АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том IX 1963 Вып. 2

НОВЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ДИФРАКЦИОННЫХ ПОЛЕЙ В КЛИНОВИДНЫХ ОБЛАСТЯХ С ИДЕАЛЬНЫМИ ГРАНИЦАМИ

А. А. Тужилин

Для решений задач дифракции плоской, цилиндрической и сферической акустических волн в клиновидной области с идеально мягкими или идеально твердыми границами приводятся представления, во-первых, в виде равномерно сходящихся рядов, во-вторых, в виде асимптотических рядов. Представления в виде равномерно сходящихся рядов удобны для исследования и вычисления поля как в случае, когда точка наблюдения или источник поля (для дифрагирующей цилиндрической и сферической волн) находятся в окрестности ребра клина, так и в случае клиновидной области с малым углом раствора. Представления в виде асимптотических рядов удобны для исследования и вычисления поля на «больших» расстояниях.

Будем рассматривать дифракционные поля $\Pi(\rho, \varphi, z) = \Pi_1(\rho, \varphi, z) + \Pi_0(\rho, \varphi - \varphi_0, z)$ $(\Pi, \Pi_1, \Pi_0 \sim e^{-i\omega t})$ в клиновидной области D, определяемой в цилиндрической системе координат (ρ, φ, z) следующими неравенствами: $0 < \rho < \infty$, $|\varphi| < \Phi$, $|z| < \infty$. Поле $\Pi_1(\rho, \varphi, z)$ описывается в области D уравнением $(\Delta + k^2)\Pi_1 = 0$; $\Pi_0(\rho, \varphi - \varphi_0, z)$ — заданная падающая волна (плоская, цилиндрическая или сферическая — см. таблицу). На гранях клина, т. е. при $\varphi = \pm\Phi$, или поле Π или его нормальная производная обращаются в нуль (соответственно задача Дирихле или Неймана). При помощи метода интегралов Зоммерфельда [1,2] рассматриваемые поля непосредственно представляются единым образом в виде однократных интегралов Зоммерфельда с ядром $G(\alpha)$, зависящим от типа падающей волны (см. табл., а также [3—5])

$$\Pi(\rho, \varphi, z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} G(\alpha)\, s(\alpha + \varphi)\, d\alpha. \qquad (1)$$

На фигуре показан контур интегрирования γ, состоящий из двух петель γ_1 и γ_2 на комплексной плоскости α. Здесь же показаны точки ветвления ядра $\alpha = 2\pi n \pm ic$, с вертикальными разрезами, уходящими в бесконечность. При этом $c = \infty$, $c = \operatorname{arch}(r_1/2\rho\rho_0)$ и $c = \operatorname{arch}(R_1/2\rho\rho_0)$, соответственно, для случаев плоского, цилиндрического и сферического ядер; $r_1 = \sqrt{\rho^2 + \rho_0^2}$, $R_1 = \sqrt{\rho^2 + \rho_0^2 + (z - z_0)^2}$.

Функция $s(\alpha)$ в формуле (1) — трансформанта интеграла Зоммерфельда, равная соответственно для задач Дирихле или Неймана

$$s(\alpha) = (\pi/4\Phi)\{\operatorname{ctg}[\pi(\alpha - \varphi_0)/4\Phi] \pm \operatorname{ctg}[\pi(\alpha + \varphi_0 - 2\Phi)/4\Phi]\}.$$

В настоящей статье приводится краткий вывод других представлений полей Π, из которых, как показано ниже, легко извлекаются различные асимптотические представления, удобные для исследования и вычисления поля. А именно, приводится вывод представлений в виде равномерно

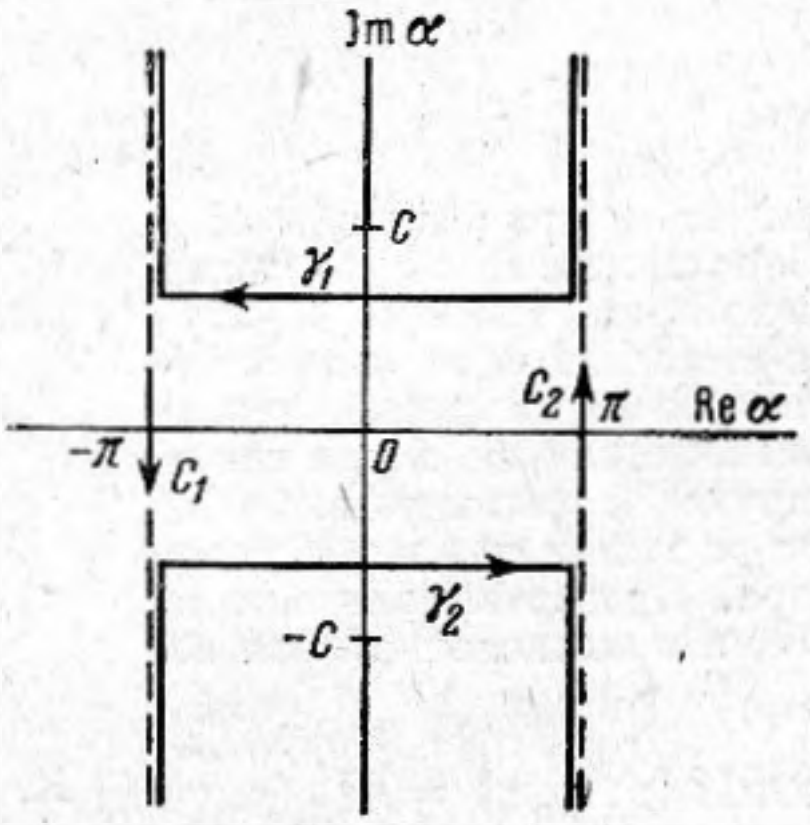
сходящегося ряда:

$$\Pi(\rho, \varphi, z) = \frac{\pi}{\Phi} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \left\{ \cos \frac{\pi n}{2\Phi} (\varphi - \varphi_0) \mp \cos \frac{\pi n}{2\Phi} (\varphi + \varphi_0 - 2\Phi) \right\} S_{\frac{\pi n}{2\Phi}}, \quad (2)$$

где $\varepsilon_n = {}^1/_2$ или 1 соответственно при $n = 0$ или $n \geqslant 1$, и в виде равномерного по $\varphi \in D$ асимптотического разложения. Для этого вначале поле Π представляется как

$$\Pi(\rho, \varphi, z) = \Pi_г(\rho, \varphi, z) + \Pi_д(\rho, \varphi, z), \quad (3)$$

где $\Pi_г$ — геометрическая часть поля, которая легко определяется из геометрических соображений, как сумма падающей и отраженных волн; $\Pi_д(\rho, \varphi, z)$ — дифракционная часть поля. При этом



$$\Pi_г(\rho, \varphi, z) \equiv \sum_{n_1} \Pi_0(\rho, \varphi - \varphi_0 - 4n_1\Phi, z) \mp$$

$$\mp \sum_{n_2} \Pi_0(\rho, \varphi + \varphi_0 - 2\Phi(2n_2 + 1), z). \quad (4)$$

$$\Pi_д(\rho, \varphi, z) \equiv \Pi_д(-\pi + \varphi - \varphi_0) -$$

$$-\Pi_д(\pi + \varphi - \varphi_0) \mp \Pi_д(-\pi + \varphi + \varphi_0 -$$

$$-2\Phi) \pm \Pi_д(\pi + \varphi + \varphi_0 - 2\Phi). \quad (5)$$

Области изменения n_1 и n_2 в формуле (4) определяются из условий $|\varphi - \varphi_0 - 4n_1\Phi| < \pi$ и $|\varphi + \varphi_0 - 2\Phi(2n_2 + 1)| < \pi$. Каждая функция $\Pi_д(\beta)$ в правой части формулы (5) имеет вид

$$\Pi_д(\beta) \equiv \frac{\sin(\pi\beta/2\Phi)}{4\Phi} \int_0^{\infty} dt G(\pi + it) \Big/ \left[\operatorname{ch} \frac{\pi t}{2\Phi} - \cos \frac{\pi\beta}{2\Phi} \right]. \quad (6)$$

Далее выводится равномерное по $\varphi \in D$ асимптотическое разложение для дифракционной части поля $\Pi_д(\rho, \varphi, z)$; для этого достаточно дать разложение для $\Pi_д(\beta)$. Если при фиксированном $\varphi_0 \in D$ для любого $\varphi \in D$ выполняется неравенство $\beta \neq 4n\Phi$ (n целое), то

$$\Pi_д(\beta) \sim \frac{\operatorname{ctg}(\pi\beta/4\Phi)}{4\Phi} \sum_{m=0}^{\infty} f_m \sum_{k=0}^{m} \left\{ 1 \Big/ \left(\sin \frac{\pi\beta}{4\Phi} \right)^{2k} \right\} \sum_{l=k}^{m} c_{k,l}^{m} \left(\frac{\pi}{2\Phi} \right)^{2l} \equiv$$

$$\equiv \sum_{m=0}^{\infty} A_m(\beta, \Phi) f_m, \quad (7)$$

если же существуют такие $\varphi \in D$, что $\beta = 4n\Phi$, то

$$\Pi_д(\beta) \sim \sum_{m=0}^{\infty} \{A_m(\beta, \Phi) - A_m(\beta - 4n\Phi, \pi) - A_m(2\pi - \beta + 4n\Phi, \pi)\} f_m +$$

$$+ \sin \frac{\beta - 4n\Phi}{2} I. \quad (8)$$

Легко проверить, что из четырех величин β в формуле (5) не более чем для двух существует по одному значению $\varphi \in D$, при котором $\beta = 4n\Phi$; эти значения φ соответствуют границам зон света и тени падающей и отраженных волн.

Для конкретных случаев плоской, цилиндрической и сферической падающих волн в формулы (1), (2), (4), (7) и (8) следует подставлять выражения для $G(\alpha)$, S_p, f_m и I, сведенные в таблице.

$\Pi_0(\rho, \varphi, z)$	Плоская падающая волна $\exp(-ik\rho\cos\varphi)$	Цилиндрическая падающая волна $H_0^{(1)}(kr(\varphi))$	Сферическая падающая волна $\exp[ikR(\varphi)]/R(\varphi)$
$G(\alpha)$	$\exp(-ik\rho\cos\alpha)$	$H_0^{(1)}(kr(\alpha))$	$\exp[ikR(\alpha)]/R(\alpha)$
Sp	$-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\gamma 1} e^{-ik\rho\cos\alpha+ip\alpha}d\alpha = e^{-\frac{i\pi p}{2}}J_p(k\rho)^{*}) =$ $= e^{\frac{i\pi p}{2}}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-)^n}{n!\Gamma(p+n+1)}\times(k\rho/2)^{p+2n}$	$-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\gamma_1} H_0^{(1)}(kr(\alpha))\,e^{ip\alpha}d\alpha =$ $=\begin{Bmatrix}J_p(k\rho)\,H_p^{(1)}(k\rho_0)\,(\rho<\rho_0)\\ J_p(k\rho_0)\,H_p^{(1)}(k\rho)\,(\rho>\rho_0)\end{Bmatrix}^{*}) =$ $=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{H_{p+2n}^{(1)}(kr_1)}{n!\Gamma(p+n+1)}\times(k\rho\rho_0/2r_1)^{p+2n}$	$-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\gamma_1}\frac{e^{-ikR(\alpha)+ip\alpha}}{R(\alpha)}d\alpha = \frac{i}{2}\sqrt{\frac{2k\pi}{R_1}}\times$ $\times\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{H_{p+2n+1/2}^{(1)}(kR_1)}{n!\Gamma(p+n+1)}\times(k\rho\rho_0/2R_1)^{p+2n}$
f_m	$\frac{i^m\Gamma(m+1/2)}{\sqrt{2}(k\rho)^{m+1/2}}\times\exp[i(k\rho+\pi/4)]$ **)	$\frac{(-)^m i\Gamma(m+1/2)}{\sqrt{2}}\left(\frac{r_0}{k\rho\rho_0}\right)^{m+1/2}\times H_{m+1/2}^{(1)}(kr_0)$	$\frac{(-)^m i\Gamma(m+1/2)}{\cdot 2}\sqrt{\frac{\pi}{\rho\rho_0}}\times(R_0/k\rho\rho_0)^m H_m^{(1)}(kR_0)$
I	$\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\frac{e^{ik\rho\mathrm{ch}t}\mathrm{ch}(t/2)\,dt}{\mathrm{ch}\,t-\cos(\beta-4n\Phi)} =$ $=\frac{\exp i[k\rho\cos(\beta-4n\Phi)-3\pi/4]}{\sqrt{\pi}\,\lvert\sin[(\beta-4n\Phi)/2]\rvert}\times$ $\times\int\limits_{\infty}^{\sqrt{2k\rho}\,\lvert\sin[(\beta-4n\Phi/2]\rvert}{}^{**}) e^{it^2}dt$	$\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\frac{H_0^{(1)}(kr(\pi+it))\,\mathrm{ch}(t/2)\,dt}{\mathrm{ch}\,t-\cos(\beta-4n\Phi)} =$ $=\frac{i}{\pi\,\lvert\sin[(\beta-4n\Phi)/2]\rvert}\times$ $\times\int\limits_{\infty}^{\xi_0} e^{ikr(\pi-\beta+4n\Phi)\mathrm{ch}\xi}d\xi$	$\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\frac{e^{ikR(\pi+it)}ch(t/2)\,dt}{R(\pi+it)[\mathrm{ch}\,t-\cos(\beta-4n\Phi)]} =$ $=\frac{k}{2i\,\lvert\sin[(\beta-4n\Phi)/2]\rvert}\times$ $\times\int\limits_{\infty}^{\xi_1} H_1^{(1)}(kR(\pi-\beta+4n\Phi)\,\mathrm{ch}\,\xi)\,d\xi$

*) Частные случаи формул (2) для плоской и цилиндрической волн см. в работе [6].
**) Частные случаи формул (7) и (8) для плоской волны см. в работе [7].

В таблице приняты следующие обозначения:

$$r(\alpha) = \sqrt{\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos\alpha};\ r_0 = r(\pi);$$

$$R(\alpha) = \sqrt{\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos\alpha + (z - z_0)^2};\quad R_0 = R(\pi);$$

$$\operatorname{sh}\xi_0 = [2\sqrt{\rho\rho_0}/r(\pi - \beta + 4n\Phi)] \cdot |\sin[(\beta - 4n\Phi)/2]|;$$

$$\operatorname{sh}\xi_1 = [2\sqrt{\rho\rho_0}/R(\pi - \beta + 4n\Phi)] \cdot |\sin[(\beta - 4n\Phi)/2]|.$$

В выражении (7) коэффициенты $c^m_{k,l}$ равны

$$c^m_{k,l} = \frac{(-)^k l}{(2l)!\, 2^{2k+m-1}} \sum_{p=0}^{k-1} (-)^p \left\{ \begin{matrix} 2k \\ p \end{matrix} \right\} (k-p)^{2l} \sum_{s=l}^{m} \frac{\left\{ \begin{matrix} -1/2 \\ m-s \end{matrix} \right\}}{s\,(s-l)\,!} \left(\frac{d^{s-l}}{dz^{s-l}} \frac{z^s}{\left(\operatorname{sh}\frac{\sqrt{z}}{2}\right)^{2s}} \right)_{z=}.$$

В частности, $c^m_{0,l} = 0$ при $l \geqslant 1$; $c^m_{m,m} = (-)^m/2^m$;

$$c^m_{m-1,m} = (-)^{m-1}(m-1)/3\cdot 2^m;\ c^m_{m-1,m-1} = (-)^m(2m+1)/6\cdot 2^m;$$

$$c^m_{m-2,m} = (-)^m(m-2)(5m-11)/90\cdot 2^m;$$

$$c^m_{m-2,m-1} = (-)^{m-1}(m-2)(2m+1)/18\cdot 2^m;$$

$$c^m_{m-2,m-2} = (-)^m(20m^2 + 24m + 7)/360\cdot 2^m.$$

Приведенных выражений для коэффициентов c^m_{kl} достаточно, чтобы написать разложения в формулах (7) и (8) до второго члена включительно.

Из приведенных в таблице рядов для функций Sp видно, что последовательность функций $\left\{S\frac{\pi n}{2\Phi}\right\}$ является асимптотической при $k\rho$, $(k\rho\rho_0/r_1)$ и $(k\rho\rho_0/R_1)$, стремящихся к нулю, соответственно для падающей плоской, цилиндрической и сферической волн. Эти условия в частности выполняются, когда точка наблюдения для случая падающей плоской волны и точка наблюдения или точка расположения источника для падающей цилиндрической и сферической волн близка к ребру клина. Поэтому при $k\rho$, $(k\rho\rho_0/r_1)$ и $(k\rho\rho_0/R_1)$, стремящихся к нулю, первый член ряда (2) дает асимптотическое представление поля, которое можно дальше упростить, заменив функцию Sp первым членом ее разложения, приведенного в таблице. Представление поля в виде ряда (2) удобно для получения асимптотического представления при $\Phi \to 0$ (при этом $p \to \infty$); для этого, в случае падающей плоской и цилиндрической волн можно воспользоваться асимптотическими представлениями цилиндрических функций с большим индексом [8]. При получении асимптотического представления поля при $\Phi \to 0$ в задаче дифракции сферической волны удобно воспользоваться интегральным представлением функции Sp, которое является обобщением интегрального представления функции Бесселя; на функцию Sp для сферического ядра легко обобщается вся теория асимптотических разложений функций Бесселя с большим индексом.

Из выражений для I_m видно, что первые члены разложений (7) и (8) при подстановке их в формулу (5) дают равномерное по $\varphi \in D$ асимптотическое представление дифракционной части поля при $k\rho$, $(k\rho\rho_0/r_0)$ и $(k\rho\rho_0/R_0)$, стремящихся к бесконечности, т. е. вдали от ребра клина, соответственно для падающей плоской, цилиндрической и сферической волн. Интеграл I в выражении (8) для падающей плоской волны является с точностью до множителя интегралом Френеля, а для падающей цилиндрической и сферической волн сводится к интегралу Френеля только в окрестности границы зон света и тени, в общем же случае легко табулируется.

Приведем теперь краткий вывод выражений (2) — (8). Для получения разложения (2) надо в (1) заменой α на $-\alpha$ при учете того, что контур γ_2 симметричен относительно начала координат контуру γ_1 и что $G(-\alpha) = G(\alpha)$, перейти от контура γ к контуру γ_1. Затем надо множитель при $G(\alpha)$ в получающемся интеграле разложить в ряд по степеням функции $\exp(i\pi\alpha/2\Phi)$, который сходится абсолютно и равномерно при $\operatorname{Im}\alpha > 0$, что обеспечивает возможность перемены порядка суммирования и интегрирования; реализуя эту возможность и учитывая выражение для Sp, получим разложение (2).

Для вывода выражений (3) — (6) поступим следующим образом. В формуле (1) дополним контур γ до замкнутого контурами c_1 и c_2 (см. фиг.). Часть поля, определяемая интегралом (1) по замкнутому контуру, вычисляется в конечном виде, как сумма вычетов подынтегрального выражения — это геометрическая часть поля $\Pi_г(\rho, \varphi, z)$, описываемая выражением (4). Остальная часть поля — дифракционная часть $\Pi_д(\rho, \varphi, z)$ — описывается интегралом (1) по контурам $-c_1$ и $-c_2$. Если в этом интеграле разбить контуры $-c_1$ и $-c_2$ на полупрямые с началами в точках $\alpha = \pm\pi$, а затем сделать в каждом из четырех получающихся интегралов одну из следующих замен переменных $\alpha = \pm\pi \pm it$, то после простых алгебраических преобразований при учете равенств $G(\pm\pi \pm it) = G(\pi + it)$ функция $\Pi_д(\rho, \varphi, z)$ представится в виде (5), в котором выражения для $\Pi_д(\beta)$ определяются формулой (6).

При получении асимптотического разложения интеграла (6) приходится различать два случая: а) при фиксированном $\varphi_0 \in D$ для любого $\varphi \in D$ выполняется неравенство $\beta \neq 4n\Phi$ (n — целое); в этом случае подынтегральное выражение в формуле (6) регулярно в окрестности $t = 0$, и поэтому разлагается в ряд Тейлора, радиус сходимости которого зависит от величины β, но имеет минимальное значение, отличное от нуля; б) при фиксированном $\varphi_0 \in D$ существует значение $\varphi_i \in D$, для которого $\beta = 4n\Phi$. В этом случае для тех φ, для которых $\beta \neq 4n\Phi$, подынтегральное выражение в формуле (6) может быть разложено в ряд Тейлора по t, радиус сходимости которого стремится к нулю при $\varphi \to \varphi_i$ (т. е. $\beta \to 4n\Phi$); при $\varphi = \varphi_i$ (т. е. $\beta = 4n\Phi$) подынтегральное выражение имеет полюс второго порядка.

В случае а) при получении асимптотических разложений интегралов типа (6) обычно используют метод перевала; однако получение полного асимптотического разложения этим методом является громоздкой алгебраической задачей, в общем случае для интегралов (6) не выполненной. Поступим иначе. Легко видеть, что в окрестности $t = 0$ справедливо разложение:

$$\sin(\pi\beta/2\Phi)/\operatorname{ch}(t/2)\,[\operatorname{ch}(\pi t/2\Phi) - \cos(\pi\beta/2\Phi)] =$$

$$= \operatorname{ctg}\frac{\pi\beta}{4\Phi}\sum_{m=0}^{\infty}(\operatorname{ch} t - 1)^m \sum_{k=0}^{m}\left\{1\Big/\left(\sin\frac{\pi\beta}{4\Phi}\right)^{2k}\right\}\sum_{l=k}^{m} c_{kl}^{m}\left(\frac{\pi}{2\Phi}\right)^{2l}. \qquad (9)$$

Подставляя ряд (9) в интеграл (6) и выполняя почленное интегрирование, мы придем к асимптотическому (а не к сходящемуся) разложению (7). Для получения асимптотического разложения интеграла (6) в случае б) надо поступить так же, как описано в работе [7].

Описанные методы разложения решений скалярных задач дифракции на идеальном клине в ряды применимы и для решений задач дифракции волн от электрического и магнитного диполей на идеально проводящем клине, соответственные решения которых представимы также в виде однократных интегралов Зоммерфельда (со сферическим ядром) [9, 10].

В заключение выражаю глубокую благодарность Г. Д. Малюжинцу, под руководством которого выполнена настоящая работа.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Д. Малюжинец. Некоторые обобщения метода отражений в теории дифракции синусоидальных волн (доктор. диссертация). Физический институт им. П. Н. Лебедева АН СССР, 1950.
2. Г. Д. Малюжинец. Формула обращения для интеграла Зоммерфельда. Докл. АН СССР, 1958, **118**, 1099—1102.
3. F. Oberhetinger. Diffraction of waves by a wedge. Communs. Pure and Appl. Math., 1954, **7**, 3, 551—563.
4. F. Oberhetinger. On the diffraction and reflection of waves and pulses by wedges and corners. J. of Res. Nat. Bur. Standards, 1958, **61**, 5, 343—365.
5. Г. И. Петрашень, Б. Г. Николаев, Д. П. Коузов. О методе рядов в теории дифракции волн от плоских угловых областей. Уч. записки ЛГУ, 1958, **32**, 246, 5—70.
6. H. S. Carslaw. Diffraction of waves by a wedge of any angle. Proc. Math. soc. Sec. ser., 1920, **18**, 291—306.
7. F. Oberhetinger. On asymptotie series for functions oceurring in the theory of diffrachion of waves by wedges. J. Math. Phys., 1956, **34**, 4, 245—255.
8. Г. И. Петрашень, Н. С. Смирнова, Г. И. Макаров. Об асимптотических представлениях цилиндрических функций. Уч. записки ЛГУ, 1953, **27**, 170, 7—95.
9. Г. Д. Малюжинец, А. А. Тужилин. Электромагнитное поле, возбуждаемое электрическим диполем в клиновидной области. Докл. АН СССР, 1962, **146**, 5, 1039—1042.
10. А. А. Тужилин. Некоторые представления волнового поля, возбуждаемого электрическим или магнитным диполем в угловой области. Аннотации докладов второго Всесоюзного симпозиума по дифракции волн. М., Изд-во АН СССР, 1962, 90.

Акустический институт АН СССР
Москва

Поступила в редакцию
9 февраля 1963 г