АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том VIII 1962 Вып. 3

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ИЗГИБНЫХ КОЛЕБАНИЙ КОНЕЧНОЙ АМПЛИТУДЫ В ПЛОСКОЙ ПЛАСТИНКЕ

И. А. Викторов

Хорошо известная теория линейных изгибных колебаний плоской пластинки применима только к колебаниям, амплитуда $\hat{U}$ которых существенно меньше толщины h пластинки. При так называемом сильном изгибе, когда $\hat{U} \sim h$ напряжения и деформации в пластинке остаются малыми и закон Гука выполняется (нарушение закона Гука происходит при $\hat{U} \sim l$, где l — размер области изгиба), но наряду с деформациями чистого изгиба появляются деформации всестороннего растяжения (см. [1]). Линейное уравнение изгибных колебаний пластинки при этом перестает быть применимым.

В настоящей заметке делается попытка рассмотреть распространение колебаний в плоской бесконечной пластинке при сильном изгибе. Предполагается, что колебания возбуждаются совокупностью гармонических смещений амплитуды α и частоты ω, распределенных равномерно в круге радиуса $kR \gg 1$ (k — волновое число изгибной волны частоты ω с бесконечно малой амплитудой), причем $\alpha^2 \ll h^2$. Решение задачи проводится методом последовательных приближений с точностью до второго приближения включительно.

Используя уравнение равновесия при сильном изгибе пластинки, имеющиеся в монографии [1], можно получить уравнение свободных колебаний сильного изгиба пластинки в полярных координатах r, φ, z. Для рассматриваемого нами случая осесимметричного движения оно имеет вид:

$$\Delta^2 U(r, t) + \frac{12\rho(1-\nu^2)}{h^2 E} \cdot \frac{\partial^2 U(r, t)}{\partial t^2} = \frac{2(1-\nu^2)}{h^2} \frac{\partial}{\partial r}\left[\left(\frac{\partial U(r, t)}{\partial r}\right)^3\right]. \qquad (1)$$

Здесь U — смещение по z, Δ — оператор Лапласа, t — время, ρ — плотность, E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона материала пластинки. Граничные условия задачи следующие:

$$\begin{gathered} U(r, t) = \alpha \cos \omega t \quad \text{при } r \leqslant R \\ \frac{\partial U(r, t)}{\partial r} = 0 \quad \text{при } r = R. \end{gathered} \qquad (2)$$

При $\hat{U}(r, t) \ll h$ правая часть (1) является величиной $\hat{U}^2/h^2$ порядка малости по сравнению с членами левой части, поэтому в качестве первого приближения искомого решения можно взять решение (1) с нулевой правой частью, удовлетворяющее граничным условиям (2) и принципу погашаемости (см. [2]). Это решение можно записать так:

$$U_1(r, t) = \alpha \operatorname{Re} \frac{H_0^{(1)}(kr) H_1^{(1)}(ikR) + iH_0^{(1)}(ikr) H_1^{(1)}(kR)}{H_0^{(1)}(kR) H_1^{(1)}(ikR) + iH_0^{(1)}(ikR) H_1^{(1)}(kR)} e^{-i\omega t}, \qquad (3)$$

где $H_0^{(1)}(x)$, $H_1^{(1)}(x)$ — функция Ганкеля 1-го рода порядка 0 и 1, Re — символ действительной части.

Подставляя выражение (3) в правую часть уравнения (1), получим линейное неоднородное уравнение второго приближения с правой частью вида: $\operatorname{Re}[F(r) e^{-i\omega t} + G(r) e^{-3i\omega t}]$, где $F(r)$, $G(r)$ — функции r, α, h и упругих параметров пластинки. Решение этого уравнения, удовлетворяющее в совокупности с решением (3) граничным условиям (2) и принципу погашаемости, можно найти методом вариации произвольных постоянных. При $k\Delta r > 1$ ($\Delta r = r - R$) оно имеет следующую простую форму:

$$U_2(r, t) = \alpha \cdot \frac{\alpha^2}{h^2} \sqrt{\frac{R}{r}} \operatorname{Re} \left[\left(A_1 kR \ln \frac{r}{R} + A_2 \frac{R}{r} + A_3 \right) e^{i(k\Delta r - \omega t)} + \right.$$
$$\left. + \left(B_1 \frac{R}{r} e^{i(3-\sqrt{3})k\Delta r} + B_2 \right) e^{i(\sqrt{3}k\Delta r - 3\omega t)} \right], \qquad (4)$$

где A_1, A_2, A_3, B_1, B_2 — комплексные коэффициенты порядка $1/10$.

Сравнивая выражение (4) с выражением (3) для первого приближения, которое при $k\Delta r > 1$ можно записать в виде

$$U_1(r, t) = \alpha \sqrt{\frac{R}{2r}} \operatorname{Re} e^{i\left(k\Delta r - \omega t - \frac{\pi}{4}\right)},$$

нетрудно заметить, что отношения членов второго и первого приближения являются величинами порядков $\frac{\alpha^2}{10h^2} kR \ln \frac{r}{R}$, $\frac{\alpha^2}{10h^2} \frac{R}{r}$ и $\frac{\alpha^2}{10h^2}$. Второе приближение решения, описывающее нелинейный эффект, состоит из двух гармоник — первой и третьей. Амплитуда первой гармоники второго приближения нарастает с расстоянием по закону $\ln r / R$. Сумму первых гармоник обоих приближений можно рассматривать как цилиндрическую изгибную волну частоты ω, модулированную по амплитуде и фазе. У третьей гармоники имеются биения, которые затухают с расстоянием как R/r. Существование таких биений у высших гармоник при распространении звука конечной амплитуды в волноводах и дисперсных средах (в противоположность монотонному нарастанию гармоник с расстоянием в случае среды без дисперсии фазовой скорости) было впервые отмечено М. А. Исаковичем в работе [3].

Укажем еще, что конечность амплитуды приводит к изменению изгибной жесткости пластинки, благодаря чему при ее колебании первый нуль смещения сдвигается ближе к центру возбуждения на величину порядка $\alpha^3 / 2h^2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц. Механика сплошных сред. М., ГТТИ, 1954.
2. Г. Д. Малюжинец. Некоторые обобщения метода отражений в теории дифракции синусоидальных волн (доктор. диссертация). Физический институт им. П. Н. Лебедева АН СССР, 1950.
3. М. А. Исакович. Нелинейные эффекты в некоторых задачах акустики, Акуст. ж., 1960, 6, 3, 321—325.

Акустический институт АН СССР
Москва

Поступило в редакцию
27 декабря 1961 г.

АКУСТИЧЕСКАЯ КАМЕРА С КЛИНОВИДНЫМ ЗВУКОПОГЛОТИТЕЛЕМ, ВЫПОЛНЕННЫМ ИЗ ШТАПЕЛЬНОГО СТЕКЛОВОЛОКНА

Р. В. Домбровский, Р. Т. Калустьян

В здании Научно-исследовательского института им. А. С. Попова построена и недавно введена в эксплуатацию новая заглушенная камера, предназначенная для акустических измерений. Помещение, в котором оборудована камера, расположено на втором этаже здания и имеет внутренние размеры $7{,}5 \times 5{,}4 \times 5{,}1$ *м*³; стены — кирпичные, пол и потолок — бетонные. Звукопоглощающая конструкция клинообразной структуры имеет общую толщину 1,15 *м*, так что размеры свободного пространства камеры оказываются равными $5{,}2 \times 3{,}1 \times 2{,}8$ *м*³.

Звукопоглощающие клинья (фиг. 1) были изготовлены из плит штапельного волокна производства Мерефянского стекольного завода Харьковского СНХ. Толщина плит составляла около 4 *см* при удельном весе около 60 *кг/м*³. Каждый клин собирался из шести слоев, вырезанных по шаблону, причем основой клина являлся каркас из стальных прутьев. Собранный клин прошивался суровой ниткой и обтягивался марлевым чехлом, пропитанным огнестойким составом.

Сборка звукопоглощающего слоя осуществлялась путем подвески клиньев на штанги, укрепленные на некотором расстоянии от стены (фиг. 2). Для этого в основа-