АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том X 1964

УДК 534.26

ДИФРАКЦИЯ ИЗГИБНОЙ ВОЛНЫ НА КРУГОВОМ ПРЕПЯТСТВИИ В ПЛАСТИНЕ

Ю. К. Коненков

Рассмотрена дифракция плоской монохроматической изгибной волны на препятствии в виде круга с различными граничными условиями на его окружности.

Установившиеся колебания пластинки подчиняются уравнению $(\nabla^2 + k^2)(\nabla^2 - k^2)u = 0$, где u — смещение из положения равновесия, k — волновое число. Начало полярной системы координат выберем в центре препятствия, а полярную ось направим вдоль фронта набегающей волны. Смещение в падающей волне запишем в форме

$$U_i = e^{ikr\sin\varphi}. \tag{1}$$

Рассеянное поле U_r будем искать в виде

$$U_r = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} [\alpha_n H_n(kr) + \beta_n H_n(ikr)]\, e^{in\varphi}, \tag{2}$$

где $H_n(x)$ — функции Ганкеля 1-го рода. Форма решения выбрана в соответствии с принципом погашаемости. Первые слагаемые под знаком суммы, представляющие собой волны, расходящиеся от препятствия, удовлетворяют уравнению:

$$(\nabla^2 + k^2) H_n(kr)\, e^{in\varphi} = 0. \tag{3}$$

Этому же уравнению удовлетворяет и падающая волна. Вторые слагаемые под знаком суммы, представляющие собой колебания, быстро затухающие при удалении от препятствия, удовлетворяют уравнению

$$(\nabla^2 - k^2) H_n(ikr)\, e^{in\varphi} = 0. \tag{4}$$

Коэффициенты α_n и β_n находятся из граничных условий на препятствии. Мы рассмотрим круговые препятствия радиуса R следующих видов: 1) отверстие со свободным краем; 2) отверстие с защемленным краем; 3) отверстие с подпертым краем; 4) круглый участок с параметрами, отличными от остальной части пластины; 5) участок пластины, подпертый по окружности. Граничные условия в каждом случае накладывают определенные требования на смещение, наклон, изгибающий момент и перерезывающую силу на границе препятствия.

1) На контуре свободного отверстия граничные условия для суммарного поля при $r = R$ приводятся к виду:

$$L_{r\varphi}(U_i + U_r) = 0, \qquad M_{r\varphi}(U_i + U_r) = 0, \tag{5}$$

причем дифференциальные операторы $L_{r\varphi}$ и $M_{r\varphi}$ имеют вид:

$$L_{r\varphi} = \frac{\partial}{\partial r}\nabla^2 + (1-\sigma)\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2},$$

$$M_{r\varphi} = \nabla^2 - (1-\sigma)\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi}\right), \tag{6}$$

где σ — коэффициент Пуассона. Вводя обозначения $z = kR$, мы получаем

$$L_{r\varphi}\, e^{ikr\sin\varphi} = \frac{1}{R^3} L(z, i\sin\varphi)\, e^{iz\sin\varphi},$$

$$M_{r\varphi}\, e^{ikr\sin\varphi} = \frac{1}{R^2} M(z, i\sin\varphi)\, e^{iz\sin\varphi}, \tag{7}$$

где $L(z, i\sin\varphi) = -(1-\sigma)z^3(i\sin\varphi)^3 - 2(1-\sigma)z^2(i\sin\varphi)^2 - (2-\sigma)\times$ $\times z^3(i\sin\varphi) - (1-\sigma)z^2$, $M(z, i\sin\varphi) = z^2(1-\sigma)(i\sin\varphi)^2 - \sigma z^2$.

Для каждого из слагаемых суммы (2) мы имеем

$$L_{r\varphi} H_n(kr)\, e^{in\varphi} = \frac{1}{R^3} L_n(z)\, e^{in\varphi},$$

$$L_{r\varphi} H_n(ikr)\, e^{in\varphi} = \frac{1}{R^3} L_n(iz)\, e^{in\varphi},$$

$$M_{r\varphi} H_n(kr)\, e^{in\varphi} = \frac{1}{R^2} M_n(z)\, e^{in\varphi}, \tag{8}$$

$$M_{r\varphi} H_n(ikr)\, e^{in\varphi} = \frac{1}{R^2} M_n(iz)\, e^{in\varphi},$$

где $L_n(z) = -[z^3 + (1-\sigma)n^2z^2]\dot{H}_n(z) + (1-\sigma)n^2H_n(z)$, $M_n(z) =$ $= -(1-\sigma)z\dot{H}_n(z) + [(1-\sigma)n^2 - z^2]H_n(z)$. Граничные условия (5) можно теперь представить в виде

$$M(z, i\sin\varphi)\, e^{iz\sin\varphi} + \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} [\alpha_n M_n(z) + \beta_n M_n(iz)]\, e^{in\varphi} = 0,$$

$$L(z, i\sin\varphi)\, e^{iz\sin\varphi} + \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} [\alpha_n L_n(z) + \beta_n L_n(iz)]\, e^{in\varphi} = 0. \tag{9}$$

Отсюда видно, что величины $[\alpha_n M_n(z) + \beta_n M_n(iz)]$ и $[\alpha_n L_n(z) +$ $+ \beta_n L_n(iz)]$ являются соответственно коэффициентами разложений в ряды Фурье функций $-M(z, i\sin\varphi)\, e^{iz\sin\varphi}$ и $-L_n(z, i\sin\varphi)\, e^{iz\sin\varphi}$. Обратное преобразование Фурье дает бесконечную систему пар алгебраических линейных уравнений для пар неизвестных коэффициентов α_n и β_n.

$$\alpha_n L_n(z) + \beta_n L_n(iz) = -L(z, n),$$

$$\alpha_n M_n(z) + \beta_n M_n(iz) = -M(z, n), \tag{10}$$

где для сокращения дальнейших записей введены обозначения:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} L(z, i\sin\varphi)\, e^{iz\sin\varphi - in\varphi} d\varphi = L(z, n);$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} M(z, i\sin\varphi)\, e^{iz\sin\varphi - in\varphi} d\varphi = M(z, n). \tag{11}$$

При помощи элементарных преобразований мы находим выражения:

$$L(z, n) = [-z^2 - (1-\sigma)n^2 z]J_n(z) + [n^2(1-\sigma)]J_n(z),$$

$$M(z, n) = [-z(1-\sigma)]J_n(z) + [-z^2 + n^2(1-\sigma)]J_n(z), \tag{12}$$

где $J_n(z)$ — функция Бесселя. Решение системы (10) есть

$$\alpha_n = \frac{M(z,n)L_n(iz) - L(z,n)M_n(iz)}{L_n(z)M_n(iz) - L_n(iz)M_n(z)},$$

$$\beta_n = \frac{L(z,n)M_n(z) - M(z,n)L_n(z)}{L_n(z)M_n(iz) - L_n(iz)M_n(z)}.$$

Зная α_n и β_n и переходя асимптотически к большим расстояниям, можно найти из формулы (2) угловое распределение смещения в рассеянной волне. При этом быстро затухающей частью поля можно пренебречь, а для функций Ганкеля пользоваться асимптотическим выражением:

$$H_n(kr) = \sqrt{\frac{2}{\pi kr}}\, e^{i\left(kr - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}.$$

Тогда мы получим

$$u_r = \sqrt{\frac{2}{\pi kr}}\, e^{i(kr-\pi/4)} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{M(z,n)L_n(iz) - L(z,n)M_n(iz)}{L_n(z)M_n(iz) - L_n(iz)M_n(z)}\, e^{i(\varphi-\pi/2)n} \tag{13}$$

и следовательно, угловое распределение рассеяния в комплексной форме имеет вид

$$\Phi(\varphi) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{M(x,n)L_n(iz) - L(z,n)M_n(iz)}{L_n(z)M_n(iz) - L_n(iz)M_n(z)}\, e^{in(\varphi-\pi/2)}$$

Для малых kR формулу (13) можно записать в виде

$$u_r = \sqrt{\frac{2}{\pi kr}}\, e^{i(kr-\pi/4)} \left\{ \frac{\pi i\sigma}{4(1-\sigma)} z^2 + \frac{\pi i(1+\sigma)}{8(1-\sigma)} z^4 \ln z - \right.$$

$$- \left[\frac{(1{,}4637 + \sigma\cdot 3{,}4637)\pi i}{32(1-\sigma)} + \frac{\pi^2\sigma^2}{16(1-\sigma)^2} \right] z^4 +$$

$$\left. + \frac{\pi i(3+\sigma)}{32(1-\sigma)} z^4 \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) + \ldots \right\}.$$

Главную роль, как видно, играет первый член, представляющий низшую степень в разложении слагаемого из выражения (13) с номером $n = 0$. Полная энергия, рассеянная препятствием в единицу времени, оказывается пропорциональной четвертой степени размеров отверстия, и четвертой степени частоты.

2) На закрепленном контуре радиуса R граничные условия имеют вид $u_i + u_r = 0$, $\partial / \partial r(u_i + u_r) = 0$. Отсюда следует

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} [\alpha_n H_n(kR) + \beta_n H_n(ikR)]\, e^{in\varphi} = -e^{ikR\sin\varphi},$$

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} [\alpha_n \dot{H}_n(kR) + \beta_n i\dot{H}_n(ikr)]\, e^{in\varphi} = -(i\sin\varphi)\, e^{ikR\sin\varphi}.$$

Как и в предыдущем случае, обратное преобразование Фурье приводит к выражениям:

$$\alpha_n H_n(z) + \beta_n H_n(iz) = -J_n(z),$$
$$\alpha_n \dot{H}_n(z) + \beta_n i\dot{H}_n(iz) = -\dot{J}_n(z).$$

Отсюда следует, что

$$\alpha_n = \frac{H_n(iz)\dot{J}_n(z) - i\dot{H}_n(iz)J_n(z)}{H_n(z)i\dot{H}_n(iz) - H_n(iz)\dot{H}_n(z)}$$

$$\beta_n = \frac{\dot{H}_n(z)J_n(z) - H_n(z)\dot{J}_n(z)}{H_n(z)i\dot{H}_n(iz) - H_n(iz)\dot{H}_n(z)}.$$

Аналогично предыдущему случаю, находим угловое распределение рассеяния в виде

$$\Phi(\varphi) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{J_n(z)iH_n(iz) - J_n(z)H_n(iz)}{\dot{H}_n(z)H_n(iz) - H_n(z)i\dot{H}_n(iz)}\, e^{in(\varphi-\pi/2)}.$$

При $kR \ll 1$, оставляя старшие члены разложения, получаем

$$u_r = \sqrt{\frac{2}{\pi kr}}\, e^{i(kr-\pi/4)}\left\{-1 + \frac{\pi i}{2}\,\frac{\cos(\varphi-\pi/2)}{\ln kR - (0{,}11593 + \pi i/4)} + \ldots\right\}.$$

Таким образом, в этом случае в первом приближении рассеянное поле также имеет круговую симметрию. При уменьшении размеров препятствия амплитуда рассеянного поля перестает зависеть от размеров препятствия, а следовательно, и от его геометрической формы. Аналогичное явление встречается в акустике вязких сред при дифракции на препятствии, размеры которого много меньше половины длины вязкой волны. Отметим также, что дипольный член, хотя и уменьшается при $kR \to 0$, однако практически пренебрегать им нельзя, так как при всех реальных значениях kR он играет заметную роль.

3) На опертом крае граничные условия имеют вид: $u_i + u_r = 0$, $M_{r\varphi}(u_i + u_r) = 0$. Выкладки, аналогичные проведенным ранее, приводят к решению

$$\alpha_n = \frac{H_n(iz)M(z,n) - M_n(iz)J_n(z)}{H_n(z)M_n(iz) - M_n(z)H_n(iz)},$$

$$\beta_n = \frac{M_n(z)J_n(z) - H_n(z)M(z,n)}{H_n(z)M_n(iz) - M_n(z)H_n(iz)}.$$

При $kR \ll 1$ рассеянное поле имеет вид

$$u_r = \sqrt{\frac{2}{\pi kr}}\, e^{i(kr-\pi/4)}\left\{-1 + \frac{\pi i}{2}\,\frac{\cos(\varphi-\pi/2)}{\ln kR - \left(0{,}11593 + \frac{\pi i}{4} + \frac{1}{1-\sigma}\right)} + \ldots\right\}.$$

В этом случае наблюдается картина, аналогичная предыдущему случаю.

4) На границе двух пластин с различными параметрами граничные условия имеют вид: $u_i + u_r = u_t$, $\frac{\partial}{\partial r}(u_i + u_r) = \frac{\partial}{\partial r} u_t$, $\varepsilon M_{r\varphi}(u_i + u_r) = M'_{r\varphi} u_t$, $\varepsilon L_{r\varphi}(u_i + u_r) = L'_{r\varphi} u_t$. Через u_t здесь обозначено поле в круге, ε — отношение цилиндрической жесткости внешней пластинки к цилиндрической жесткости внутренней. Штрих над оператором означает, что коэффициент Пуассона σ следует заменить соответствующим параметром препятствия.

Поле в круге мы будет искать в виде

$$u_t = -\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} [\gamma_n J_n(\nu kr) + \eta_n J_n(i\nu kr)] e^{in\varphi}, \tag{14}$$

а рассеянное поле — по-прежнему в виде формулы (2). Из граничных условий, как и в предыдущих задачах, получаем уравнения для α_n, β_n, γ_n, η_n

$$\alpha_n H_n(z) + \beta_n H_n(iz) + \gamma_n J_n(\nu z) + \eta_n J_n(i\nu z) = -J_n(z),$$

$$\alpha_n \dot{H}_n(z) + \beta_n i\dot{H}_n(iz) + \gamma_n \nu \dot{J}_n(\nu z) + \eta_n i\nu \dot{J}_n(i\nu z) = -\dot{J}_n(z),$$

$$\alpha_n \varepsilon M_n(z) + \beta_n \varepsilon M_n(iz) + \gamma_n M_n'(\nu z) + \eta_n M_n'(i\nu z) = -\varepsilon M(z, n),$$

$$\alpha_n \varepsilon L_n(z) + \beta_n \varepsilon L_n(iz) + \gamma_n L_n'(\nu z) + \eta_n L_n'(i\nu z) = -\varepsilon L(z, n).$$

Штрихованные функции получаются по тем же формулам, что и нештрихованные, при замене функций Ганкеля функциями Бесселя. Через ν обозначен коэффициент преломления изгибных волн на границе $\nu = \varepsilon^{1/4} / \mu^{1/4}$ (μ — отношение масс пластинки и препятствия, приходящихся на 1 *см*^{2} поверхности). Рассмотрим также случай рассеяния на неоднородности малых размеров. Вдали от препятствия рассеянное поле имеет вид:

$$u_r = \sqrt{\frac{2}{\pi kr}}\, e^{i(kr+\pi/4)} \{ J(\nu, \varepsilon, \sigma, \sigma')(kR)^2 + \ldots \},$$

где

$$J(\nu, \varepsilon, \sigma, \sigma') = -\frac{\pi}{2} \frac{\left\{ \frac{\nu^4}{2}[\varepsilon(1-\sigma) + (1+\sigma')] + \varepsilon[\varepsilon\sigma - 1 - \sigma'] \right\}}{2\varepsilon\{(1+\sigma') + \varepsilon(1-\sigma)\}}$$

Поскольку данная формула верна только для малых kR, то предельный переход $\nu \to \infty$ недопустим, поскольку в знаменателе дроби α_0 были отброшены члены с высшими степенями KR, но зависевшие от ν.

Интересно отметить, что возможно такое соотношение между параметрами препятствия и пластинки, при котором $J(\nu, \varepsilon, \sigma, \sigma') = 0$.

Интенсивность рассеянной волны при этом уменьшится, но относительная роль дипольного члена возрастет.

5) На контуре, где подперта пластинка, граничные условия имеют вид: $u_i + u_2 = 0$, $u_t = 0$, $\frac{\partial}{\partial r}(u_i + u_r) = \frac{\partial}{\partial r} u_t$, $M_{r\varphi}(u_i + u_r) = M_{r\varphi} u_t$. Отсюда находим, что при $kR \ll 1$ решение также имеет вид:

$$u_r = \sqrt{\frac{2}{\pi kr}}\, e^{i(kr-\pi/4)} \left\{ -1 + \frac{\pi t}{2} \frac{\cos(\varphi - \pi/2)}{\ln kR + \mathrm{const}} + \ldots \right\}.$$

Автор пользуется случаем выразить благодарность М. А. Исаковичу за обсуждение результатов работы.

Всесоюзный центральный
н.-и. институт охраны труда
Москва

Поступила в редакцию
12 июля 1963 г.