АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том IX 1963 Вып. 3

УДК 534.26

ОТРАЖЕНИЕ ЗВУКА ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКОЙ В ДВИЖУЩЕЙСЯ СРЕДЕ

Л. М. Лямшев

Рассматривается рассеяние плоской звуковой волны, ограниченной цилиндрической оболочкой в движущейся среде, в предположении, что края оболочки закреплены в жесткий безграничный цилиндрический экран. Установлено, что колебания оболочки могут приводить к существенному изменению угловой характеристики рассеяния и амплитуды рассеянной волны. Если падающая волна возбуждает в оболочке собственные колебания, возможно значительное рассеяние звука в «незеркальном» направлении. Указывается возможность использования полученного решения для расчета отражения звуковых волн движущейся оболочкой в неподвижной среде.

В настоящее время в связи с решением ряда практически важных проблем существенный интерес представляет рассмотрение задачи об отражении звука от цилиндрической оболочки в движущейся среде, равно как и задачи об отражении звуковых колебаний от поступательно движущейся оболочки в неподвижной среде. В качестве примера укажем на проблему взаимодействия звукового поля реактивной струи с обшивкой движущегося летательного аппарата.

Предположим для простоты рассмотрения, что оболочка (см. фигуру), ось которой совпадает с осью x цилиндрической системы координат r, φ, x, шарнирно закреплена в точках $x = 0$, d в цилиндрический абсолютно жесткий безграничный экран, а колебания оболочки описываются системой уравнений [1]

$$\omega^2\rho_1 u + E_1\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{2a}(1-\nu)\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} + \frac{1}{2a}(1+\nu)\frac{\partial^2 v}{\partial\varphi\,\partial x} + \frac{\nu}{a}\frac{\partial w}{\partial x}\right] = \\ = \frac{i\omega}{2}\frac{\nu}{1-\nu}\frac{\partial p(a,\varphi,x)}{\partial x}; \tag{1}$$

$$\omega^2\rho_1 v + E_1\left[\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2} + \frac{1}{2}(1-\nu)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{2a}(1+\nu)\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi\,\partial x} + \frac{1}{a^2}\frac{\partial w}{\partial\varphi}\right] + \\ + \frac{1}{8}h^2E_1\frac{\nu}{1-\nu}\left(\frac{1}{a^4}\frac{\partial^3 w}{\partial\varphi^3} + \frac{1}{a^4}\frac{\partial w}{\partial\varphi}\right) = \frac{i\omega}{2a}\frac{\nu}{1-\nu}\frac{\partial p(a,\varphi,x)}{\partial\varphi}; \tag{2}$$

$$\omega^2\rho_1 w - E_1\left[\frac{\nu}{a}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{a^2}\frac{\partial v}{\partial\varphi} + \frac{w}{a^2}\right] - \frac{h^2}{24}\frac{E_1}{1-\nu}\left[2(1-\nu)\times\right. \\ \times\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{2}{a^2}\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial\varphi^2} + \left.\frac{1}{a^4}\frac{\partial^4 w}{\partial\varphi^4}\right) + (4-\nu)\frac{1}{a^4}\frac{\partial^2 w}{\partial\varphi^2} + \\ \left. + (2+\nu)\right]\frac{w}{a^4} = i\omega\left[\frac{1}{h} + \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)\,a}\right]p(a,\varphi,x). \tag{3}$$

Пусть на оболочку падает плоская звуковая волна

$$p_i = \exp\left[ik_r\cos\varphi r + ik_x x\right]\ ^*.$$

* Множитель $\exp[-i\omega t]$ здесь и в дальнейшем опускаем.

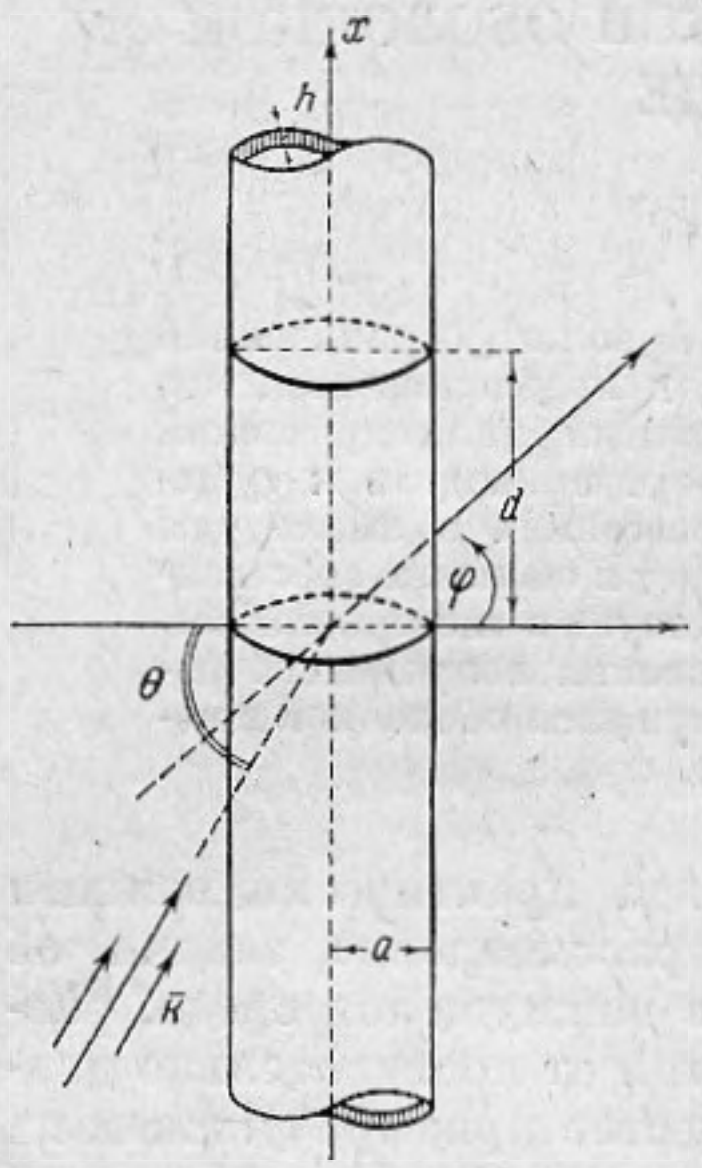
Решение уравнения распространения звука в движущейся среде

$$\left[\Delta + k^2\left(1 + iM\frac{1}{k}\frac{\partial}{\partial x}\right)^2\right] p\,(r, \varphi, x) = 0$$

будем искать в виде

$$p\,(r, \varphi, x) = p_i\,(r, \varphi, x) + p_r\,(r, \varphi, x) - \chi\,(r, \varphi, x), \tag{4}$$

где $p_r\,(r, \varphi, x)$ — часть решения, описывающая поле рассеяния абсолютно жесткого безграничного цилиндра, а $\chi\,(r, \varphi, x)$ — давление в поле рассеяния, обусловленном колебаниями оболочки.



$$p_r\,(r, \varphi, x) = -\sum_{m=0}^{\infty} i^m \varepsilon_m \frac{J'_m\,(k_r a)}{H'^{(1)}_m\,(k_r a)} H^{(1)}_m(k_r r) \times$$

$$\times \cos m\varphi \exp\,[ik_x x]. \tag{5}$$

Здесь, как и выше, $k_x = \frac{\omega}{c\,(1 - M^2)}(\sin\Theta - M)$, $k_r = \frac{\omega}{c\sqrt{1 - M^2}}\cos\Theta$.

Пользуясь формулой Грина для сопряженных операторов, принимая во внимание условие излучения и граничное условие

$$\left.\frac{\partial p}{\partial r}\right|_{r=a} = i\omega\rho\left(1 + iM\frac{1}{k}\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 w\,(a, \varphi, x);$$

$$0 \leqslant x \leqslant d, \tag{6}$$

$$\left.\frac{\partial p}{\partial r}\right|_{r=a} = 0; \quad -\infty < x < 0; \quad d < x < \infty,$$

представим выражение, описывающее поле рассеяния, связанное с колебаниями оболочки в движущейся среде, в виде

$$\chi\,(r, \varphi, x) = i\rho\omega \int_s \left[\left(1 + iM\frac{1}{k}\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^2 w\,(a, \varphi_1, x_1)\right] \times$$

$$\times\, \widetilde{G}\,(a, r, \varphi_1 - \varphi, x_1 - x)\, ds_1, \tag{7}$$

где s — поверхность оболочки и $\widetilde{G}\,(a, r, \varphi_1 - \varphi, x_1 - x)$, $r > r_1 = a$,— функция Грина, являющаяся решением уравнения

$$\left[\Delta_1 + k^2\left(1 - iM\frac{1}{k}\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^2\right]\widetilde{G}\,(r_1, r, \varphi_1 - \varphi, x_1 - x) =$$

$$= -\frac{\delta\,(r_1 - r)}{r_1}\,\delta\,(\varphi_1 - \varphi)\,\delta\,(x_1 - x)$$

и при $\operatorname{Im} k > 0$ ограниченная всюду, кроме точки (r, φ, x), и удовлетворяющая на поверхности цилиндра условию

$$\left.\frac{\partial \widetilde{G}}{\partial n}\right|_s = 0,$$

$$\widetilde{G}\,(a, r, \varphi_1 - \varphi, x_1 - x) = \frac{1}{4\pi^2 a}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\varepsilon_m}{\mu H'^{(1)}_m\,(\mu a)} H^{(1)}_m\,(\mu r) \times$$

$$\times \cos m\,(\varphi_1 - \varphi) \exp\,[-i\xi\,(x_1 - x)]\, d\xi, \qquad r > a; \tag{8}$$

$$\mu = \sqrt{k^2 - (1 - M^2)\,\xi^2 - 2kM\xi}.$$

В выражениях (2) — (8) p — звуковое давление, c — скорость звука в среде, M — число Маха, $k = \omega/c$, ρ — плотность среды, a — радиус, h — толщина оболочки, $E_1 = E/1 - \nu^2$, E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона; ρ_1 — плотность материала оболочки, n — внутренняя к поверхности оболочки нормаль, u, v, w — скорости смещений срединной поверхности оболочки соответственно в аксиальном, периферическом и радиальном направлениях, $H_m^{(1)}(\alpha)$ — функция Ганкеля 1-го рода, $J_m(\alpha)$ — функция Бесселя, штрих означает дифференцирование по аргументу, $\varepsilon_0 = 1$, $\varepsilon_m = 2, \ldots, m = 1, 2, 3, \ldots$

Подставляя выражение (7) в формулу (4), а затем в формулы (1) — (3), получим систему интегродифференциальных уравнений колебаний оболочки в движущейся среде. Будем искать решение этой системы уравнений, разлагая u, v, w и $p_i + p_r|_{r=a}$ в ряды по собственным функциям, удовлетворяющим однородным дифференциальным уравнениям колебаний оболочки и краевым условиям в точках $x = 0$, d

$$\left.\begin{aligned} u(a, \varphi, x) &= \sum_{m,n}^{\infty} c_{mn} \cos m\varphi \sin \frac{\pi n x}{d} \\ v(a, \varphi, x) &= \sum_{m,n}^{\infty} b_{mn} \sin m\varphi \sin \frac{\pi n x}{d} \\ w(a, \varphi, x) &= \sum_{m,n}^{\infty} a_{mn} \cos m\varphi \sin \frac{\pi n x}{d} \\ p_i + p_r|_{r=a} &= \sum_{m,n}^{\infty} G_{mn} \cos m\varphi \sin \frac{\pi n x}{d} \end{aligned}\right\}. \tag{9}$$

Подставляя разложения (9) в систему интегродифференциальных уравнений, получаем для коэффициентов a_{mn} бесконечную систему линейных алгебраических уравнений

$$a_{mn} Z_{mn} = G_{mn} - \sum_{l}^{\infty} Z_{mnml} a_{ml}. \tag{10}$$

Коэффициенты G_{mn} и a_{mn}, как нетрудно убедиться на основании разложения (9), имеют смысл соответственно амплитуд давлений и нормальных (радиальных) скоростей смещений собственных колебаний оболочки номера mn. В этой связи величины Z_{mn} и Z_{mnml} приобретают смысл импеданцев, Z_{mn} — механический импеданц оболочки для собственных колебаний номера mn, Z_{mnml} — импеданц излучения, причем Z_{mnmn} — импеданц излучения собственных колебаний номера mn, а Z_{mnml} $(l \neq n)$ — взаимные импеданцы излучения, характеризующие взаимодействие собственных колебаний номеров mn и ml через поле излучения колеблющейся оболочки.

$$Z_{mnml} = \frac{i\rho\omega}{2\pi d} \int_0^d \int_0^d \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon_m \frac{H_m^{(1)}(\mu a)}{\mu H_m'^{(1)}(\mu a)} \left[\left(1 + iM \frac{1}{k} \frac{\partial}{\partial x_1}\right)^2 \sin \frac{\pi n x_1}{d}\right] \times$$

$$\times \sin \frac{\pi l x}{d} \exp\left[-i\xi(x_1 - x)\right] d\xi dx dx_1, \tag{11}$$

$$Z_{mn} = i \frac{E_1 h}{\omega a^2} \frac{D}{D_1}, \tag{12}$$

где

$$D_1 = \begin{vmatrix} -\frac{\pi n h}{2d}\frac{\nu}{1-\nu}; & \frac{1+\nu}{2} m \frac{\pi n a}{d}; & \frac{\rho_1\omega^2 a^2}{E_1} - \frac{\pi^2 n^2 a^2}{d^2} - \frac{(1-\nu) m^2}{2} \\ \frac{mh}{2a}\frac{\nu}{1-\nu}; & \frac{\rho_1\omega^2 a^2}{E_1} - m^2 + \frac{1-\nu}{2}\frac{\pi^2 a^2 n^2}{d^2}; & \frac{1+\nu}{2} m \frac{\pi n a}{d} \\ & -\left[1+\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}\right]\frac{h}{a}; & -m; \quad \nu\frac{\pi n a}{d} \end{vmatrix}$$

и

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\nu\pi n a}{d}; & \frac{1+\nu}{2} m\pi n \frac{a}{d}; & \frac{\rho_1\omega^2 a^2}{E_1} - \frac{\pi^2 n^2 a^2}{d^2} - \frac{1-\nu}{2} m^2 \\ -m + \frac{1}{8}\frac{h^2}{a^2}\frac{\nu}{1-\nu} m (m^2-1); & \frac{\rho_1\omega^2 a^2}{E_1} - m^2 + & \\ & + \frac{1-\nu}{2}\frac{\pi^2 a^2 n^2}{a^2}; & \frac{1+\nu}{2} m \frac{\pi n a}{d} \\ \frac{\rho_1\omega^2 a^2}{E_1} - 1 - \frac{h^2 a^2}{24}\frac{1}{1-\nu}\Big[2(1-\nu)\times & & \\ \times\left(\frac{\pi^4 n^4}{d^4} + 2\frac{m^2}{d^2}\frac{\pi^2 n^2}{a^2} + \frac{m^4}{a^4}\right) - ; & -m; & \nu\frac{\pi n a}{d} \\ -(4-\nu)\frac{m^2}{a^4} + \frac{2+\nu}{a^4}\Big]. & & \end{vmatrix}$$

Решение системы уравнений (10) может быть найдено методом последовательных приближений. Ограничиваясь для простоты первым приближением, получим

$$a_{mn} \approx \frac{G_{mn}}{Z_{mn} + Z_{mnmn}}. \tag{12}$$

С физической точки зрения это означает, что мы пренебрегаем взаимодействием различных форм колебаний между собой ($Z_{mnml} = 0$). Подставляя выражение (12) в формулу (9), а затем в формулу (7), после некоторых преобразований получим

$$\chi(r, \varphi, x) = \frac{\rho\omega d}{4\pi^2 k_r a}\sum_{m,n}^{\infty}\frac{i^m \varepsilon_m^2 \cos m\varphi}{[Z_{mn} + Z_{mnmn}]\, H_m'^{(1)}(k_r a)} F^{(-)}(k_x, n) \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{H_m^{(1)}(\mu r)}{\mu H_m'^{(1)}(\mu a)}\left\{\left(1 + M^2\frac{\pi^2 n^2}{k^2 d^2}\right) F^{(-)}(\xi, n) - 2M\frac{\pi n}{kd} F^{(+)}(\xi, n)\right\} \times$$

$$\times \exp[i\xi x]\, d\xi, \tag{13}$$

где

$$F^{(-)}(k_x, n) = \frac{\exp[i(k_x d - \pi n)] - 1}{k_x d - \pi n} + \frac{\exp[i(k_x d + \pi n)] - 1}{k_x d + \pi n},$$

$$F^{(+)}_{(-)}(\xi, n) = \frac{\exp[-i(\xi d - \pi n)] - 1}{\xi d - \pi n} \pm \frac{\exp[i(\xi d - \pi n)] - 1}{\xi d + \pi n}.$$

Оценивая интеграл в формуле (13) методом перевала, что равносильно рассмотрению поля на больших по сравнению с размерами оболочки расстояниях, получим окончательно выражение для полного поля

$$p(r, \varphi, x) \approx p_i(r, \varphi, x) + p_r(r, \varphi, x) - i\frac{\rho c d(1-M^2)}{2\pi^2 k_r a R\cos\varphi} \times$$

$$\times \exp\left[i\frac{kR}{1-M^2}(1-M\sin\Psi)\right]\sum_{m,n}^{\infty}\frac{\varepsilon_m^2\cos m\varphi}{[Z_{mn}+Z_{mnmn}]H_m'^{(1)}(k_r a)}\times$$

$$\times\frac{1}{H_m'^{(1)}(k_r' a)}F^{(-)}(k_x,n)\left\{\left(1+M^2\frac{\pi^2n^2}{k^2d^2}\right)F^{(-)}(k_x'n)-2M\frac{\pi n}{kd}F^{(+)}(k_x',n)\right\},\quad(14)$$

где

$$\overset{(+)}{F^{(-)}}(k_x',n)=\overset{(+)}{F^{(-)}}(\xi,n)\Big|_{\xi=k_x'},$$

$$k_x'=\frac{k}{1-M^2}(\sin\Psi-M);\quad k_r'=\frac{k}{\sqrt{1-M^2}}\cos\Psi;$$

$$R=\sqrt{x^2+(1-M^2)r^2}.$$

Перейдем теперь к обсуждению полученного решения. Прежде всего отметим, что при $M=0$ из формулы (14) следует решение, описывающее поле рассеянной цилиндрической оболочкой волны в неподвижной среде [2]. В выражении (14) обращает на себя внимание множитель $R^{-1}\exp\left[i\frac{kR}{1-M^2}(1-M\sin\Psi)\right]$. Как и следовало ожидать, на больших расстояниях амплитуда поля, обусловленного колебаниями оболочки, убывает с увеличением расстояния, а фаза такая же, как в поле точечного источника в движущейся среде.

Ряд $\sum\limits_n$ в решении (14) сходится довольно быстро. В ряде случаев первого члена ряда может быть достаточно для получения удовлетворительного результата. Имея это ввиду и анализируя выражение (14), можно сделать заключение, что амплитуда поля рассеяния, обусловленного колебаниями оболочки, будет максимальной, если окажутся выполненными условия $\operatorname{Im}(Z_{mn}+Z_{mnmn})=0$, что равносильно равенству $\omega=\omega_{mn}$, где ω_{mn} — собственная частота колебаний оболочки номера mn в движущейся среде, $F^{(-)}(k_x,n)=1$ и $\overset{(+)}{F^{(-)}}(k_x',n)=1$.

В случае положительных углов падения Θ плоской звуковой волны на оболочку равенство $F^{(-)}(k_x,n)=1$ выполняется при условии $\frac{\omega}{c(1-M^2)}(\sin\Theta-M)=\frac{\pi n}{d}$, а равенство $\overset{(+)}{F^{(-)}}(k_x',n)=1$ — при условии $\frac{\omega}{c(1-M^2)}(\sin\Psi^+-M)=\frac{\pi n}{d}$, $\Psi^+>0$ или $\frac{\omega}{c(1-M^2)}(\sin\Psi^-+M)=\frac{\pi n}{d}$, $\Psi^-<0$, где знаки плюс и минус означают положительное и отрицательное значения углов рассеяния.

Отсюда видно, что наряду с рассеянием в зеркальном направлении, когда $\frac{\omega}{c(1-M^2)}(\sin\Theta-M)=\frac{\pi n}{d}=\frac{\omega}{c(1-M^2)}(\sin\Psi^-+M)$, наблюдается значительное рассеяние в «незеркальном» направлении, когда

$$\frac{\omega}{c(1-M^2)}(\sin\Theta-M)=\frac{\pi n}{d}=\frac{\omega}{c(1-M^2)}(\sin\Psi^-+M).$$

Из последнего выражения видно, что в случае неподвижной среды ($M=0$), незеркальное рассеяние есть не что иное, как так называемое незеркальное отражение [3].

Остановимся теперь несколько подробнее на явлении незеркального отражения звука ограниченной цилиндрической оболочкой в неподвижной среде. Известно [3], что незеркальное отражение возникает всякий раз, когда скорость распространения падающей волны вдоль оболочки становится равной скорости распространения собственной нормальной волны в оболочке. Детальный анализ [4] показывает, что колебания вдоль оболочки в оболочке могут распространяться с различными скоростями

в виде нормальных волн трех типов: в виде волн, аналогичных изгибным (волны первого типа) и продольным (волны второго типа) волнам в тонкой пластинке, и волн, аналогичных крутильным волнам в стержне (волны третьего типа). Число волн каждого типа, способных распространяться вдоль оболочки, по порядку равно ka. Если радиус оболочки велик по сравнению с длиной волны в материале оболочки, значения скоростей нормальных волн низких номеров изгибного типа асимптотически приближаются к значению скорости распространения изгибных волн в тонкой пластинке той же толщины и из того же материала, что и оболочка; значения скоростей нормальных волн низких номеров продольного типа практически совпадают с величиной скорости продольных волн в тонкой пластинке и, наконец, скорости волн низких номеров крутильнго типа практически равны скорости крутильных волн в стержне. Поэтому, в случае цилиндрической оболочки, большого по сравнению с длиной волны радиуса, в области углов, соответствующих совпадению фазовой скорости падающей волны вдоль оболочки с фазовой скоростью нормальных волн изгибного, либо продольного, либо крутильного типов низких номеров, должно наблюдаться (когда окружающая среда неподвижна) незеркальное отражение звука значительной амплитуды. В этих случаях незеркальное отражение обусловлено распространением вдоль оболочки нескольких нормальных волн одновременно, между тем как в других случаях (других углах падения волны на оболочку) незеркальное отражение обусловлено распространением вдоль оболочки лишь одной нормальной волны.

На основании изложенных выше соображений, относящихся к незеркальному отражению звука ограниченной оболочкой в неподвижной среде, становится ясным, что в движущейся среде, когда падающая на оболочку звуковая волна возбуждает одну или несколько нормальных свободных волн в оболочке, будет наблюдаться незеркальное рассеяние звука, обусловленное колебаниями оболочки. Амплитуда незеркального рассеяния будет существенно зависеть от того, возбуждается ли одновременно несколько нормальных волн в оболочке, или всего лишь одна нормальная волна. Уместно здесь заметить, что в случае оболочки большого радиуса, незеркальное рассеяние будет возникать практически во всем диапазоне углов падения звуковой волны на оболочку от $\Theta \approx 0°$ до $\Theta \approx \approx 90°$, поскольку число нормальных волн в оболочке будет довольно велико ($n = 3ka$).

Выражение (14) может быть использовано для расчета отражения звуковых колебаний от движущейся цилиндрической оболочки в неподвижной среде. Для этого необходимо перейти к системе координат, движущейся со средой. В этой новой системе координат среда будет неподвижной, а оболочка движется со скоростью V. Координаты новой системы ξ, r, φ связаны с системой координат x, r, φ известными соотношениями:

$$\xi = x + Vt; \; r = r; \; \varphi = \varphi. \tag{15}$$

Частота колебаний в движущейся системе координат будет отличаться от частоты колебаний в неподвижной системе координат (движущейся среде). Если расстояние R до объекта изменяется сравнительно медленно, то частоту колебаний ω', принимаемую наблюдателем неподвижным относительно среды, можно определить как производную фазу по времени

$$\omega' = \frac{\partial \alpha}{\partial t}, \text{ где } \alpha = \omega t = \frac{\omega R \left(1 - M \frac{x}{R}\right)}{c\,(1 - M^2)}. \tag{16}$$

Из формул (15) и (16) получаем

$$\omega' = \omega \frac{1 - M \frac{x}{R}}{1 - M^2}. \tag{17}$$

В заключение заметим, что величина амплитуды отраженной движущейся оболочкой волны, обусловленной колебаниями оболочки и наблюдаемой в направлении, противоположном направлению падающей волны, должна уменьшаться с увеличением скорости движения оболочки.

ЛИТЕРАТУРА

1. E. Kennard. A new approach in theory of shells. J. Appl. Mech., 1953, **20**, 33—40.
2. Л. М. Лямшев. Дифракция звука на тонкой ограниченной цилиндрической оболочке. Докл. АН СССР, 1957, **115**, 271—274.
3. Л. М. Лямшев. Незеркальное отражение звука тонкой цилиндрической оболочкой. Акуст. ж., 1956, **2**, 2, 188—192.
4. P. Smith. Physe velocities and displacement characteristics of free waves in a thin cylindrical shell. J. Acoust. Soc. America, 1955, **27**, 6, 1065—1072.

Акустический институт АН СССР
Москва

Поступила в редакцию
25 апреля 1963 г.