_1 \pm \sqrt{1+\sin^2\theta}\cdot\cos\theta) - \\ - 2\psi\xi^3(\sqrt{1+\sin^2\theta_1}\,\sigma_1^- - i\sigma_1^+\cos\theta_1)(\sqrt{1+\sin^2\theta}\,\sigma^- \mp i\cos\theta\sigma^+) + \\ + \xi(\sqrt{1+\sin^2\theta_1} + i\cos\theta_1)\,[(\sigma^-)^2\sqrt{1+\sin^2\theta} \pm i(\sigma^+)^2\cos\theta]. \tag{12б}$$

В последнем выражении верхний знак перед членами с $\cos\theta$ относится к значению Δ_0, а нижний знак — к значению Δ_R.

При помощи выражений (12), (12а) и (12б) могут быть рассчитаны коэффициенты отражения и преломления для произвольного соотношения между параметрами пластин и при произвольном угле падения изгибной волны на границу раздела. Ниже мы приведем результаты расчетов только для некоторых частных случаев.

Рассмотрим величину коэффициента отражения при нормальном падении волны. Подставляя $\theta = \theta_1 = 0$ в (12а) и (12б), получим выражение для амплитуд отраженной и преломленной волн в виде

$$R = i\,\frac{(1-\psi\xi^2)^2 - i2\psi\xi(1-\xi^2)}{(1+\psi\xi^2)^2 + 2\psi\xi(1+\xi^2)}, \qquad P = \frac{2(1+\psi\xi^2)(1+\xi)}{\xi\,[(1+\psi\xi^2)^2 + 2\psi\xi(1+\xi^2)]},$$

откуда коэффициент отражения выражается формулой*

$$|R| = \frac{\sqrt{(1-\psi\xi^2)^4 + 4\psi^2\xi^2(1-\xi^2)^2}}{(1+\psi\xi^2)^2 + 2\psi\xi(1+\xi^2)}. \tag{13}$$

Из (13) видно, что коэффициент отражения обращается в нуль только при выполнении двух условий: $\psi = 1$ и $\xi = 1$, т. е. при равенстве цилиндрических жесткостей и волновых чисел обеих пластин. Легко показать, что эти два условия сводятся к следующим: $ch = c_1h_1$, $\rho h = \rho_1 h_1$, где $c = \sqrt{E/\rho(1-\nu^2)}$ — скорость продольных волн в «верхней» пластине, c_1 — та же скорость для «нижней» пластины.

Значения коэффициента отражения, рассчитанные по формуле (13), приведены на фиг. 2 в зависимости от соотношения параметров пластин. По оси ординат отложены значения R, а по оси абсцисс — ψ в логарифмическом масштабе, в качестве параметра взята величина ξ, значения которой изменяются от 0,05 до 1. Поскольку, как легко видеть из (13),

$$R(\psi, \xi) = R(1/\psi, 1/\xi) \text{ и } R(\psi, 1/\xi) = R(1/\psi, \xi),$$

данные, приведенные на фиг. 2, могут быть использованы также для расчета величины R при ξ от 1 до 20 для значений $0{,}01 \leqslant \psi \leqslant 100$. Из рассмотрения фиг. 2 видно, что при $\psi \to 0, \infty$ величина $R \to 1$, а при промежуточных значениях имеет два равных между собой минимальных значения, а также относительный максимум, расположенный между ними. Исследование

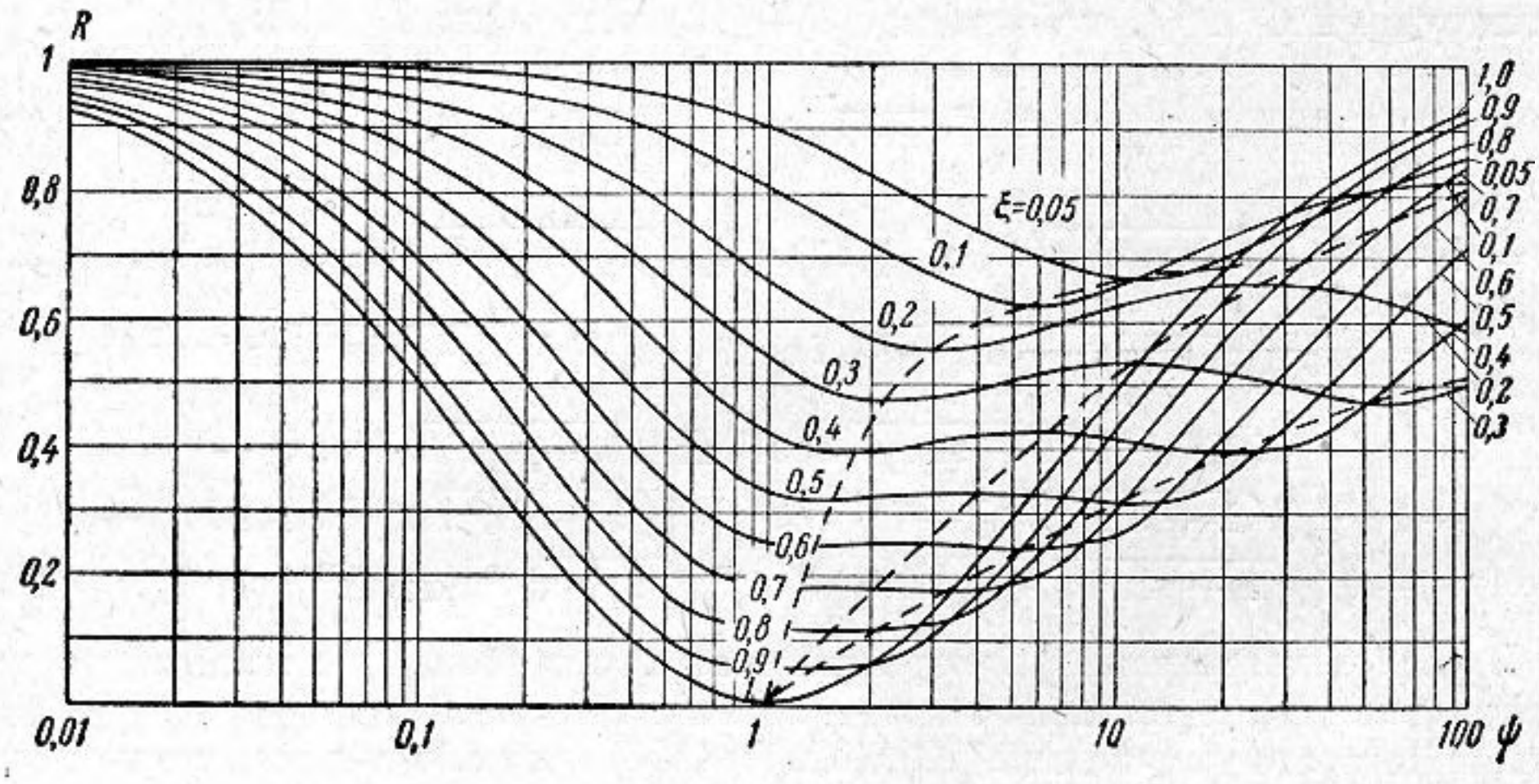
* Всюду в дальнейшем будем писать для удобства R вместо $|R|$.

выражения (13) показывает, что значения ψ, при которых R достигает минимума и максимума, определяются выражениями:

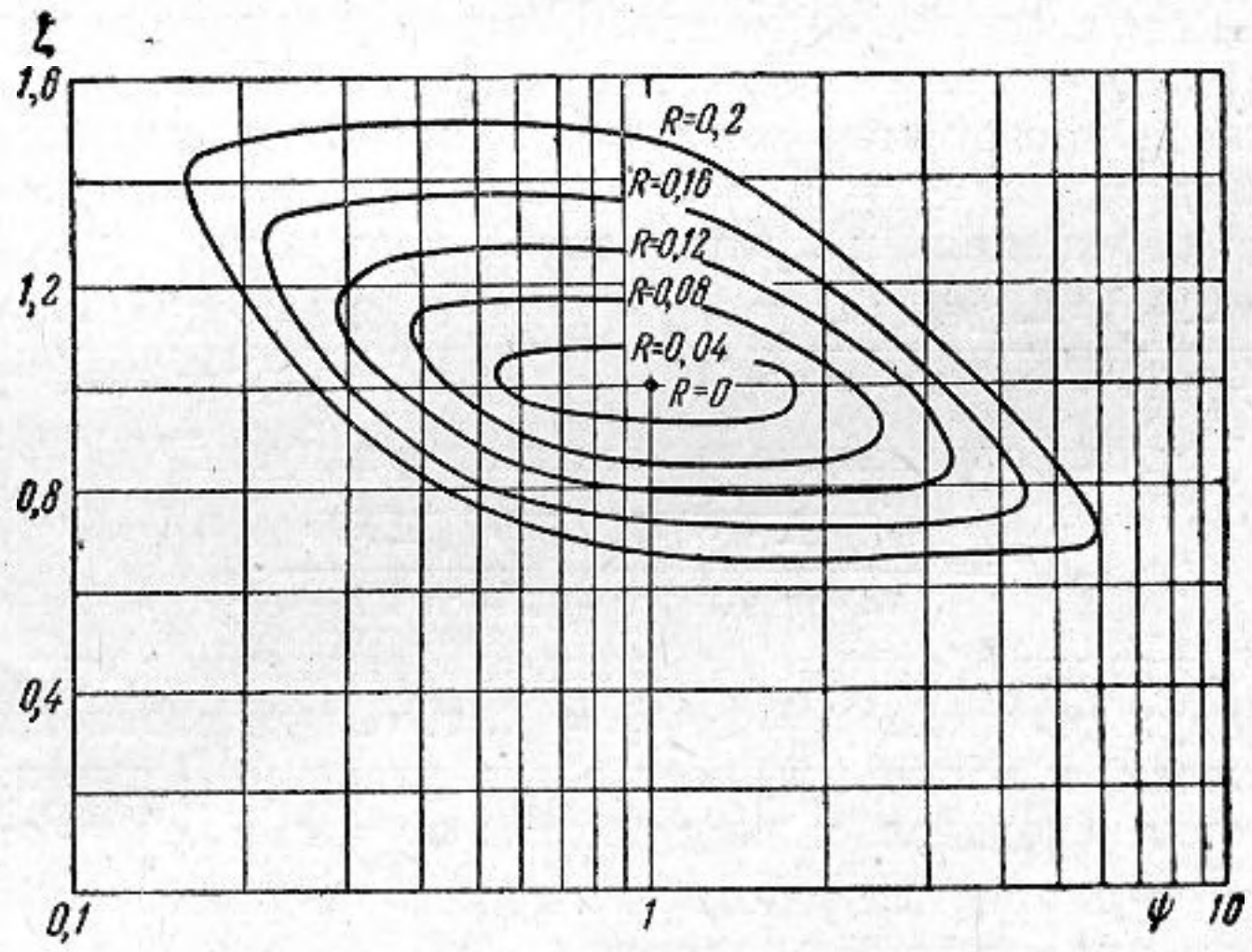
$$\psi_{\min} = \frac{1}{\xi^2} + \frac{1-\xi}{\xi^3}\left(1 - \xi \pm \sqrt{1+\xi^2}\right); \quad \psi_{\max} = \frac{1}{\xi^2}. \tag{14}$$

При этом R принимает значения:

$$R_{\min} = \frac{|1-\xi|}{\sqrt{2(1+\xi^2)}}, \quad R_{\max} = \frac{|1-\xi|}{1+\xi}. \tag{15}$$



Фиг. 2



Фиг. 3

Исключая из (14) и (15) величину ξ, получим уравнения кривых $R(\psi)$, проходящих через точки $R_{\min}$, $\psi_{\min}$ и $R_{\max}$, $\psi_{\max}$:

$$R_{\max} = \frac{|\sqrt{\psi_{\max}} - 1|}{\sqrt{\psi_{\max}} + 1}, \tag{16а}$$

$$\psi_{\min} = \frac{(1-2R_{\min}^2)^2}{(1 \pm 2R_{\min}\sqrt{1-R_{\min}^2})^2}\left[1 + \frac{4R_{\min}}{1-2R_{\min}^2}\left(R_{\min} \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right]. \tag{16б}$$

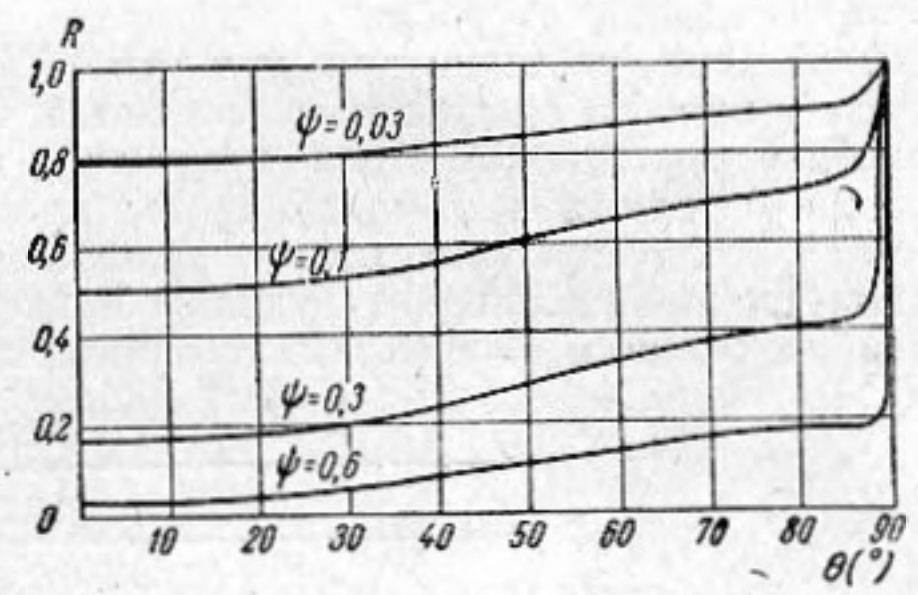
Эти кривые на фиг. 2 нанесены пунктирными линиями. При этом для кривой (16а) взята одна правая ветвь (при $\psi > 1$), а для кривой (16 б) — только две ветви, соответствующие знаку минус в знаменателе.

На фиг. 3 эти же данные представлены только для малых значений R: в плоскости ξ, ψ нанесены кривые $R = \text{const}$. Из фиг. 2 и 3 видно, что величина R в значительно большей степени зависит от ξ, чем от ψ, так как на последней фигуре величина ψ, так же как и на фиг. 2, взята в логарифмическом масштабе, а ξ — в линейном. Видно также, что при малых значениях R имеются весьма широкие участки изменения ψ (при $\xi = \text{const}$), в которых величина R остается практически постоянной.

На фиг. 4 приведена величина R в зависимости от угла падения θ при $\xi = 1$ для различных значений ψ. Для этого случая из (12) и (12б) имеем

$$R = \left[1 - (1 - \nu^2)\sin^4\theta + i \cdot 2(1 - \nu)\sqrt{1 - \sin^4\theta}\sin^2\theta\frac{1+\psi}{1-\psi}\right] \times$$
$$\times \left\{[(2\nu - 1)(1 - \sin^4\theta) + \nu^2\sin^4\theta]\sin^2\theta + \right. \tag{17}$$
$$\left. + i\sqrt{1 - \sin^4\theta}\left[(1 - \nu^2)\sin^4\theta + \left(\frac{1+\psi}{1-\psi}\right)^2 + \frac{4\psi}{(1-\psi)^2}\right]\right\}^{-1}.$$

При этом $\theta = \theta_1$, т. е. направление распространения преломленной волны совпадает в этом случае с направлением распространения падающей волны. При расчетах по формуле (17) для простоты принималось, что $\nu = \nu_1 = 0{,}3$. Из фиг. 4 видно, что при изменении угла падения коэффициент отражения изменяется несущественно вплоть до углов порядка 80—85°, а затем резко возрастает и при $\theta = 90°$ обращается в единицу.



Фиг. 4

Отметим, что в самом общем случае при $\theta = 90°$, когда распространение изгибной волны происходит вдоль границы раздела двух пластин, волновой процесс возможен только тогда, когда волновое число этой волны $\varkappa$ отлично от волнового числа изгибных волн в каждой из пластин. Можно показать, что величина $\varkappa$ должна удовлетворять уравнению $\Delta_0 = 0$, если в нем сделать замену $k \sin\theta = k_1 \sin\theta_1 = \varkappa$. Из уравнений (12) и (12б) легко видеть, что при $\sin\theta \geqslant \xi$ имеет место полное внутреннее отражение, так как при этих значениях угла падения $R = 1$; при этом преломленная бегущая волна становится неоднородной.

Отметим, что полученные в данной работе результаты, в частности фиг. 2 и 3, могут быть использованы также для расчета коэффициента отражения от границы соединения двух стержней; формулы (12), (12а) и (12б) могут быть использованы при расчете отражения изгибной цилиндрической волны от границы раздела двух пластин.

В заключение автор выражает благодарность И. С. Кисленко, проведшей необходимые численные расчеты.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. М. Бреховских. Распространение волн изгиба по пластинкам. Ж. техн. физ., 1944, 14, 9, 569—576.
2. С. П. Тимошенко. Пластинки и оболочки. М., Гостехиздат, 1948.

Акустический институт АН СССР
Москва

Поступила в редакцию
15 мая 1961 г.