АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том IX 1963 Вып. 3

УДК 534.6

ПРОСТРАНСТВЕННАЯ КОРРЕЛЯЦИЯ ФЛЮКТУАЦИЙ ВОЛН, РАСПРОСТРАНЯЮЩИХСЯ В НЕОГРАНИЧЕННОЙ ТУРБУЛЕНТНОЙ СРЕДЕ

Ф. Г. Басс, А. В. Мень

Приводятся выражения для дисперсии и пространственной корреляционной функции флюктуаций амплитуд, фаз и углов прихода при распространении плоских и сферических волн в неограниченной турбулентной среде. При произвольном виде корреляционной функции $B(\xi, \eta, \zeta)$, описывающей неоднородную среду, показано, что дисперсия флюктуаций и их корреляция на параллельных трассах определяются путем однократного и в общем случае, например на пересекающихся трассах, двухкратного интегрирования функции $B(\xi, \eta, \zeta)$ и ее соответствующих производных.

Определение вторых моментов — дисперсии и пространственных корреляционных функций флюктуаций, возникающих при распространении волн в неограниченной неоднородной среде, рассматривалось в ряде работ [1—6], где окончательные результаты приводятся в предположении определенных видов корреляционной функции, описывающей среду. Представляет интерес, не прибегая к конкретному виду этой функции, определить для различных трасс общие соотношения, характеризующие пространственную корреляцию флюктуаций амплитуд, фаз и углов прихода, в частности, для наиболее распространенных случаев измерения на параллельных и пересекающихся трассах.

Рассмотрим сперва случай плоских волн, когда источник излучения находится вне пределов слоя, вызывающего флюктуации. Определяя, согласно работе [1], флюктуации фазы $\delta\varphi$ и амплитуды $\delta\psi$ волны на трассе L как

$$\delta\varphi_L + j\delta\psi_L = \frac{jk^2}{2\pi}\int\limits_0^L\iint\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp\left[-\dfrac{jk\rho^2}{2(L-\xi)}\right]}{L-\xi}\,\mu(\xi, \eta, \zeta)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta, \tag{1}$$

где L — длина трассы, вдоль которой распространяется волна, $k = 2\pi/\lambda$, $\rho^2 = \eta^2 + \zeta^2$, $\mu(\xi, \eta, \zeta)$ — флюктуации коэффициента преломления в точке с координатами ξ, η, ζ. В статистически однородной среде функцию корреляции фазовых и амплитудных флюктуаций для двух произвольно ориентированных трасс равной длины находим в виде *

$$B_\varphi(d) = \overline{\delta\varphi_{L_1}\cdot\delta\varphi_{L_2}} = \int\limits_0^L\int\limits_0^L\iiiint\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin\left[\dfrac{\bar\eta_1^2+\bar\zeta_1^2}{2(\bar L-\bar\xi_1)}\right]}{2\pi(\bar L-\bar\xi_1)}\times$$

* Трасса характеризуется направлением распространения падающей волны $\mathbf{k}_{пад}$, которое для одной из трасс совпадает с осью ξ; точки излучения и приема располагаются в плоскости $\xi\eta$.

$$\times \frac{\sin\left[\frac{(\bar\eta_2-\bar a)^2+\bar\xi_2^2}{2(\bar L-\bar\xi_2)}\right]}{2\pi(\bar L-\bar\xi_2)} B(\xi_1-\xi_2,\ \eta_1-\eta_2,\ \zeta_1-\zeta_2)\, d\bar\xi_1 d\bar\xi_2 d\bar\eta_1 d\bar\eta_2 d\bar\zeta_1 d\zeta_2, \quad (2)$$

$$B_\psi(d) = \overline{\delta\psi_{L_1} d\psi_{L_2}} = \iint\limits_{0\,0}^{LL} \iiiint\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos\left[\frac{\bar\eta_1^2+\bar\xi_1^2}{2(\bar L-\bar\xi_1)}\right]}{2\pi(\bar L-\bar\xi_1)} \times$$

$$\times \frac{\cos\left[\frac{(\bar\eta_2-\bar a)^2+\bar\zeta_2^2}{2\pi(\bar L-\bar\xi_2)}\right]}{2\pi(\bar L-\bar\xi_2)} B(\xi_1-\xi_2,\ \eta_1-\eta_2,\ \zeta_1-\zeta_2)\, d\bar\xi_1 d\bar\xi_2 d\bar\eta_1 d\bar\eta_2 d\bar\zeta_1 d\bar\zeta_2. \quad (2')$$

Здесь $\bar\xi = k\xi$, $\bar\eta = k\eta$, $\bar\zeta = k\zeta$, $\bar L = kL$; $B(\xi_1-\xi_2, \eta_1-\eta_2, \zeta_1-\zeta_2)$ — функция, описывающая корреляцию флюктуаций коэффициента преломления в разнесенных точках пространства, d — проекция расстояния между точками измерения на ось η (база); ν — угол, под которым пересекаются линии трасс. При $\nu \ll 1$, $\bar a = k[d-(L-\xi_2)\nu]$. В частном случае параллельных трасс ($\nu = 0$) $\bar a = kd$ положение приемников фиксировано, излучатель находится на бесконечности; на пересекающихся трассах ($d - L\nu \to 0$) $\bar a = k\xi_2\nu$. Заметим, что в случае плоской волны определение пространственной корреляции при одном источнике излучения соответствует измерениям на параллельных трассах ($L\nu = 0$), при двух источниках — $L\nu < d$, так как источники должны располагаться вне неоднородного слоя.

Производя интегрирование в выражениях (2) и (2′) методом, приведенным в работах [1, 2], находим

$$B_\varphi = \frac{1}{2}(J_1 + J_2), \quad B_\psi = \frac{1}{2}(J_1 - J_2), \quad (3)$$

где

$$J_1 = \iiiint\limits_{0\,0\,-\infty}^{LL\ \infty} \frac{\sin\left[\frac{(\bar\eta+\bar a)+\bar\zeta^2}{2(\bar\xi-\bar\xi_2)}\right]}{2\pi(\bar\xi_1-\bar\xi_2)} B(\xi_1-\xi_2,\ \eta,\ \zeta)\, d\bar\xi_1 d\bar\xi_2 d\bar\eta d\bar\zeta, \quad (4)$$

$$J_2 = \iiiint\limits_{0\,0\,-\infty}^{LL\ \infty} \frac{\sin\left[\frac{(\bar\eta+\bar a)^2+\bar\zeta^2}{2(2\bar L-\bar\xi_1-\bar\xi_2)}\right]}{2\pi(2\bar L-\bar\xi_1-\bar\xi_2)} B(\xi_1-\xi_2,\ \eta,\ \zeta)\, d\bar\xi_1 d\bar\xi_2 d\bar\eta d\bar\zeta, \quad (4')$$

$$\bar\eta = \bar\eta_1 - \bar\eta_2, \qquad \bar\zeta = \bar\zeta_1 - \bar\zeta_2. \quad (4'')$$

Дальнейшее интегрирование выражения для J_1 по η и ζ может быть проведено с учетом того, что корреляционная функция $B(\xi_1-\xi_2, \eta, \zeta)$ при $\xi_1 - \xi_2 \gg l$ стремится к нулю (l — характерный масштаб), так что для рассматриваемого здесь рассеяния на крупномасштабных неоднородностях ($l \gg \lambda$) аргумент подынтегральной синусоидальной функции может быть представлен как $\gamma\rho'^2/l^2$, где $\gamma > \pi\frac{l}{\lambda} \gg 1$ и $\rho'^2 = (\eta+a)^2 + \zeta^2$. Тогда в области, существенной для интегрирования ($\rho'/l \ll 1$), где еще не отмечается осцилляций этой функциии, корреляционная функция $B(\xi_1-\xi_2, \eta, \zeta)$ может быть разложена в ряд Тэйлора относительно значения $B(\xi_1-\xi_2, \eta \to -a, \zeta \to 0)$ *. Осуществив интегрирование в выражениях (4) и удержав в разложении четные члены первого порядка

---

* Оценка сделанного здесь, при использовании метода «стационарной фазы» пренебрежения, подробно рассмотрена в [7].

малости, находим

$$J_1 \approx \int_0^L\int_0^L \left[B(\xi_1-\xi_2, a, 0) - \frac{1}{8}(\bar{\xi}_1-\bar{\xi}_2)^2\,\Delta_n^2 B(\xi_1-\xi_2, a, 0)\right] d\bar{\xi}_1 d\bar{\xi}_2, \quad (5)$$

где

$$\Delta n B = \frac{\partial^2 B}{\partial\bar{\eta}^2} + \frac{\partial^2 B}{\partial\bar{\xi}^2} \; a$$

$$\Delta_n^2 B = \frac{\partial^4 B}{\partial\bar{\eta}^4} + 2\frac{\partial^4 B}{\partial\bar{\eta}^2\,\partial\bar{\xi}^2} + \frac{\partial^4 B}{\partial\bar{\xi}^4}.$$

Аналогично в пределах ближней зоны $\left(D = \frac{2L\lambda}{\pi l^2} \ll 1\right)$ на основании выражения (4′) мы имеем

$$J_{2\delta} \simeq \int_0^L\int_0^L \left[B(\xi_1-\xi_2, a, 0) - \frac{1}{8}(2\bar{L}-\bar{\xi}_1-\bar{\xi}_2)^2\,\Delta_n^2 B(\xi_1-\xi_2, a, 0)\right] d\bar{\xi}_1 d\bar{\xi}_2. \quad (5')$$

Для дальней зоны ($D \gg 1$) при не слишком больших a сравнительно с l можно показать, что с погрешностью $\sim 1/D^2$ допустимо пренебрежение величиной $J_{2д}$ сравнительно с J_1*. Тогда, переходя к переменным $\xi_1-\xi_2=\xi$ и $\xi_2/L=t$ и пренебрегая малыми членами порядка $^1/_{64}D^2$ и l/L относительно удержанных, мы определяем при $L \gg l$ корреляцию фазовых и амплитудных флюктуаций в ближней зоне следующим образом:

$$B_\varphi(d) \simeq 2k^2L\int_0^1\int_0^\infty B(\xi, a, 0)\,d\xi dt, \quad (6)$$

$$B_\psi(d) \simeq \frac{L^3}{2}\int_0^1\int_0^\infty (1-t)^2\,\Delta_n^2 B(\xi, a, 0)\,d\xi dt. \quad (6')$$

Соответственно, для дальней зоны, пренебрегая членами порядка $\frac{1}{32\pi^2}\frac{\lambda^2}{l^2}$ и $\frac{4}{\pi^2}\frac{1}{D^2}$ мы получаем

$$B_\varphi(d) = B_\psi(d) = k^2L\int_0^1\int_0^\infty B(\xi, a, 0)\,d\xi dt. \quad (6'')$$

В случаях $a=0$ и $a=d$, определяющих дисперсию флюктуаций и их корреляцию на параллельных трассах, соотношения (6) — (6″) могут быть преобразованы к однократным интегралам, а именно, в ближней зоне

$$B_{\varphi_{п}}(d) = 2k^2L\int_0^\infty B(\xi, d, 0)\,d\xi, \quad (7)$$

$$B_{\psi_{п}}(d) = \frac{L^3}{6}\int_0^\infty \Delta_n^2 B(\xi, d, 0)\,d\xi, \quad (7')$$

и в дальней зоне

$$B_{\varphi_{п}}(d) = B_{\psi_{п}}(d) = k^2L\int_0^\infty B(\xi, d, 0)\,d\xi. \quad (7'')$$

Сопоставляя выражения (6) — (6″) с выражениями (7) — (7″), мы находим связь между корреляцией фазовых флюктуаций на параллельных и произвольно ориентированных трассах в ближней и дальней зонах и

* При значениях $a \gg l$ величина $J_{2д}$ может быть соизмерима с J_1; однако в этом случае флюктуации практически некоррелированы.

для амплитудных флюктуаций в дальней зоне:

$$B_{\varphi,\,\psi}(d) = \int\limits_0^1 B_{\varphi_{11}}(d - d_0 + d_0 t)\, dt, \tag{8}$$

где $d_0 = L \cdot \theta$.

Согласно формулам (6′) — (7′), в ближней зоне для амплитудных флюктуаций мы имеем

$$B_{\psi}(d) = 3\int\limits_0^1 (1 - t)^2 B_{\psi_{11}}(d - d_0 + d_0 t)\, dt. \tag{8′}$$

В ближней зоне при $d \gg l$ на основании выражений (6), (6′)

$$B_{\varphi}(d) \simeq \frac{2k^2 L}{d_0}\int\limits_0^{\infty}\int\limits_0^{\infty} B(\xi,\, d - d_0 + \eta)\, d\xi d\eta, \tag{9}$$

$$B_{\psi}(d) \simeq \frac{L^3}{2d_0}\int\limits_0^{\infty}\int\limits_0^{\infty} \frac{\partial^4}{\partial \zeta^4} B(\xi,\, d - d_0 + \eta,\, 0)\, d\xi d\eta. \tag{9′}$$

В частном случае изотропной среды ($l_\xi = l_\eta = l_\zeta = l$), описываемой гауссовой функцией корреляции флюктуаций коэффициента преломления

$$B(\xi,\, \eta,\, \zeta) = B_0 \exp - \frac{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}{l^2}, \tag{10}$$

соотношения (7) — (7″) совпадают с формулами, приведенными в работах [1, 2] *.

Из изложенного следует, что в дальней зоне коэффициенты пространственной корреляции амплитудных и фазовых флюктуаций независимо от типа трасс практически определяются теми же соотношениями, что и корреляция фазовых флюктуаций в ближней зоне. Дисперсия этих флюктуаций определяется в дальней зоне с точностью до численного коэффициента выражением $k^2 L l_\xi B_0$ (l_ξ — характерный масштаб вдоль оси ξ), и отличается лишь множителем 2 от соответствующей формулы для фазовых флюктуаций в ближней зоне. Дисперсия амплитудных флюктуаций в ближней зоне существенно меньше фазовых $\left[\frac{\overline{(\delta\psi)^2}}{\overline{(\delta\varphi)^2}} < D^2 \ll 1\right]$ и пропорциональна при $l_\eta = l_\zeta$ величине $\frac{L^3 l_\xi B_0}{6 l^4_{\eta,\,\zeta}}$. Эти результаты, аналогичные полученным в работах [1, 2] при конкретном виде (10) корреляционной функции $B(\xi,\, \eta,\, \zeta)$, универсальны и фактически не зависят от вида этой функции.

Рассмотрим теперь аналогичные соотношения для случая сферической волны, когда источник и приемники излучения находятся в пределах неоднородного слоя. Определяя в этом случае флюктуации фазы и амплитуды в виде [4]

$$\delta\varphi_L + j\delta\psi_L = \frac{jk^2}{2\pi}\int\limits_0^L\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int \frac{\exp\left[-\frac{jk\cdot\rho^2}{2(L-\xi)\,\xi/L}\right]}{(L-\xi)\,\xi/L}\, \mu(\xi,\, \eta,\, \zeta)\, d\xi d\eta d\zeta, \tag{11}$$

находим их пространственную корреляцию для двух произвольно ори-

* Выражение, аналогичное формуле (7) для дисперсии флюктуаций фазы при произвольном виде функции $B(\xi,\, 0,\, 0)$, приведено так же в работах [2, 3].

ентированных в плоскости $\xi\eta$ трасс:

$$B_{\varphi}(d)=\int_0^L\int_0^L\int\int\int_{-\infty}^{\infty}\int\frac{\sin\left[\frac{\overline{\eta}_1^2+\overline{\zeta}_1^2}{2(\overline{L}-\overline{\xi}_1)\overline{\xi}_1/\overline{L}}\right]}{2\pi(\overline{L}-\overline{\xi}_1)\overline{\xi}_1/\overline{L}}\,\frac{\sin\left[\frac{(\overline{\eta}_2-\overline{\alpha})^2+\overline{\zeta}_2^2}{2(\overline{L}-\overline{\xi}_2)\overline{\xi}_2/\overline{L}}\right]}{2\pi(\overline{L}-\overline{\xi}_2)\overline{\xi}_2/\overline{L}}\times$$

$$\times B(\xi_1-\xi_2,\ \eta_1-\eta_2,\ \zeta_1-\zeta_2)\ d\overline{\xi}_1 d\overline{\xi}_2 d\overline{\eta}_1 d\overline{\eta}_2 d\overline{\zeta}_1 d\overline{\zeta}_2, \tag{12}$$

$$B_{\psi}(d)=\int_0^L\int_0^L\int\int\int_{-\infty}^{\infty}\int\frac{\cos\left[\frac{\overline{\eta}_1^2+\overline{\zeta}_1^2}{2(\overline{L}-\overline{\xi}_1)\overline{\xi}_1/\overline{L}}\right]}{2\pi(\overline{L}-\overline{\xi}_1)\overline{\xi}_1/\overline{L}}\,\frac{\cos\left[\frac{(\overline{\eta}_2-\overline{a})^2+\overline{\zeta}_2^2}{2(\overline{L}-\overline{\xi}_2)\overline{\xi}_2/\overline{L}}\right]}{2\pi(\overline{L}-\overline{\xi}_2)\overline{\xi}_2/\overline{L}}\times$$

$$\times B(\xi_1-\xi_2,\ \eta_1-\eta_2,\ \zeta_1-\zeta_2)\ d\overline{\xi}_1 d\overline{\xi}_2 d\overline{\eta}_1 d\overline{\eta}_2 d\overline{\zeta}_1 d\overline{\zeta}_2. \tag{12'}$$

Производя интегрирование в выражениях (11) — (11′) аналогично тому, как это было сделано для выражений (2), (2′), приходим к соотношениям вида (3), где

$$J_1=\int_0^L\int_0^L\int\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\left[\frac{(\overline{\eta}+\overline{a})^2+\overline{\zeta}^2}{2\left(\overline{\xi}_1-\overline{\xi}_2-\frac{\overline{\xi}_1^2-\overline{\xi}_2^2}{\overline{L}}\right)}\right]}{2\pi\left(\overline{\xi}_1-\overline{\xi}_2-\frac{\overline{\xi}_1^2-\overline{\xi}_2^2}{\overline{L}}\right)}B(\xi_1-\xi_2,\ \eta,\ \zeta)\ d\overline{\xi}_1 d\overline{\xi}_2 d\overline{\eta} d\overline{\zeta}, \tag{13}$$

$$J_2=\int_0^L\int_0^L\int\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\left[\frac{(\overline{\eta}+\overline{a})^2+\overline{\zeta}^2}{2\left(\overline{\xi}_1+\overline{\xi}_2-\frac{\overline{\xi}_1^2+\overline{\xi}_2^2}{\overline{L}}\right)}\right]}{2\pi\left(\overline{\xi}_1+\overline{\xi}_2-\frac{\overline{\xi}_1^2+\overline{\xi}_2^2}{\overline{L}}\right)}B(\xi_1-\xi_2,\ \eta,\ \zeta)\ d\overline{\xi}_1 d\overline{\xi}_2 d\overline{\eta} d\overline{\zeta}. \tag{13'}$$

Независимо от длины трассы, в области существенной для интегрирования в выражении (12) $(\eta+a)^2+\zeta^2 \ll l^2$, функция $B(\xi_1-\xi_2,\eta,\zeta)$ может быть разложена в ряд Тэйлора относительно $B(\xi_1-\xi_2,\ \eta\to -a,\ \zeta\to 0)$. Интегрируя по η и ζ и пренебрегая величинами второго порядка малости, мы получаем

$$J_1\simeq\int_0^L\int_0^L\left[B(\xi_1-\xi_2,\ a,\ 0)-\frac{1}{8}\left(\overline{\xi}_1-\overline{\xi}_2-\frac{\overline{\xi}_1^2-\overline{\xi}_2^2}{\overline{L}}\right)^2\Delta_n^2B(\xi_1-\xi_2,\ a,\ 0)\right]d\overline{\xi}_1 d\overline{\xi}_2. \tag{14}$$

Интегрируя тем же путем выражение (12′), мы получаем для J_2 в ближней зоне:

$$J_{2\text{б}}=\int_0^L\int_0^L\left[B(\xi_1-\xi_2,\ a,\ 0)-\frac{1}{8}\left(\overline{\xi}_1+\overline{\xi}_2-\frac{\overline{\xi}_1^2+\overline{\xi}_2^2}{\overline{L}}\right)^2\Delta_n^2B(\xi_1-\xi_2,\ a,\ 0)\right]d\overline{\xi}_1 d\overline{\xi}_2. \tag{14'}$$

Для дальней зоны, как и в случае плоских волн, можно показать, что величиной $J_{2\text{д}}$ можно пренебречь сравнительно с J_1.

Переходя к переменным ξ и t и допуская такие же упрощения, как в формулах (6), (6′), мы получим пространственную корреляцию фазовых и амплитудных флюктуаций в сферической волне в ближней зоне при $L \gg l$ в виде

$$B_{\varphi}(d)\simeq 2k^2L\int_0^1\int_0^{\infty}B(\xi,\ a,\ 0)\ d\xi dt, \tag{15}$$

$$B_{\psi}(d)\simeq\frac{L^3}{2}\int_0^1\int_0^{\infty}t^2(1-t)^2\ \Delta_n^2B(\xi,\ a,\ 0)\ d\xi dt \tag{15'}$$

и, соответственно, в дальней зоне

$$B_{\varphi}(d)=B_{\psi}(d)\simeq k^2L\int_0^1\int_0^{\infty}B(\xi,\ a,\ 0)\ d\xi dt. \tag{15''}$$

Согласно формулам (14) — (14″) корреляция флюктуаций на параллельных ($a = d$) и пересекающихся ($a = td$ при $\nu \ll 1$) трассах * будет в ближней зоне:

$$B_{\varphi_{\shortparallel}}(d) = 2k^2L \int_0^\infty B(\xi, d, 0)\, d\xi; \quad B_{\varphi_{\wedge}}(d) = 2k^2L \int_0^1 \int_0^\infty B(\xi, td, 0)\, dt d\xi, \tag{16}$$

$$B_{\psi_{\shortparallel}}(d) = \frac{L^3}{60} \int_0^\infty \Delta_n^2 B(\xi, d, 0)\, d\xi; \; B_{\psi_{\wedge}}(d) = \frac{L^3}{2} \int_0^1 \int_0^\infty t^2 (1-t)^2\, \Delta_n^2 B(\xi, td, 0)\, dt\, d\xi \tag{16'}$$

и в дальней зоне

$$B_{\varphi_{\shortparallel}}(d) = B_{\psi_{\shortparallel}}(d) = k^2L \int_0^\infty B(\xi, d, 0)\, d\xi; \quad B_{\varphi_{\wedge}}(d) = B_{\psi_{\wedge}}(d) =$$

$$= k^2L \int_0^1 \int_0^\infty B(\xi, td, 0)\, dt d\xi. \tag{16'}$$

При $d \gg l$ имеют место следующие асимптотические выражения для корреляционных функций при измерениях на пересекающихся трассах в ближней зоне:

$$B_{\varphi_{\wedge}}(d) \simeq \frac{2k^2L}{d} \int_0^\infty \int_0^\infty B(\xi, \eta, 0)\, d\xi d\eta, \tag{17}$$

$$B_{\psi}(d) \simeq \frac{L^3}{2d^3} \int_0^\infty \int_0^\infty \left[\eta^2 \frac{\partial^4 B(\xi, \eta, 0)}{\partial \zeta^4} + 4\, \frac{\partial^2 B(\xi, \eta, 0)}{\partial \zeta^2}\right] d\xi d\eta. \tag{17'}$$

Из приведенных соотношений следует, что для фазовых флюктуаций в ближней зоне, а также для амплитудных и фазовых в дальней зоне корреляция на пересекающихся трассах может быть определена через корреляцию на параллельных трассах:

$$B_{\varphi, \psi_{\wedge}}(d) = \int_0^1 B_{\varphi_{\shortparallel}}(td)\, dt \tag{18}$$

и для амплитудных флюктуаций в ближней зоне

$$B_{\varphi_{\wedge}}(d) = 30 \int_0^1 t^2 (1-t)^2 B_{\psi_{\shortparallel}}(td)\, dt. \tag{18'}$$

Для произвольно ориентированных трасс в этом случае также справедливо соотношение (8).

Таким образом, за исключением выражения, определяющего пространственную корреляцию флюктуаций амплитуд в ближней зоне, все полученные соотношения для плоских и сферических волн совпадают.

---

* Случай $a = td$ ($d - L\nu = 0$) при плоской волне, как указывалось, исключается, так как он соответствует расположению источника на границе, либо внутри неоднородного слоя. Следует отметить, что при наличии одного источника излучения определение пространственной корреляции в случае сферической волны соответствует измерениям на пересекающихся трассах; при двух источниках возможны различные типы трасс, в том числе и параллельные.

В ближней зоне дисперсия, а также корреляция амплитудных флюктуаций на параллельных трассах отличаются для сферической волны от аналогичных выражений для плоской волны лишь множителем $^1/_{10}$. Отметим, что результаты работы [4], полученные для частного вида (10) $B(\xi, \eta, \zeta)$, совпадают с нашими.

Наряду с флюктуациями амплитуды и фазы в неоднородной турбулентной среде возникают флюктуации угла прихода — нормали к поверхности фазового фронта в точке приема. Определяя в ближней зоне флюктуации угла прихода, например в плоскости $\xi\eta$, для плоской и сферической волны в виде [6]

$$\delta\theta_{\xi\eta} = \int\limits_0^L \frac{\partial\mu}{\partial\eta} d\xi, \tag{19}$$

мы найдем пространственную корреляцию флюктуаций θ для плоской волны (для параллельных трасс, расположенных в плоскости $\xi\eta$)

$$[B_{\theta_{\text{пл}}}(d)]_{\xi\eta} = \int\limits_0^L\int\limits_0^L \overline{\frac{\partial\mu_1}{\partial\eta_1}\cdot\frac{\partial\mu_2}{\partial\eta_2}}\, d\xi_1\, d\xi_2, \tag{20}$$

или, переходя к переменным $\xi_1 - \xi_2 = \xi$, $\eta_1 - \eta_2 = \eta$, $\zeta_1 - \zeta_2 = \zeta$, $\xi_2/L = t$ при $L \gg l$

$$[B_{\theta_{\text{пл}}}(d)]_{\xi\eta} = -2L\int\limits_0^\infty \frac{\partial^2 B(\xi, d, 0)}{\partial\eta^2} d\xi. \tag{21}$$

Аналогично, корреляция флюктуаций углов прихода в ортогональной плоскости для волн, распространяющихся на этих же трассах, определится в виде

$$[B_{\theta_{\text{пл}}}(d)]_{\xi\zeta} = -2L\int\limits_0^\infty \frac{\partial^2 B(\xi, d, 0)}{\partial\zeta^2} d\xi. \tag{21'}$$

Результирующая функция корреляции, определяемая суммой выражений (21) и (21′), будет

$$B_{\theta_{\text{пл}}}(d) = -2L\int\limits_0^\infty \Delta_n B(\xi, d, 0)\, d\xi. \tag{21''}$$

В общем случае, когда параллельные трассы располагаются в произвольной плоскости, проходящей через ось ξ учитывая инвариантность поперечного лапласиана, можно получить выражение:

$$B_{\theta_{\text{пл}}}(d) = -2L\int\limits_0^\infty \Delta_n B(\xi, d_\eta, d_\zeta)\, d\xi, \tag{22}$$

где d_η, d_ζ — проекции расстояния между трассами (базы). При сферической волне, соответствующей измерению на пересекающихся трассах, корреляция флюктуаций углов прихода, согласно (20), может быть определена следующим образом:

$$B_{\theta_{\text{сф}}}(d) = -2L\int\limits_0^1\int\limits_0^\infty \Delta_n B(\xi, d_\eta t, d_\zeta t)\, dt d\xi, \tag{22'}$$

где производные в поперечном лапласиане берутся по d_η и d_ζ. На основании формул (22), (22′) следует

$$B_{\theta_{\text{сф}}}(d) = \int\limits_0^1 t^2 B_{\theta_{\text{пл}}}(d_\eta t, d_\zeta t)\, dt. \tag{23}$$

В частных случаях $d_\eta \gg l$ и $d_\zeta \simeq 0$, либо $d_\zeta \gg l$ и $d_\zeta \simeq 0$

$$B_{\theta_{\text{сф}}}(d_\eta) \simeq -\frac{2L}{d_\eta^3}\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty \left[\eta^2 \frac{\partial^2 B(\xi, \eta, 0)}{\partial \zeta^2} + 2B(\xi, \eta, 0)\right] d\xi d\eta,\ B_{\theta_{\text{сф}}}(d\zeta) \simeq$$

$$\simeq -\frac{2L}{d_\zeta^3}\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty \left[\zeta^2 \frac{\partial^2 B(\xi, 0, \zeta)}{\partial \eta^2} + 2B(\xi, 0, \zeta)\right] d\xi d\eta. \quad (24)$$

Таким образом, дисперсия флюктуаций углов прихода в двух ортогональных плоскостях, независимо от вида функции $B(\xi, \eta, \zeta)$, определяется с точностью до постоянной выражениями: $\frac{2L \cdot B_0 l_\xi}{l_\eta^2}$ и $\frac{2LB_0 \cdot l_\xi}{l_\xi^2} l_\xi^2$, причем аналогичные соотношения в дальней зоне отличаются от приведенных лишь множителем $^1/_2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. М. Обухов. О влиянии слабых неоднородностей атмосферы на распространение звука и света. Изв. АН СССР, сер. геофиз., 1953, **17**, 2, 155—165.
2. Л. А. Чернов. Распространение волн в среде со случайными неоднородностями. М., Изд-во АН СССР, 1958.
3. D. Mintzer. Wave propagation in rondomly inhomogenious medium. J. Acoust. Soc. America, 1953, **25**, 5, 922—928; 1953, **25**, 6, 1107—1111; 1954, **26**, 2, 186—190.
4. В. Н. Караванников. Флюктуации амплитуды и фазы в сферической волне. Акуст. ж., 1957, **3**, 2, 165—176.
5. В. И. Татарский. Теория флюктуационных явлений при распространении волн в турбулентной атмосфере. М., Изд-во АН СССР, 1959.
6. R. B. Muchmore, A. D. Wheelon. Line-of-sight propagation phenomena. I Ray treatment. Proc. I. R. E., 1955, **43**, 10, 1437—1449.
7. Е. Л. Фейнберг. Распространение радиоволн вдоль земной поверхности. М., Изд-во АН СССР, 1961, стр. 56—60.

Институт радиофизики
и электроники АН УССР
Харьков

Поступила в редакцию
3 августа 1962 г.