АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том X 1964 Вып. 2

УДК 534.28

ЗАТУХАНИЕ НОРМАЛЬНЫХ ВОЛН В ПЛАСТИНАХ, НАХОДЯЩИХСЯ В ЖИДКОСТИ

Л. Г. Меркулов

Исследовано затухание нормальных волн, обусловленное потерями на излучение, для пластин, находящихся в жидкости. При вычислениях использован приближенный метод, где в качестве нулевого приближения взяты решения дисперсионных уравнений пластин со свободными границами. Выведены формулы для коэффициентов затухания симметричных и антисимметричных волн. Рассмотрены некоторые частные случаи общих формул. Приведены результаты численных расчетов затухания первых мод нормальных волн для стальных пластин в воде.

Нормальные волны пластин (волны Лэмба) находят широкое применение для целей ультразвуковой дефектоскопии листовых материалов. При иммерсионном способе, когда исследуемая пластина погружается в жидкость (обычно воду), существенную роль играют потери на излучение акустической энергии пластиной. Угол между нормалью к пластине и волновым вектором излученной волны определяется по условию совпадения поверхностной составляющей фазовой скорости в жидкости (v_0) с одной из возможных скоростей нормальных волн (v_1); он равен $\theta = \arcsin v_0 / v_1$.

Затухание нормальных волн, обусловленное указанными потерями, может значительно превосходить собственное поглощение звука в материале пластины и часто является главной причиной, ограничивающей предельную чувствительность иммерсионной дефектоскопии.

В литературе [1] расчет затухания, обусловленного потерями на излучение, проводился только в предельном случае тонких пластин $k_1 h \ll 1$, где k_1 — волновое число, h — толщина пластины. Представляет существенный интерес исследование затухания при произвольных значениях $k_1 h$, что и является предметом настоящей статьи.

Дисперсионные уравнения, описывающие распространение нормальных волн в неограниченной изотропной пластине, находящейся в жидкости (последняя считается идеальной), приведены в работе [2]. Для симметричных мод уравнение имеет вид:

$$\frac{\operatorname{th}(\beta_1 h/2)}{\operatorname{th}(\gamma_1 h/2)} - \frac{4k_1^2\gamma_1\beta_1}{(k_1^2+\beta_1^2)^2} + i\frac{\rho_0 k_t^4\gamma_1 \operatorname{th}(\beta_1 h/2)}{\rho\sqrt{k_0^2-k_1^2}(k_1^2+\beta_1^2)^2} = 0 \qquad (1)$$

и для антисимметричных мод

$$\frac{\operatorname{th}(\gamma_1 h/2)}{\operatorname{th}(\beta_1 h/2)} - \frac{4k_1^2\gamma_1\beta_1}{(k_1^2+\beta_1^2)^2} + i\frac{\rho_0 k_t^4\gamma_1}{\rho\sqrt{k_0^2-k_1^2}(k_1^2+\beta_1^2)^2\operatorname{th}(\beta_1 h/2)} = 0. \qquad (2)$$

Здесь введены обозначения: $\gamma_1 = \sqrt{k_1^2 - k_l^2}$, $\beta_1 = \sqrt{k_1^2 - k_t^2}$, где $k_l = \omega / v_l$ и $k_t = \omega / v_t$ — волновые числа продольных и сдвиговых волн в материале пластины, $k_0 = \omega / v_0$ — в жидкости, ρ_0 и ρ — соответственно плотности жидкости и материала пластины. Корни дисперсионных уравнений k_1 являются в общем случае комплексными, их действительная

часть дает фазовую скорость, мнимая — амплитудный коэффициент затухания.

Для нахождения коэффициента затухания и фазовой скорости нормальных волн можно использовать приближенный метод. В качестве нулевого приближения удобно взять решения для пластины со свободными границами, положив $\rho_0 / \rho = 0$. Как известно, в этом случае корни дисперсионных уравнений являются чисто вещественными (исключая области за пределами «граничных» частот) и соответствуют незатухающим нормальным волнам [3].

При расчете затухания нормальных волн ограничимся первым приближением, считая ρ_0 / ρ существенно меньшим единицы. Это приближение оказывается вполне достаточным для многих практических задач, в частности, для случая стальных пластин в воде.

Положим $k_1 = k + \Delta$, где $|\Delta| \ll k$, $k = \omega / v$ — корни дисперсионных уравнений нулевого приближения, $\Delta = \delta + i\alpha$, δ — определяет поправку к фазовой скорости, α — коэффициент затухания. Далее, воспользуемся разложениями

$$k_1^2 \approx k^2(1 + 2\xi), \quad \gamma_1 \approx \gamma(1 + \xi_1), \quad \beta_1 \approx \beta(1 + \xi_2), \tag{3}$$

где введены обозначения: $\xi = \Delta / k$, $\xi_1 = k\Delta / \gamma^2$, $\xi_2 = k\Delta / \beta^2$; γ, β — относятся к пластине со свободными границами. Приведенные разложения могут считаться корректными во всей области дисперсионных кривых $k(\omega)$, исключая $k \to k_l$, $k \to k_t$ (эти случаи отдельно рассматриваются ниже), а также граничные частоты, вблизи которых фазовая скорость $\to \infty$.

Для членов, входящих в уравнения (1) и (2), с точностью до величин первого порядка можно написать

$$\frac{\operatorname{th}(\beta_1 h/2)}{\operatorname{th}(\gamma_1 h/2)} = \frac{\operatorname{th}(\beta h/2)}{\operatorname{th}(\gamma h/2)}\left[1 + \frac{\beta h}{2}\xi_2\left(\operatorname{cth}\frac{\beta h}{2} - \operatorname{th}\frac{\beta h}{2}\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{\gamma h}{2}\xi_1\left(\operatorname{cth}\frac{\gamma h}{2} - \operatorname{th}\frac{\gamma h}{2}\right)\right], \tag{4}$$

$$\frac{4k_1^2\gamma_1\beta_1}{(k_1^2 + \beta_1^2)^2} = \frac{4k^2\gamma\beta}{(k^2 + \beta^2)^2}\left[1 + \xi_1 + \xi_2 - 2\xi - \frac{4(\xi_2 - \xi)\beta^2}{k^2 + \beta^2}\right].$$

Нетрудно видеть, что в последних членах уравнений (1) и (2) достаточно ограничиться нулевым приближением, т. е. просто заменить k_1, β_1, γ_1 на k, β, γ.

После подстановки выражений (4) в (1) и (2) и ряда алгебраических преобразований, находим выражения коэффициентов затухания нормальных волн для пластин, находящихся в жидкости. В случае симметричных мод

$$\alpha_s\left\{\frac{h}{2}\left[\frac{1}{\beta}\left(\operatorname{th}\frac{\beta h}{2} - \operatorname{cth}\frac{\beta h}{2}\right) - \frac{1}{\gamma}\left(\operatorname{th}\frac{\gamma h}{2} - \operatorname{cth}\frac{\gamma h}{2}\right)\right] + \right.$$

$$\left. + \left[\frac{1}{\gamma^2} + \frac{1}{\beta^2} - \frac{2}{k^2}\left(\frac{3k^2 - \beta^2}{k^2 + \beta^2}\right)\right]\right\} = \frac{\rho_0 k_t^4 \operatorname{th}(\beta h / 2)}{4\rho k^4 \beta \sqrt{k_0^2 / k^2 - 1}}, \tag{5}$$

для антисимметричных мод

$$\alpha_a\left\{\frac{h}{2}\left[\frac{1}{\gamma}\left(\operatorname{th}\frac{\gamma h}{2} - \operatorname{cth}\frac{\gamma h}{2}\right) - \frac{1}{\beta}\left(\operatorname{th}\frac{\beta h}{2} - \operatorname{cth}\frac{\beta h}{2}\right)\right] + \right.$$

$$\left. + \left[\frac{1}{\gamma^2} + \frac{1}{\beta^2} - \frac{2}{k^2}\left(\frac{3k^2 - \beta^2}{k^2 + \beta^2}\right)\right]\right\} = \frac{\rho_0 k_t^4}{4\rho k^4 \beta \sqrt{k_0^2/k^2 - 1}\operatorname{th}(\beta h/2)} \tag{6}$$

Поправка на фазовую скорость в данном случае оказывается равной нулю (для ее вычисления необходимо брать более высокие приближения).

С помощью формул (5) и (6) возможно численным способом рассчитывать коэффициенты затухания, при этом в качестве k, β, γ должны подставляться величины, соответствующие корням дисперсионных уравнений свободной пластины. Из полученных формул видно, что при заданном значении произведения fh (f — частота), коэффициенты затухания обратно пропорциональны толщине пластины, поэтому кривые $\alpha_s(fh)$ и $\alpha_a(fh)$ для разных h должны различаться только масштабом.

Рассмотрим предельные случаи, когда могут быть получены простые выражения для α_s и α_a.

Для тонких пластин все выражения сильно упрощаются. В случае симметричных волн здесь возможна только одна мода s_0 — волна сжатия. Ее скорость определяется из формулы (1), если положить $\rho_0/\rho = 0$, что дает $(k^2+\beta^2)^2 = 4k^2\gamma^2$. Выразив входящие сюда величины через модуль Юнга E и коэффициент Пуассона σ, получаем

$$v_{s_0} = \sqrt{\frac{E}{\rho(1-\sigma^2)}} \tag{7}$$

Из общей формулы (5) при малых fh следует, что

$$\alpha_{s_0}\left[\frac{2}{\gamma^2} - \frac{2}{k^2}\left(\frac{3k^2-\beta^2}{k^2+\beta^2}\right)\right] = \frac{\rho_0 k_t^4 h}{8\rho k^4\sqrt{k_0^2/k^2-1}}$$

откуда после несложных преобразований находится окончательное выражение коэффициента затухания моды s_0 в тонкой пластине, совпадающее с полученным в работе [1]

$$\alpha_{s_0} = \frac{\rho_0\pi^2\sigma^2 hf^2}{\rho v_{s_0}^2(1-\sigma)^2\sqrt{v_{s_0}^2/v_0^2-1}}. \tag{8}$$

Здесь v_{s_0} определяется формулой (7).

Таким образом, коэффициент затухания волны сжатия для начального участка дисперсионной кривой оказывается квадратично зависящим от частоты. В случае стальной пластины, находящейся в воде, подстановка численных значений дает α_{s_0} (*см*$^{-1}$) $= 0{,}021\ h$ (*мм*) f^2 (*мггц*).

Для антисимметричной волны в тонкой пластине возможна только одна мода a_0 — волна изгиба. Фазовая скорость определяется из формулы (2). Положив $\rho_0/\rho = 0$ и использовав разложения $\mathrm{th}(\beta h/2)$ и $\mathrm{th}(\gamma h/2)$, находим

$$1 - \frac{h^2}{12}(\gamma^2-\beta^2) = \frac{4\beta^2k^2}{(k^2+\beta^2)^2},$$

или

$$v_{a_0} = \sqrt[4]{\frac{E\pi^2}{3\rho(1-\sigma^2)}}(fh)^2. \tag{9}$$

Формула (6) позволяет получить простое выражение коэффициента затухания в этом предельном случае

$$\alpha_{a_0}\frac{k^2-\beta^2}{k^2+\beta^2} = \frac{\rho_0 k_t^2}{4\rho hk^2\sqrt{k_0^2/k^2-1}}.$$

Используя выражение (9), находим окончательно

$$\alpha_{a_0} = \frac{\rho_0}{2\rho h\sqrt{v_{a_0}^2/v_0^2-1}} \tag{10}$$

Частотная зависимость при малых fh целиком определяется v_{a_0}. При $v_{a_0} < v_0$ коэффициент α_{a_0} становится мнимым, последнее соответствует отсутствию потерь на излучение. В этом случае в самой жидкости вдоль поверхности пластины распространяются неоднородные волны; эффект их воздействия носит чисто инерционный характер.

В предельном случае больших fh уравнения (1) и (2) приводят к следующему выражению:

$$1 - \frac{4k_1^2\gamma_1\beta_1}{(k_1^2 + \beta_1^2)^2} + \frac{i\rho_0 k_t^4\gamma_1}{\rho\sqrt{k_0^2 - k_1^2}(k_1^2 + \beta_1^2)^2} = 0, \tag{11}$$

которое совпадает с известным дисперсионным уравнением для поверхностных волн, распространяющихся вдоль границы твердого тела с жидкостью [3]. Выражение коэффициента затухания можно получить из общих формул (5) или (6). Для этого заметим, что члены в произведении с $h/2$, как нетрудно показать, имеют высший порядок малости, а поэтому

$$\alpha_p\left[\frac{1}{\gamma^2} + \frac{1}{\beta^2} - \frac{2(3k^2 - \beta^2)}{k^2(k^2 + \beta^2)}\right] = \frac{\rho_0 k_t^4}{4\rho k^4\beta\sqrt{k_0^2/k^2 - 1}}$$

или

$$\alpha_p\left[\frac{1}{1 - v_p^2/v_l^2} + \frac{1}{1 - v_p^2/v_t^2} - \frac{2(2 + v_p^2/v_t^2)}{2 - v_p^2/v_t^2}\right] =$$

$$= \frac{\rho_0\pi(v_p/v_t)^3 f}{2\rho v_t\sqrt{1 - v_p^2/v_t^2}\sqrt{v_p^2/v_0^2 - 1}} \tag{12}$$

где v_p — скорость волн Рэлея на свободной границе (корень дисперсионного уравнения нулевого приближения $(k^2 + \beta^2)^4 = 16k^4\gamma^2\beta^2$).

Коэффициент затухания в данном предельном случае линейно возрастает с частотой. Такая зависимость обусловливается тем обстоятельством, что с ростом частоты энергия звуковой волны концентрируется во все более тонком слое (толщина которого $\sim 1/f$) и, следовательно, усиливается отдача энергии в окружающую среду. Для стальной пластины в воде формула (12) после подстановки численных величин принимает вид $\alpha_p(см^{-1}) = 0{,}232f$ $(мггц)$. На частотах порядка мегагерц α_p оказывается столь значительным, что полное затухание волны будет происходить на пути в несколько сантиметров.

Рассмотрим теперь некоторые другие частные случаи. Как очевидно из физических соображений, затухание вследствие потерь на излучение должно быть связано с величиной отношения нормальной и касательной компонент смещений в упругой волне на поверхности пластины. Если, например, $|V_\perp / V_\parallel| = 0$, то потери на излучение не могут иметь место (силами вязкости мы пренебрегаем) и $\alpha = 0$; вблизи точек, где $|V_\perp / V_\parallel| \to \infty$, следует ожидать максимального затухания. Соотношения смещений на поверхности пластины со свободными границами определяются для симметричных мод выражением

$$\left[\frac{V_\perp^0}{V_\parallel^0}\right] = \frac{2\gamma k}{\beta^2 + k^2}\,\mathrm{th}\,\frac{\gamma h}{2} \tag{13}$$

и для антисимметричных мод

$$\left[\frac{V_\perp^0}{V_\parallel^0}\right] = \frac{2\gamma k}{\beta^2 + k^2}\,\mathrm{cth}\,\frac{\gamma h}{2}. \tag{14}$$

Покажем, как должен вычисляться коэффициент затухания нормальных волн вблизи особых точек. Когда $k \to k_t (\beta \to 0)$ или $k \to k_l (\gamma \to 0)$,

в качестве исходных уравнений следует использовать (1) или (2). Если $k \to k_l$, то для симметричных мод $\operatorname{th}(\beta h/2) = 0$; при этом $hf = nv_t / \sqrt{1 - v_t^2 / v_l^2}$, где $n = 1, 2, 3$. Нетрудно видеть, что в рассматриваемом приближении затухание должно отсутствовать, поскольку последний член в уравнении (1) будет иметь более высокий порядок малости. Из формулы (13) следует, что в этом случае $|V_\perp^0 / V_\parallel^0|$ также равно нулю.

Для антисимметричных мод корни нулевого приближения определяются уравнением

$$\frac{h}{2\operatorname{th}(\beta h/2)} = \frac{4k_l^2\beta}{(k_l^2 + \beta^2)^2}.$$

Положив $k_1 = k_l + i\alpha_a$ и выполнив в формуле (2) разложение с точностью до членов первого порядка по α_a, получим

$$\alpha_a\left[\frac{2}{k_l^2} + \frac{1}{\beta^2} - \frac{8}{k_l^2 + \beta^2} - \frac{h}{2\beta}\{\operatorname{th}(\beta h/2) - \operatorname{cth}(\beta h/2)\} + \frac{h^2}{6}\right] =$$

$$= \frac{2\rho_0 k_t^4}{\rho h k_l^2 \sqrt{k_0^2 / k_l^2 - 1}\,(k_l^2 + \beta^2)^2}.$$

Последующие простые преобразования приводят к окончательному выражению:

$$\alpha_a = \frac{2\rho_0(1-a)}{\rho h\sqrt{\frac{v_l^2}{v_0^2} - 1}\left\{(2-3a) + \frac{2\pi^2(fh)^2}{v_l^2}(2a-1)^2\left[\frac{1}{8}(2a-1)^2 + \frac{1}{3}a(1-a)\right]\right\}}, \tag{15}$$

где введено обозначение $a = v_t^2 / v_l^2$.

При $k \to k_t$ (этот случай реализуется лишь для волны s_0) нулевое приближение дает уравнение $\operatorname{th}\frac{\gamma h}{2} = \frac{hk_t^2}{8\gamma}$, которое имеет единственный корень, отвечающий $fh = 3{,}43$ *мггц мм*. Далее, аналогично предыдущему, следует положить $k_1 = k_t + i\alpha_{s_0}$ и провести разложение уравнения (1), тогда

$$\alpha_{s_0}\left[\frac{h^2k_t}{4\gamma} - \frac{2h^2\gamma}{3k_t} + \frac{8\gamma}{k_t^3} - \frac{4}{k_t\gamma}\right] = -\frac{\rho_0\gamma h}{2\rho\sqrt{k_0^2 - k_t^2}},$$

или

$$\alpha_{s_0} = \frac{\rho_0(1-a)}{2\rho h\sqrt{\frac{v_t^2}{v_0^2} - 1}\left[\frac{1}{12}(5-8a) - \frac{v_t^2}{\pi^2(fh)^2}(1-2a)\right]}. \tag{16}$$

Интересным является случай $k = k_t/\sqrt{2}$. При этом $(\beta^2 + k^2) \to 0$ и $|V_\perp^0 / V_\parallel^0| \to \infty$. Для симметричных мод мы имеем

$$\operatorname{th}(\beta h/2) = i\operatorname{tg}\frac{h}{2}\sqrt{k_t^2 - k^2} \to \infty \text{ и } fh = (v_t\sqrt{2}/2)(2n+1),$$

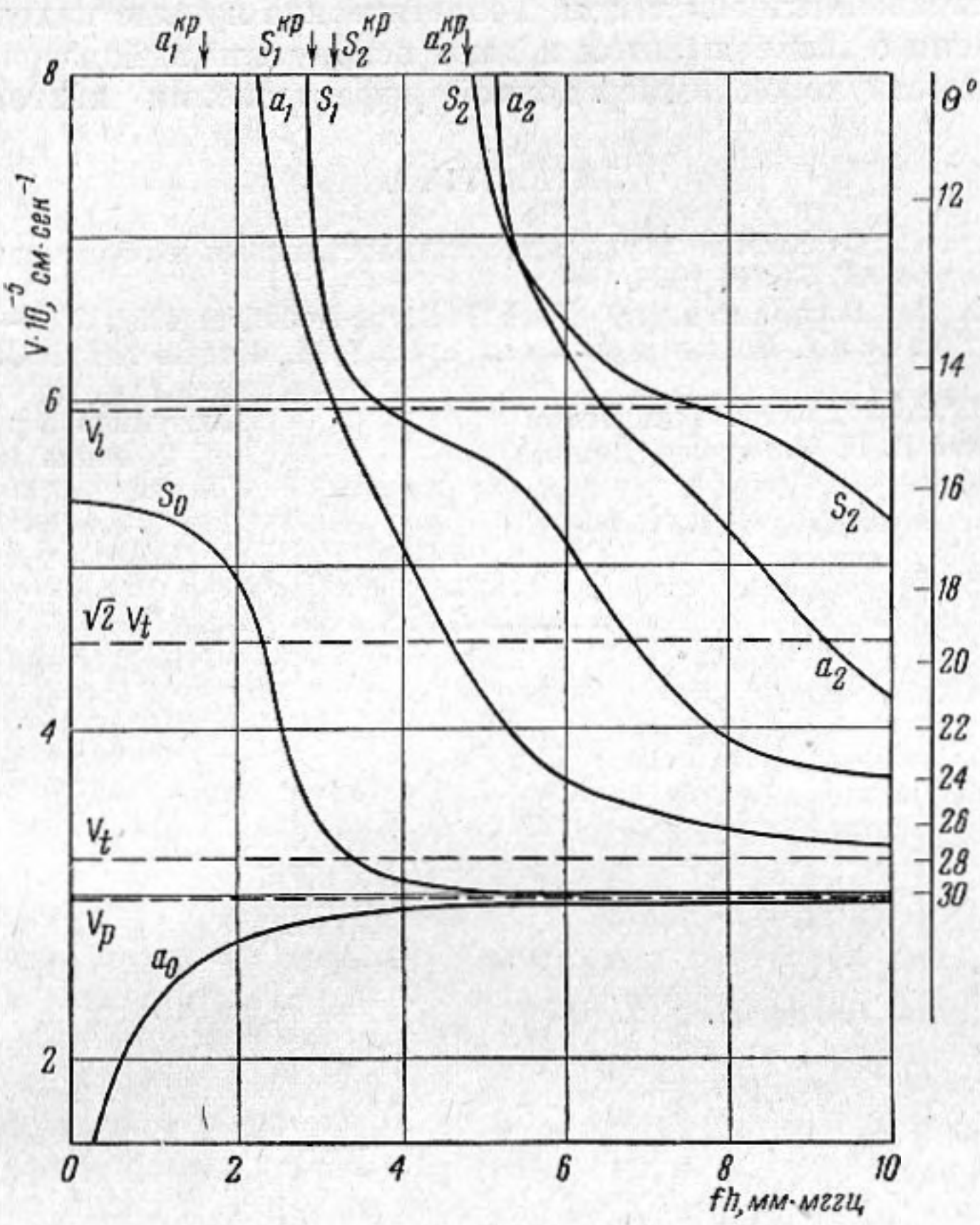
где $n = 0, 1, 2, \ldots$; для антисимметричных мод $\operatorname{th}(\beta h/2) \to 0$, а $fh = v_t\sqrt{2}n$ $(n = 1, 2, 3 \ldots)$.

Коэффициент затухания обоих типов волн в этом случае оказывается одинаковым; его выражение легко получается из общих формул (5) или (6).

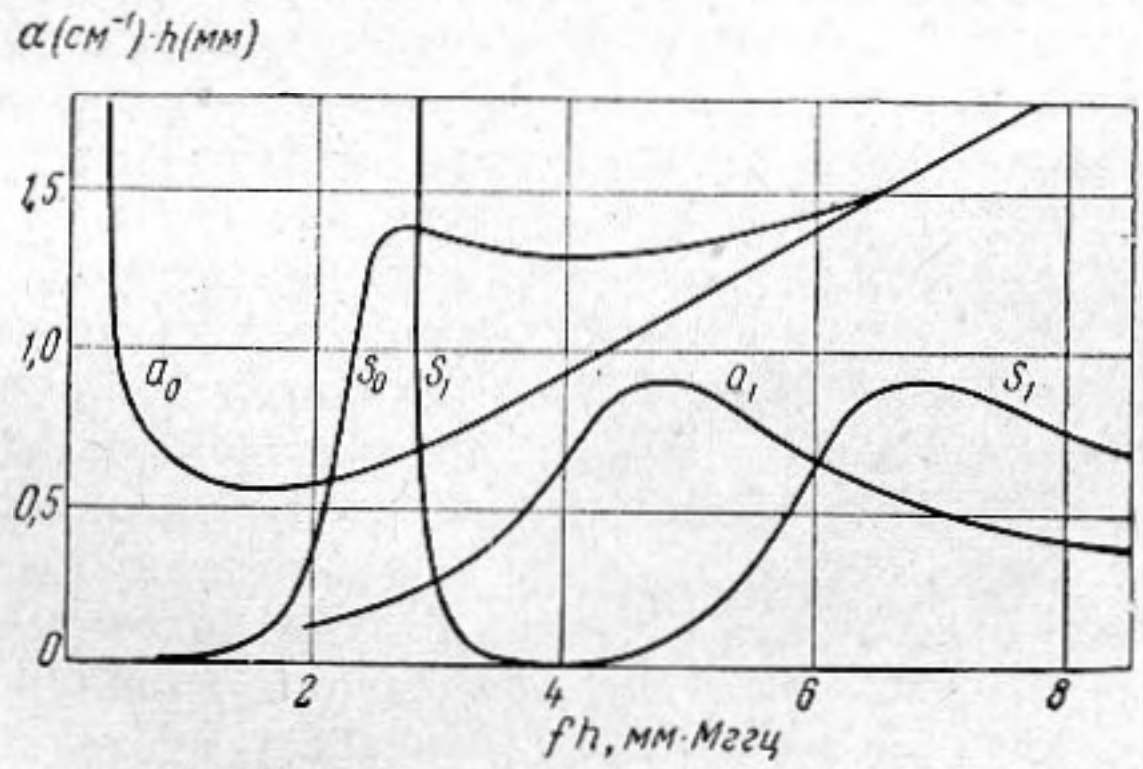
$$\alpha_s = \alpha_a = \frac{2\rho_0}{\rho h\sqrt{2v_t^2 / v_0^2 - 1}}. \tag{17}$$

Аналогичным способом может быть исследовано затухание вблизи граничных частот.

В заключение приведем результаты выполненных нами численных расчетов для стальных пластин в воде. Значения исходных величин взяты



Фиг. 1



Фиг. 2

следующие: $v_l = 5{,}94 \cdot 10^5$ *см/сек*, $v_t = 3{,}22 \cdot 10^5$ *см/сек*, $v_0 = 1{,}5 \cdot 10^5$ *см/сек*, $\rho = 7{,}8$ *г/см*^{3}, $\rho_0 = 1$ *г/см*^{3}. Дисперсионные кривые фазовой скорости представлены на фиг. 1 (в масштабе чертежа кривые скоростей для пластин в воде и в воздухе практически не различаются). Значения θ^0 отвечают углам наклонного падения из воды, при которых должны возбуждаться (излучаться) нормальные волны.

На фиг. 2 даны кривые для коэффициентов затухания двух первых симметричных и антисимметричных мод. Обращает на себя внимание значительно более сильное затухание моды s_0 по сравнению с s_1 и a_1. Вблизи частот, соответствующих $v = \sqrt{2}v_t$ для s_1 и a_1 (а также высших мод), наблюдается выраженный максимум. Теоретические кривые находятся в хорошем согласии с экспериментом и дают основу для выбора рабочих частот при ультразвуковой иммерсионной дефектоскопии листовых материалов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. М. Лямшев. Отражение звука тонкими пластинками и оболочками в жидкости. М., Изд-во АН СССР, 1955.
2. A. Schoch. Der Schalldurchgang durch Platten. Acustica, 1952, 2, 1—17.
3. Л. М. Бреховских. Волны в слоистых средах. М., Изд-во АН СССР, 1957.

Ленинградский электротехнический
институт им. В. И. Ульянова (Ленина)

Поступила в редакцию
24 июня 1963 г.