АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том X 1964 Вып. 3

УДК 5342

РАСЧЕТ ЛУЧЕЙ, РАСПРОСТРАНЯЮЩИХСЯ В НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

В. А. Елисеевнин

Излагается метод расчета лучевых картин в неоднородной среде, свойства которой произвольно меняются в пространстве. Выводится система простых дифференциальных уравнений первого порядка, решая которую одним из приближенных численных методов, можно рассчитать лучи. В качестве примера приводится расчет лучевой картины в неоднородном акустическом волноводе, с глубиной залегания оси, изменяющейся вдоль трассы распространения звука.

При изучении сверхдальнего распространения звуковых и электромагнитных волн в природных волноводах наряду с волновыми методами расчета широко применяется метод лучевого приближения. Методы построения лучевых картин в слоистой среде (частным случаем является волновод, однородный по трассе распространения) достаточно хорошо разработаны.

Чаще всего применяется метод кусочно-линейной аппроксимации, заключающийся в разбиении среды на горизонтальные слои, в которых градиенты скорости звука * предполагаются постоянными и меняющимися скачком на границах слоев. Вывод уравнения луча в аналитической форме для каждого слоя не представляет затруднений.

Однако на практике часто приходится сталкиваться с таким случаем, когда свойства природного волновода изменяются, и довольно значительно, вдоль трассы распространения волн. Такую среду уже нельзя рассматривать как слоистую; ее свойства изменяются по всем трем координатам. Вывод уравнения луча в аналитической форме для такого общего случая неоднородной среды весьма затруднителен и возможен только в некоторых частных случаях [1]. В частности, уравнение луча может быть выведено из уравнения эйконала:

$$(\partial u / \partial x)^2 + (\partial u / \partial y)^2 + (\partial u / \partial z)^2 = n^2(x, y, z),$$

где $u(x, y, z)$ — функция эйконала, $n(x, y, z)$ — показатель преломления среды. Это возможно в том случае, когда переменные разделяются, а именно, если среда однородная, слоистая или когда квадрат показателя преломления является аддитивной функцией переменных [2], т. е.** $n^2(x, y, z) = f_1(x) + f_2(y) + f_3(z)$.

Практический интерес представляет как раз тот случай, когда в уравнении эйконала переменные не разделяются. Так, при изучении природных волноводов часто приходится сталкиваться с положением, когда глубина уровня минимума скорости звука изменяется вдоль трассы

* Все излагаемое ниже относится к акустическому случаю. Однако все рассуждения в равной степени применимы и к случаю распространения электромагнитных волн.

** Вывод возможен также, когда соответствующим преобразованием можно перейти к системе координат, в которой переменные разделяются.

распространения волн. В этом случае квадрат показателя преломления не является аддитивной функцией переменных и метод разделения переменных для решения уравнения эйконала неприменим.

Таким образом, встает вопрос о численных методах расчета траектории луча. Представляется, что подходящей для численного интегрирования является выводимая ниже система простых дифференциальных уравнений первого порядка. Для простоты все дальнейшие рассуждения будут проводиться для плоского случая. Будет рассматриваться неоднородная среда, в которой скорость звука изменяется одновременно по вертикали y и по горизонтали x. Скорость звука по третьей координате z остается постоянной. Будут рассматриваться лучи, распространяющиеся в плоскости xoy. Расчеты для случая неоднородной среды, в которой скорость звука меняется одновременно по всем трем координатам, проводятся совершенно аналогично.

Направляющие косинусы звукового луча, вышедшего из источника, помещенного в точку (x_0, y_0), будут $dx / ds = \cos\theta$ и $dy / ds = \sin\theta$, где θ — текущий угол наклона луча к оси x, ds — элемент длины по лучу. Вводя текущее время t как параметр, получаем

$$dx / dt = \cos\theta (ds / dt) = c(x, y) \cos\theta, \tag{1}$$

$$dy / dt = \sin\theta (ds / dt) = c(x, y) \sin\theta, \tag{2}$$

где $ds / dt = c(x, y)$ — локальная скорость распространения звука.

С другой стороны, направляющие косинусы луча получаются также при делении левой и правой частей уравнения эйконала на квадрат показателя преломления и определяются выражениями:

$$\cos\theta = 1 / n(x, y) (\partial u / \partial x), \tag{3}$$

$$\sin\theta = 1 / n(x, y) (\partial u / \partial y). \tag{4}$$

Перенося $n(x, y)$ в левую часть и дифференцируя выражение (3) по y и выражение (4) по x и учитывая, что $\partial^2 u / \partial x \partial y = \partial^2 u / \partial y \partial x$, получим следующее равенство:

$$\partial(n \cos\theta) / \partial y = \partial(n \sin\theta) / \partial x. \tag{5}$$

Далее,

$$\begin{aligned} d(n\cos\theta) / ds &= \partial(n\cos\theta) / \partial x (dx / ds) + \partial(n\cos\theta) / \partial y (dy / ds) = \\ &= \partial(n\cos\theta) / \partial x \cos\theta + \partial(n\sin\theta) / \partial x \sin\theta = \partial n / \partial x. \end{aligned} \tag{6}$$

Преобразуем уравнение (6), вводя параметр t

$$\begin{gathered} d(n\cos\theta) / ds = d(n\cos\theta) / dt (dt / ds) = n[d(\cos\theta) / dt] 1 / c + \\ + dn / dt \cos\theta (1 / c) = -n \sin\theta (d\theta / dt)(1 / c) + \cos\theta [(\partial n / \partial x)(dx / dt) + \\ + (\partial n / \partial y)(dy / dt)] 1 / c = \partial n / \partial x. \end{gathered}$$

Преобразуя далее это уравнение и учитывая выражения (1) и (2), а также то, что $n = c_0 / c$, получим

$$d\theta / dt = \partial c / \partial x \sin\theta - \partial c / \partial y \cos\theta. \tag{7}$$

Вводя обозначения для градиентов скорости звука

$$\partial c(x, y) / \partial x = a_x(x, y), \quad \partial c(x, y) / \partial y = a_y(x, y),$$

напишем выражение (7) в виде

$$d\theta / dt = a_x(x, y) \sin\theta - a_y(x, y) \cos\theta. \tag{8}$$

Таким образом, в двумерном случае звуковой луч описывается системой трех простых дифференциальных уравнений 1-го порядка:

$$
\begin{aligned}
dx / dt &= c(x, y) \cos\theta, \\
dy / dt &= c(x, y) \sin\theta, \qquad (9) \\
d\theta / dt &= a_x(x, y) \sin\theta - a_y(x, y) \cos\theta.
\end{aligned}
$$

Звуковой луч в неоднородной среде, свойства которой меняются по трем координатам, описывается системой шести простых дифференциальных уравнений 1-го порядка (вывод аналогичен приводимому выше для двумерного случая):

$$
\begin{aligned}
dx / dt &= c \cos\alpha, \\
dy / dt &= c \cos\beta, \\
dz / dt &= c \cos\gamma, \qquad (10) \\
d\alpha / dt &= a_x \sin\alpha - a_y \operatorname{ctg}\alpha \cos\beta - a_z \operatorname{ctg}\alpha \cos\gamma, \\
d\beta / dt &= -a_x \cos\alpha \operatorname{ctg}\beta + a_y \sin\beta - a_z \operatorname{ctg}\beta \cos\gamma, \\
d\gamma / dt &= -a_k \cos\alpha \operatorname{ctg}\gamma - a_y \cos\beta \operatorname{ctg}\gamma + a_z \sin\gamma,
\end{aligned}
$$

где α, β и γ — текущие углы луча в пространстве,

$$
a_x = \partial c(x, y, z) / \partial x, \quad a_y = \partial c(x, y, z) / \partial y, \quad a_z = \partial c(x, y, z) / \partial z
$$

— градиенты скорости звука по всем трем координатам соответственно.

При задании начальных условий — координат источника и углов выхода луча из источника — системы уравнений (9) и (10) решаются одним из приближенных численных методов. Решение получается в виде ряда числовых значений $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, $\alpha(t)$, $\beta(t)$ и $\gamma(t)$. Задача расчета луча при помощи этих систем уравнений довольно просто может быть запрограммирована для вычислений на цифровой электронно-счетной машине. Одним из достоинств метода является возможность расчета одновременно с формой луча также времени распространения по лучу звукового импульса.

В качестве примера рассмотрим расчет звуковых лучей в частном случае неоднородной среды, в которой скорость звука определяется выражением

$$
c(x, y) = \frac{c_0}{\sqrt{(1-m)/[\operatorname{ch}^2(y/H + n \operatorname{th} x/L)] + m}}, \qquad (11)
$$

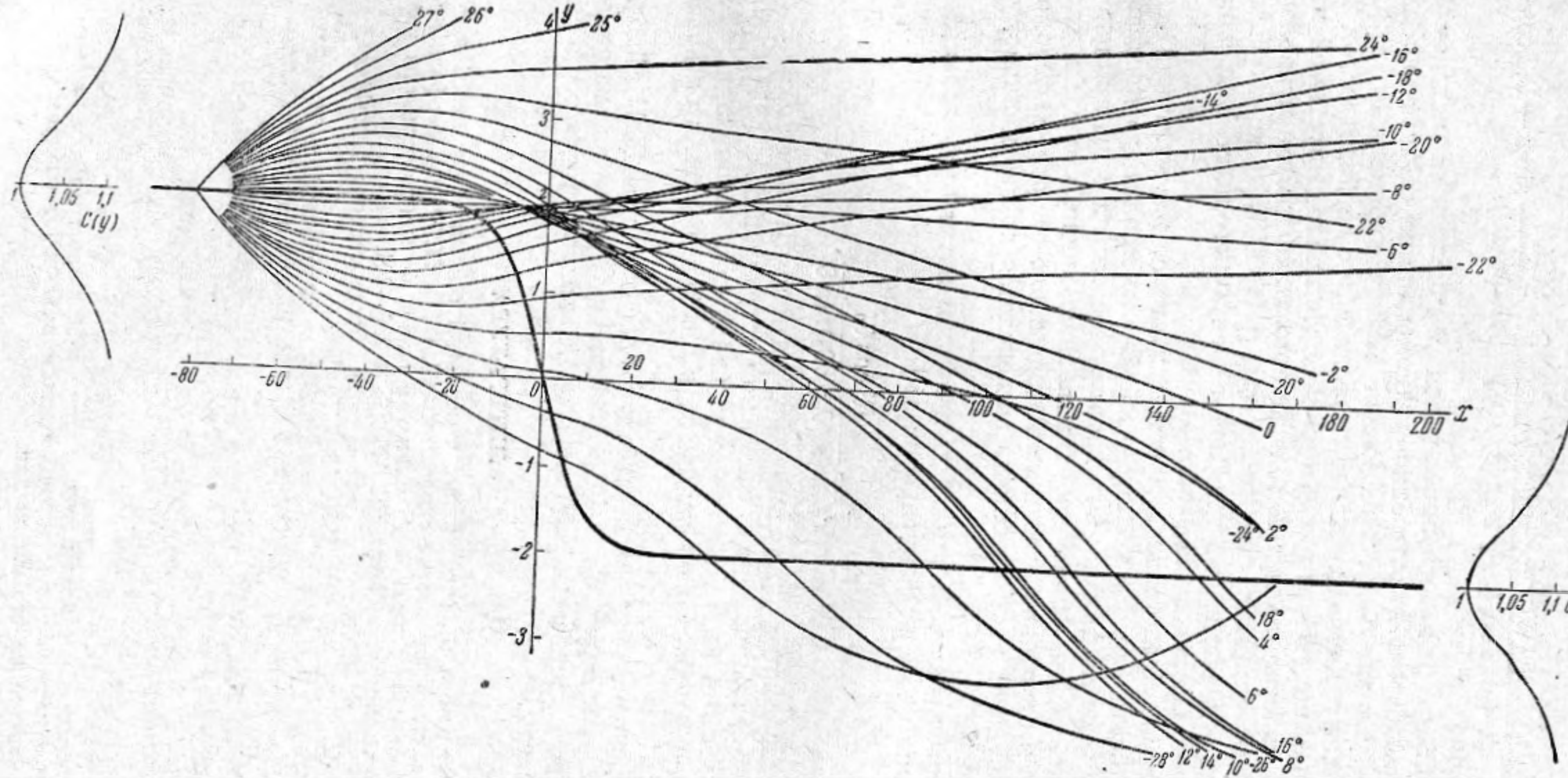
где c_0, m, n, H и L — параметры, характеризующие среду. При $x \to \pm\infty$ неоднородная среда переходит в слоисто-неоднородную, представляющую собой симметричный слой Эпштейна [3], и описывается выражением

$$
c(y) = \frac{c_0}{\sqrt{(1-m)/[\operatorname{ch}^2(y/H \pm n)] + m}}. \qquad (12)
$$

При любом значении $x = \mathrm{const}$ распределение скорости звука по сечению канала по вертикали отвечает симметричному слою Эпштейна, причем минимум скорости звука сдвинут по отношению к оси x на величину $n \operatorname{th} x / L$. Таким образом, рассматриваемая среда представляет собой неоднородный волновод с глубиной залегания оси, плавно изменяющейся вдоль трассы. Параметр H характеризует ширину волновода, а параметр L — протяженность неоднородной части волновода.

Для расчета лучей были приняты следующие значения параметров: $c_0 = 1$, $m = 0{,}8$, $n = 2$, $L = 10$ и $H = 1$. Система уравнений (9) принимает при этом вид

$$
\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\sqrt{0{,}2/\operatorname{ch}^2[y + 2\operatorname{th}(x/10)] + 0{,}8}} \cos\theta, \qquad (13)
$$



y
x
C(y)
1
1,05
1,1
27°
26°
25°
24°
-16°
-18°
-12°
-14°
-10°
-20°
-8°
22°
-6°
-22°
20°
-2°
0
-24°
2°
18°
4°
6°
16°
8°
-28°
12°
14°
10°
-26°

$$\frac{dy}{dt}=\frac{1}{\sqrt{0{,}2/\mathrm{ch}^2[y+2\,\mathrm{th}(x/10)]+0.8}}\sin\theta,$$

$$\frac{d\theta}{dt}=\frac{\mathrm{sh}(y+2\,\mathrm{th}(x/10))}{[1+0{,}8\,\mathrm{sh}^2(y+2\,\mathrm{th}(x/10)]^{3/2}}\left[\frac{0{,}04}{\mathrm{ch}^2(x/10)}\sin\theta-0{,}2\cos\theta\right].$$

Эта система решалась приближенным численным методом Рунге — Кутта * на цифровой электронно-счетной машине «Минск-1». Задавались начальные условия x_0, y_0 и θ_0. Расчет велся с переменным шагом Δt; на каждом этапе применялся расчет с шагом Δt и с двойным шагом $2\Delta t$. Если расхождение полученных значений не превышало допустимой погрешности, то считалось, что шаг Δt для данного этапа выбран правильно, полученные при его помощи значения $x_n(t)$, $y_n(t)$ и $\theta_n(t)$ можно считать верными, и на основании их вести расчет следующего шага. В противном случае шаг уменьшался в два раза.

На фигуре представлена лучевая картина, рассчитанная описанным выше методом. Справа и слева изображены кривые распределения скорости звука по вертикали. Ось канала изображена в виде жирной линии, проходящей через начало координат. Ясно видно, что лучи, распространявшиеся в однородной части волновода около его оси, за изломом уходят с оси и звуковая энергия сильно рассеивается по вертикальному сечению волновода.

Расчеты лучевых картин в дальнейшем могут быть использованы для нахождения фактора фокусировки [6]

$$f=\frac{R^2\cos\theta_0}{x(\partial x/\partial\theta_0)\sin\theta},$$

где R — расстояние, проходимое звуковым импульсом по лучу. Очевидно, что расчет величины k не представляет затруднений.

Изложенный выше метод может найти применение при расчетах звуковых лучей и факторов фокусировок в сейсмических исследованиях земной коры.

В заключение выражаю глубокую благодарность П. П. Фролову, взявшему на себя труд программирования и расчета на машине, а также Л. М. Бреховских и Г. М. Дорскому за просмотр рукописи и все замечания и советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. С. Берзон. Об определении траекторий сейсмических лучей и полей времен в средах с переменными скоростями. Изв. АН СССР, сер. геофиз., 1948, **12**, 41.
2. Л. М. Бреховских, В. А. Елисеевнин. О распространении волн в неоднородном волноводе. Акуст. ж., 1960, **6**, 3, 284—291.
3. P. Epstein. Reflection of waves in an inhomageneous absorbing mechium. Proc. Nat. Acad. Sc. America, 1930, **16**, 627.
4. И. С. Березин, Н. П. Жидков. Методы вычислений, т. II, 1959.
5. Б. П. Демидович, И. А. Марон, Э. З. Шувалова. Численные методы анализа, 1962.
6. Л. М. Бреховских. Волны в слоистых средах. М., Изд-во АН СССР, 1957, стр. 426.

Акустический институт АН СССР
Москва

Поступила в редакцию
13 января 1964 г.

---

* Учитывая, что этот метод достаточно распространен в вычислительной математике и подробно описывается в целом ряде работ (например, [4, 5]), не будем останавливаться на его изложении.