АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том VIII 1962 Вып. 3

О ВОЛНАХ В ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Ю. К. Коненков

Приводится решение двух конкретных задач о малых свободных колебаниях жидкого вязкого слоя и о распространении изгибных волн в пластине, соприкасающейся с вязкой жидкостью.

Всякое возмущение достаточно малой амплитуды в вязкой жидкости описывается системой линеаризованных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \rho_0 \frac{\partial \bar{u}}{dt} &= \operatorname{grad} p + \eta \Delta \bar{u} + \left(\zeta + \frac{\eta}{3}\right) \operatorname{grad} \operatorname{div} \bar{u}, \\ \frac{\partial S}{\partial t} &= -\operatorname{div} \bar{u}, \\ p &= \rho_0 c^2 \cdot S, \end{aligned} \tag{1}$$

где $\bar{u}$ — скорость смещения частиц в жидкости, p—давление, ρ_0—плотность, ζ и η— коэффициенты вязкости, $s = \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0}$ — сжатие, $\rho_0 c^2$ — модуль всестороннего сжатия (см. [1]).

Таким образом, если задано начальное распределение скоростей и граничные условия, движение определяется однозначным образом как решение системы (1). Исключая S, получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t} &= -\rho_0 c^2 \operatorname{div} \bar{u}, \\ \rho_0 \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} &= -\operatorname{grad} p + \eta \Delta \bar{u} + \left(\zeta + \frac{1}{3}\eta\right) \operatorname{grad} \operatorname{div} \bar{u} = 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Для решения системы (2) воспользуемся следующим приемом. Допустим существование векторного и скалярного потенциалов φ и $\bar{\psi}$, таких, что $\bar{u} = \operatorname{rot} \bar{\psi} + \operatorname{grad} \varphi$. Подставляя это решение в систему уравнений (2), получаем

$$\begin{aligned} \rho_0 \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial t} - \eta \Delta \bar{\psi} &= 0, \\ \rho_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} &= -p + \eta \Delta \varphi + \left(\zeta + \frac{\eta}{3}\right) \Delta \varphi, \\ \frac{\partial p}{\partial t} &= -\rho_0 c^2 \Delta \varphi. \end{aligned} \tag{3}$$

Переход к волновым гармоническим уравнениям осуществляется исключением p и заменой дифференцирования по t умножением на $-i\omega$; тогда мы получим $\Delta \bar{\psi} + k_t^2 \bar{\psi} = 0$, где $k_t^2 = \frac{i\rho_0 \omega}{\eta}$ и $\Delta \varphi + k_l^2 \gamma = 0$, где $k_l^2 = \dfrac{\omega^2}{c^2\left[1 - i\omega \dfrac{\left(\zeta + \frac{4}{3}\eta\right)}{\rho_0 c^2}\right]}$. Если распространение волн происходит в двух

измерениях, для ψ остается отличной от нуля только одна компонента. Поэтому $u_x = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial y}$ и $u_y = \frac{\partial\varphi}{\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial x}$.

Рассмотрим вначале задачу о распространении волн в жидком слое с твердыми плоскими границами. Пусть ось x расположена вдоль жидкого слоя на равном расстоянии $h/2$ от каждой границы, ось y направлена перпендикулярно к плоскостям границ: рассматриваются волны, бегущие вдоль оси x. Граничные условия при $y = \pm h/2$ имеют вид: $u_x = 0$, $u_y = 0$. При этом мы получим решения двух видов: симметричные

$$\varphi = \varphi_{01} e^{ikx} \sin \varkappa_2 y; \quad \varphi = \varphi_{01} e^{ikx} \cos \varkappa_1 y, \tag{4}$$

и антисимметричные

$$\varphi = \varphi_{02} e^{ikx} \cos \varkappa_1 y; \quad \varphi = \varphi_{02} e^{ikx} \sin \varkappa_1 y. \tag{5}$$

Эти решения будут удовлетворять волновым уравнениям (3) при условии

$$k^2 + \varkappa_1^2 = k_l^2, \quad k^2 + \varkappa_2^2 = k_l^2. \tag{6}$$

Подставляя решения (4) и (5) в граничные условия, получаем соответственно для симметричной и антисимметричной волн два дисперсионных уравнения:

$$\frac{\operatorname{ctg}\frac{\varkappa_1 h}{2}}{\operatorname{ctg}\frac{\varkappa_2 h}{2}} = -\frac{\varkappa_1\varkappa_2}{k^2} \quad \text{и} \quad \frac{\operatorname{tg}\frac{\varkappa_1 h}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\varkappa_2 h}{2}} = -\frac{\varkappa_1\varkappa_2}{k^2}.$$

В случае малой вязкости решение дисперсионного уравнения для симметричной волны можно искать в виде $\varkappa_1 h = \pi n + \delta_n$, где δ_n — малая поправка, обусловленная вязкостью

$$\delta_n = \frac{2h}{\pi n}\sqrt{\frac{\eta}{i\omega\rho_0}}\left[k_l^2 - \left(\frac{n\pi}{h}\right)^2\right]\operatorname{ctg}\sqrt{\frac{i\omega\rho_0 h}{\eta}}; \quad n = 2k.$$

Для антисимметричной волны аналогичная поправка имеет вид:

$$\delta_n = \frac{2h}{\pi n}\sqrt{\frac{\eta}{i\omega\rho_0}}\left[k_l^2 - \left(\frac{n\pi}{h}\right)^2\right]\operatorname{tg}\sqrt{\frac{i\omega\rho_0 h}{\eta}}; \quad n = 2k+1.$$

При $(k_l h) \gg 1$ эти формулы можно значительно упростить. В случае слоя жидкости, лежащего на твердой породе и имеющего свободную верхнюю границу, на свободной поверхности, обращаются в нуль компоненты тензора напряжений σ_{yy} и σ_{yx}, где

$$\sigma_{yy} = \rho_0 \frac{\partial\varphi}{\partial t} - 2\eta\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} - 2\eta\frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial y},$$

$$\sigma_{yx} = \eta\left(2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right).$$

Рассмотрим теперь задачу об изгибных колебаниях тонкой пластинки, соприкасающейся одной стороной с вязкой жидкостью. Граничные условия для поля в жидкости имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} D\frac{\partial^4 u_y}{\partial x^4} + \rho_1 h\frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} &= \frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial t} \\ u_x &= 0 \end{aligned}\right\} y = 0. \tag{7}$$

Здесь D — цилиндрическая жесткость, ρ_1 — плотность материала, h —

толщина пластины. Решение волновых уравнений берется в виде

$$\varphi = \varphi_0 e^{ikx+\varkappa_1 y}, \quad \psi = \psi_0 e^{ikx+\varkappa_2 y}, \tag{8}$$

где $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ те же, что и в условии (6). Подставляя решения (8) в условия (7) и исключая амплитуды волн φ_0 и ψ_0, получаем дисперсионное уравнение для волнового числа волны, бегущей вдоль оси x в системе пластинка — жидкость.

$$Dk^4 - \omega^2\rho_1 h = \frac{\rho_0\omega^2\sqrt{k^2-k_t^2}}{\sqrt{k^2-k_t^2}\sqrt{k^2-k_l^2}-k^2}.$$

Отсюда, в случае несжимаемой жидкости, можно получить

$$Dk^4 - \omega^2\rho_1 h - \frac{\rho_0\omega^2}{k} = i\omega\eta\left[k + \sqrt{k^2 - \frac{i\omega\rho_0}{\eta}}\right]. \tag{9}$$

Это обобщение уравнения, приведенного в книге [2] на случай вязкой жидкости. Поскольку обычно выполняются условия $\eta/\rho_0 \ll c/k$, это уравнение приводится к виду: $Dk^4 - \omega^2\rho_1 h - \frac{\rho_0\omega^2}{k} = \sqrt{i\omega^3\eta\rho_0}$. Здесь, как и в случае идеальной жидкости, когда $\omega_1^2 = \frac{Dk^4}{\rho_1 n}\frac{1}{\left(1+\frac{\rho_0}{\rho}\frac{1}{kh}\right)}$, удобно рассматривать ω как функцию от волнового числа. Из полученного уравнения мы имеем $\omega = \omega_1\left[1 - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{i\nu}{\omega_1}}\frac{1}{\left(1+\frac{\rho_1}{\rho}kh\right)}\right]$; отсюда следует

$$\frac{\operatorname{Im}\omega}{\operatorname{Re}\omega} = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\nu}{2\omega_1}}\frac{k}{\left(1+\frac{\rho_1}{\rho_0}kh\right)}, \quad \text{где } \nu = \frac{\eta}{\rho_0}.$$

Для примера приведем количественные оценки решения дисперсионного уравнения для стальной пластины толщиной 0,1 *см*, соприкасающейся с глицерином.

Волновое число K	Соответственная частота колебаний пластинки, соприкасающейся с идеальной жидкостью, плотность которой равна 1,25 *г/см*³	Соответственная частота в пластинке, соприкасающейся с глицерином ($\rho_0 = 1{,}25$ *г/см*³, $\nu = 6{,}8$ *см*²/*сек*)	$\frac{\operatorname{Im}\omega}{\operatorname{Re}\omega}$
0,2	200	198	0,012
0,3	559	554	0,0098
0,4	1117	1106	0,0088
0,5	1911	1895	0,0081
1,0	12400	12350	0,0051

Приведенный метод расчета пригоден и в том случае, когда необходимо учитывать потери из-за теплопроводности. Полная система линейных гидротермодинамических уравнений имеет вид:

$$\rho_0 = \frac{\partial\bar{u}}{\partial t} = -\operatorname{grad} p + \eta\Delta\bar{u} + \left(\zeta + \frac{1}{3}\eta\right)\operatorname{grad}\operatorname{div}\bar{u},$$

$$\frac{dS}{dt} + \operatorname{div}\bar{u} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial t} = \alpha\frac{\partial S}{\partial t} + \beta\Delta T,$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \rho_0 c^2\left(\frac{\partial S}{\partial t} + \gamma\frac{\partial T}{\partial t}\right).$$

Укажем ход решения в этом случае. Исключая из исходной системы

величины S и T, получаем после подстановки $u = \operatorname{rot}\psi + \operatorname{grad}\varphi$;

$$\frac{1}{\rho_0 c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \frac{\beta}{\rho_0 c^2}\Delta\frac{\partial p}{\partial t} + (1+\alpha\gamma)\Delta\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \beta\Delta^2\varphi = 0,$$

$$\rho_0\frac{\partial\varphi}{\partial t} = -p + \left(\zeta + \frac{4}{3}\eta\right)\Delta\varphi, \quad \rho_0\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial t} = \eta\Delta\bar{\psi}.$$

Волновые гармонические уравнения получаются исключением p и заменой операции дифференцирования умножением на $-i\omega$. Таким образом, мы получаем уравнения: $a(\omega)\varphi + b(\omega)\Delta\varphi - c(\omega)\Delta^2\varphi = 0$ и $\frac{i\omega\rho_0}{\eta}\bar{\psi} + \Delta\bar{\psi} = 0$, где

$$a(\omega) = \frac{\omega^2}{c^2}, \qquad b(\omega) = (1+\alpha\gamma) - i\omega\left[\frac{\zeta + \frac{4}{3}\eta}{\rho_0 c^2} + \frac{\beta}{c^2}\right],$$

$$c(\omega) = \frac{\beta\left(\zeta + \frac{4}{3}\eta\right)}{\rho_0 c^2} + \frac{i\beta}{\omega}.$$

Как легко заметить, решение уравнения для φ можно получить в виде линейной комбинации двух гармонических функций φ_1 и φ_2, где $\Delta\varphi_1 + k_{l1}^2\varphi_1 = 0$ и $\Delta\varphi_2 + k_{l2}^2\varphi_2 = 0$. Величины k_{l1} и k_{l2} выбираются так, чтобы выполнялось условие $(a + b\Delta - c\Delta^2)\varphi = -c(\Delta + k_{l1}^2)(\Delta + k_{l2}^2)\varphi$, т. е. k_{l1}^2 и k_{l2}^2 должны являться корнями уравнения $a - bk^2 - ck^4 = 0$. Отсюда мы получаем

$$k_{l1}^2 = \frac{\sqrt{b^2 + 4ac} - b}{2c}, \qquad k_{l2}^2 = \frac{-\sqrt{b^2 + 4ac} - b}{2c}.$$

Появление новых решений у волнового уравнения означает наличие в реальной жидкости таких волн, существование которых связано с тепловыми процессами, сопутствующими сжатию и разрежению среды. Этот тип волн реализуется только вблизи от границы волнового поля, так как является быстро затухающим. Соответствующим образом увеличивается число граничных условий. Задание теплового режима на краях волнового поля и является дополнительным условием, необходимым для решения системы. Пусть, например, в рассмотренной выше задаче о жидком волноводе известно, что при $y = \pm h/2$ кроме условия $\bar{u} = 0$ существует еще условие $T = 0$, т. е. $\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial x} = 0$ и $k_{l0}^2\varphi + \Delta\varphi = 0$. При этом бегущие вдоль оси x симметричные волны имеют вид:

$$\varphi = e^{ikx}[\varphi_{01}\cos\varkappa_1 y + \varphi_{02}\cos\varkappa_2 y], \qquad \psi = e^{ikx}[\psi_0\sin\varkappa_3 y],$$

где $\varkappa_1^2 = k_{l1}^2 - k^2$, $\varkappa_2^2 = k_{l2}^2 - k^2$, $\varkappa_3^2 = k_l^2 - k^2$.

Далее мы получаем дисперсионное уравнение

$$\frac{\varkappa_1\operatorname{tg}\frac{\varkappa_1 h}{2}}{k_{l0}^2 - k_{l1}^2} - \frac{\varkappa_2\operatorname{tg}\frac{\varkappa_2 h}{2}}{k_{l0}^2 - k_{l2}} = \frac{k^2\cdot\operatorname{tg}\frac{\varkappa_3 h}{2}\cdot(k_{l2}^2 - k_{l1}^2)}{\varkappa_3(k_{l0}^2 - k_{l1}^2)(k_{l0}^2 - k_{l2}^2)}.$$

Для антисимметричных волн мы получаем аналогично

$$\frac{\varkappa_2\operatorname{ctg}\frac{\varkappa_2 h}{2}}{k_{l0}^2 - k_{l2}^2} - \frac{\varkappa_1\operatorname{ctg}\frac{\varkappa_1 h}{2}}{k_{l0}^2 - k_{l1}^2} = \frac{k^2\cdot\operatorname{tg}\frac{\varkappa_3 h}{2}(k_{l1}^2 - k_{l2}^2)}{\varkappa_3(k_{l0}^2 - k_{l1}^2)(k_{l0}^2 - k_{l2}^2)}.$$

Для волн, распространяющихся в жидкости, ограниченной упругой абсолютно теплопроводной пластинкой, граничные условия имеют вид:

$$D\frac{\partial^5\varphi}{\partial x^4\,\partial y}-\rho_1 h\omega^2\frac{\partial\varphi}{\partial y}-\rho_0\omega^2\varphi+i\omega\left(\zeta+\frac{4}{3}\eta\right)\Delta\varphi-D\frac{\partial^5\psi}{\partial x^5}+\rho_1 h\omega^2\frac{\partial\psi}{\partial x}=0,$$

$$k_{l0}^2\varphi+\Delta\varphi=0;\qquad \frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial y}=0.$$

Решение берется в виде

$$\varphi=e^{ikx}\left(\varphi_n e^{\varkappa_1 y}+\varphi_{02}e^{\varkappa_2 y}\right),\qquad \psi=\psi_{01}e^{ikx+\varkappa_3 y}$$

и дисперсионное уравнение принимает вид:

$$Dk^4-\rho_1 h\omega^2=\frac{\left[\rho_0\omega^2+i\omega\left(\zeta+\frac{4}{3}\eta\right)k_{l0}^2\right](k_{l1}^2-k_{l2}^2)}{(k_{l0}^2-k_{l2}^2)\left(\varkappa_1-\frac{k^2}{\varkappa_3}\right)-(k_{l0}^2-k_{l1}^2)\left(\varkappa_2-\frac{k^2}{\varkappa_3}\right)}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Дж. В. Стретт (Лорд Рэлей). Теория звука, т. I, М., ГТТИ, 1955, стр. 306—310.
2. Л. Ландау и Е. Лифшиц. Механика сплошных сред. М., ГТТИ, 1953, стр. 593.

Москва

Поступила в редакцию
17 апреля 1961 г.