АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том X 1964 Вып. 3

УДК 534—16

ПОТЕНЦИАЛЫ СМЕЩЕНИЯ УПРУГОЙ СЛОИСТО-НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЫ

В. Ю. Завадский

Рассмотрен двумерный случай движения изотропной упругой слоисто-неоднородной среды. Введены величины S, T, характеризующие дивергенцию и ротор вектора смещения. Для этих величин получена система двух дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Показана связь функций S, T с потенциалами вектора смещения. Исследованы потенциалы, соответствующие нулевому смещению, и показано, как в одних случаях эти потенциалы можно устранить из рассмотрения, а в других — использовать для симметричной записи граничных условий.

Рассмотрим в декартовой системе координат xyz упругую изотропную неоднородную среду, в которой плотность и параметры Ламе зависят от xyz как непрерывные дифференцируемые функции $\rho(x, y, z)$, $\lambda(x, y, z)$, $\mu(x, y, z)$. Вектор смещения $\mathrm{U}(x, y, z, t)$ в такой среде удовлетворяет уравнению [1—3]

$$\rho(\partial^2\mathbf{U} / \partial t^2) = (\lambda + \mu)\nabla(\nabla\mathbf{U}) + \mu\nabla^2\mathbf{U} + \nabla\lambda(\nabla\mathbf{U}) + \nabla\mu \times$$
$$\times (\nabla \times \mathbf{U}) + 2(\nabla\mu\nabla)\mathbf{U} = (\partial / \partial x)\mathbf{e}_x + (\partial / \partial y)\mathbf{I}_y + (\partial / \partial z)\mathbf{e}_z). \quad (1)$$

Исследуем случай, когда вектор $\mathbf{U} = \{U_1, U_2, U_3\}$ расположен в плоскости $xz (U_2 = 0)$, зависит от x, t согласно множителю $\exp(-i\omega t + i\xi x)$ (который в дальнейшем опускаем) и не зависит от y. Функции ρ, λ, μ будем считать изменяющимися только в зависимости от координаты z, что соответствует слоисто-неоднородной среде. Представим вектор $\mathbf{U}$ в виде

$$\mathbf{U} = \nabla\varphi + \nabla \times (\psi\mathbf{e}_y), \quad (2)$$

где φ, ψ — скалярный и векторный потенциалы (ψ — единственная компонента потенциала $\boldsymbol{\psi} = \psi e_y$, если $U_2 = 0$), а также введем величины S, T:

$$S = (\lambda + 2\mu)\nabla\mathbf{U}, \qquad T = \mu(\mathbf{e}_y\nabla \times \mathbf{U}), \quad (3)$$

являющиеся скалярными функциями для рассматриваемого случая движения. Характерные особенности функций S, T, введенных наряду с потенциалами φ, ψ, будут рассмотрены ниже. Учитывая все сказанное, легко видеть, что U_1, U_3, φ, ψ, S, T связаны соотношениями:

$$U_1 = i\xi\varphi - \psi', \quad U_3 = \varphi' + i\xi\psi, \quad S = (\lambda + 2\mu)(i\xi U_1 + U_3'), \quad (4)$$
$$T = \mu(U_1' - i\xi U_3),$$

$$(\lambda + 2\mu)(\varphi'' - \xi^2\varphi) = S, \qquad \mu(\psi'' - \xi^2\psi) = -T. \quad (5)$$

В формулах (4), (5), как и всюду в дальнейшем, штрихом обозначена производная по z. Как следует из выражений (3), (5), величина S характеризует только продольные деформации в среде, для которых $\nabla \times \mathbf{U} = 0$;

S пропорциональна $\Delta\mathbf{U} = \Delta\varphi$ и обращается в нуль, если $\varphi \equiv 0$. Наоборот, величина T связана только с потенциалом ψ. Для рассматриваемого случая движения векторное уравнение (1) эквивалентно двум уравнениям:

$$\begin{gathered}\rho\omega^2 U_1 + i\xi(\lambda U_1' + \lambda i\xi U_3) + 2\mu i\xi U_1 + d/dz(\mu U_1' + \mu i\xi U_3) = 0,\\ \rho\omega^2 U_3 + i\xi(\mu U_1' + \mu i\xi U_3) + d/dz(\lambda U_1' + \lambda i\xi U_3 + 2\mu U_3') = 0,\end{gathered} \tag{6}$$

которые, используя потенциалы φ и ψ, можно написать в виде

$$\begin{gathered}d/dz[-\mu(\psi'' - \xi^2\psi)] + i\xi[(\lambda + 2\mu)(\varphi'' - \xi^2\varphi)] +\\ + 2i\xi\mu'(\varphi' + i\xi\psi) + \omega^2\rho(i\xi\varphi - \psi') = 0,\\ d/dz[(\lambda + 2\mu)(\varphi'' - \xi^2\varphi)] - i\xi[-\mu(\psi'' - \xi^2\psi)] -\\ - 2i\xi\mu'(i\xi\varphi - \psi') + \omega^2\rho(\varphi' + i\xi\psi) = 0,\end{gathered} \tag{7}$$

а используя функции S, T, в виде

$$T' + i\xi S + 2i\xi\mu' U_3 + \omega^2\rho U_1 = 0, \quad S' - i\xi T - 2i\xi\mu' U_1 + \omega^2\rho U_3 = 0. \tag{8}$$

Уравнения (6) — (8) являются по существу различной формой записи системы уравнений Стоупли, полученных в работе [4]. Дифференцируя (8) по z

$$\begin{gathered}T'' + i\xi S' + 2i\xi\mu' U_3' + 2i\xi\mu'' U_3 + \omega^2\rho U_1' + \omega^2\rho' U_1 = 0,\\ S'' - i\xi T' - 2i\xi\mu' U_1' - 2i\xi\mu'' U_1 + \omega^2\rho U_3' + \omega^2\rho' U_3 = 0\end{gathered} \tag{9}$$

и исключая из шести уравнений (4), (8), (9) величины U_1, U_1', U_3, U_3', получим для S, T следующую систему двух уравнений:

$$\begin{gathered}S'' + \left[\frac{\omega^2\rho}{\lambda + 2\mu} - \xi^2\right]S - 2i\xi\frac{\mu'}{\mu}T - \frac{1}{2}\frac{h'}{h}(S' - i\xi T) - \frac{r}{h}(T' + i\xi S) = 0,\\ T'' + \left[\frac{\omega^2\rho}{\mu} - \xi^2\right]T + 2i\xi\frac{\mu'}{\lambda + 2\mu}S - \frac{1}{2}\frac{h'}{h}(T' + i\xi S) + \frac{r}{h}(S' - i\xi T) = 0,\end{gathered} \tag{10}$$

где введены обозначения:

$$h = \omega^4\rho^2 - 4\xi^2\mu'^2, \quad r = 2i\xi(\mu'\rho' - \mu''\rho)\omega^2. \tag{11}$$

Обратимся к методической стороне выполненных выше формальных операций. Используя потенциалы φ, ψ, представляющие вектор смещения $\mathbf{U}$ через дифференциальное равенство (2), пришлось повысить порядок старшей производной в исходной системе уравнений (6) и перейти к уравнениям (7), содержащим третьи производные φ, ψ. При этом, как легко видеть, уравнениям (7) удовлетворяют также такие потенциалы φ_0, ψ_0 (будем называть их нулевыми), для которых смещение тождественно равно нулю. Эти потенциалы, как следует из их определения, удовлетворяют системе уравнений

$$i\xi\varphi_0 - \psi_0' = 0, \qquad \varphi_0' + i\xi\psi_0 = 0. \tag{12}$$

Нулевые потенциалы не представляют, вообще говоря, физического интереса и должны быть отброшены каким-либо способом. Иногда для некоторых классов упругих неоднородных сред [4, 5], φ_0, ψ_0 удается отбросить прямо в системе уравнений (7), понизив порядок последних на единицу. Но в общем случае это сделать не удается. Поэтому удобно рассматривать величины S, T, для которых система уравнений (10) содержит старшую производную не выше второго порядка, а ее общее решение (обозначим его (S_c, T_c)) зависит от четырех произвольных постоянных. Чтобы перейти от S, T к φ, ψ, вернемся к равенствам (5). Рассматривая их как неоднородные уравнения для φ, ψ с известными правыми частями ($S = S_c$, $T = T_c$), получим

$$\varphi = A_1 e^{\xi z} + B_1 e^{-\xi z} + \varphi_c; \ \psi = iA_1 e^{\xi z} - iB_1 e^{-\xi z} + A_2 e^{\xi z} + B_2 e^{-\xi z} + \psi_c, \quad (13)$$

где A_1, A_2, B_1, B_2 — произвольные постоянные; $e^{\xi z}$, $e^{-\xi z}$ — линейно-независимые решения однородного уравнения:

$$y'' - \xi^2 y = 0, \quad (14)$$

а φ_c, ψ_c — частные решения неоднородных уравнений (5). Причем [6]

$$\varphi_c = e^{\xi z} \int \frac{e^{-\xi z} S_c}{2\xi(\lambda + 2\mu)} dz - e^{-\xi z} \int \frac{e^{+\xi z} S_c}{2\xi(\lambda + 2\mu)} dz,$$

$$\psi_c = e^{-\xi z} \int \frac{e^{\xi z} T_c}{2\xi\mu} dz - e^{\xi z} \int \frac{e^{-\xi z} T_c}{2\xi\mu} dz. \quad (15)$$

Нетрудно убедиться, что два первых члена в правых частях выражений (13) являются общим решением системы (12). Они соответствуют смещению, равному нулю тождественно, и могут быть отброшены как не представляющие физического интереса. Это то самое «нулевое» решение, которое было помехой при рассмотрении уравнений (7) в потенциалах. Тогда φ_0, ψ_0 было трудно выделить, так как не удавалось простым способом понизить порядок уравнений (7) на единицу и получить уравнения, не содержащие в качестве решений φ_0, ψ_0. В предлагаемом методе можно исключить из рассмотрения случай $\mathbf{U} \equiv 0$, положив $A_1 = B_1 = 0$. Тогда

$$\varphi = \psi_c, \ \psi = A_2 e^{\xi z} + B_2 e^{-\xi z} + \psi_c. \quad (16)$$

Частное решение для ψ, равное $\psi_1 = A_2 e^{\xi z} + B_2 e^{-\xi z}$, возникло в результате дополнительного дифференцирования системы Стоунли (8) и не удовлетворяет исходной системе (6). Поэтому необходимо положить $A_2 = B_2 = 0$ и брать в качестве потенциалов смещения φ, ψ только частные решения неоднородных уравнений (5), не рассматривая такие φ, ψ, которые удовлетворяют однородному уравнению (14). Так отбрасываются φ_0, ψ_0 в том случае, когда их рассмотрение нежелательно.

Остановимся, однако, на одном случае, когда использование нулевых потенциалов позволяет симметрично записать граничные условия задачи. Кроме изучения упругих сред с резкими границами, на которых плотность и параметры Ламе имеют конечный разрыв, в последнее время значительно повысился интерес к «слабым» границам раздела, где ρ, λ, μ непрерывны, но их производные имеют разрыв [7, 8]. Такие границы могут встретиться в сейсмических задачах, в задачах согласования упругих сред. Пусть, например, в некоторой точке $z = z_0$ (т. е. на плоскости $z = z_0$) ρ, λ, μ непрерывны, а ρ', λ', μ' имеют разрыв. Смещения и потенциалы (а также остальные величины) справа от z_0 обозначим знаком плюс, а слева — знаком минус. В упругой среде, представляющей единое целое, должны быть непрерывны напряжения и смещения. Условия равенства напряжений и смещений при $z = z_0$ можно записать в виде [9]

$$[\lambda(i\xi U_{1+} + U_{3+}') + 2\mu U_{3+}' = \lambda(i\xi U_{1-} + U_{3-}') + 2\mu U_{3-}']_{z=z_0},$$

$$[\mu(U_{1+}' + i\xi U_{3+}) = \mu(U_1' + i\xi U_{3-})]_{z=z_0}, \ U_{1+} = U_{1-}, \quad (17)$$

$$U_{3+} = U_{3-} \quad \text{при} \quad z = z_0.$$

Эти равенства эквивалентны следующим:

$$U_{1+} = U_{1-}, \ U_{3+} = U_{3-}, \ U_{1+}' = U_{1-}' \ U_{3+}' = U_{3-}' \quad \text{при} \quad z = z_0 \quad (18)$$

или, используя обозначения S, T

$$U_{1+} = U_{1-}, \quad U_{3+} = U_{3-}, \quad S_+ = S_-, \quad T_+ = T_-. \tag{19}$$

Последние условия могут быть записаны через потенциалы φ, ψ

$$\begin{aligned} &\varphi_+'' - \xi^2\varphi_+ = \varphi_-'' - \xi^2\varphi_-, \quad \psi_+'' - \xi^2\psi_+ = \psi_-'' - \xi^2\psi_-, \\ &i\xi\varphi_+ - \varphi_+' = i\xi\varphi_- - \psi_-', \quad \varphi_+' + i\xi\psi_+ = \varphi_-' + i\xi\psi_-. \end{aligned} \tag{20}$$

При этом безразлично, содержат φ, ψ нулевые потенциалы φ_0, ψ_0 или нет, так как в выражениях (20) величины справа и слева обращаются в нуль для φ_0, ψ_0. Пусть известно, что решение (φ, ψ) является общим решением исходных уравнений (7) и, следовательно, содержит в себе φ_0, ψ_0. Потребуем на границе выполнения равенств

$$\varphi_+ = \varphi_-, \varphi_+' = \varphi_-', \varphi_+'' = \varphi_-'', \psi_+ = \psi_-, \psi_+' = \psi_-', \psi_+'' = \psi_-''. \tag{21}$$

Если φ, ψ являются общим решением уравнений (7), то $\varphi_0 + \varphi$, $\psi + \psi_0$ будут также общим решением этих уравнений.

Поэтому, заменяя в (21) φ на $\varphi + \varphi_0$, а ψ на $\psi + \psi_0$, запишем эти условия в виде

$$\begin{gathered} \varphi_+ + \varphi_{0+} = \varphi_- + \varphi_{0-}, \ \psi_+ + \psi_{0+} = \psi_- + \psi_{0-}, \ \varphi_+' + \varphi_{0+}' = \varphi_-' + \varphi_{0-}' \\ \psi_+' + \psi_{0+}' = \psi_-' + \psi_{0-}', \ \varphi_+'' + \varphi_{0+}'' = \varphi_-'' + \varphi_{0-}'', \\ \psi_+'' + \psi_{0+}'' = \psi_-'' + \psi_{0-}''. \end{gathered} \tag{22}$$

Определяя из первых двух равенств (22) величины

$$\varphi_{0-} - \varphi_{0+} = \varphi_+ - \varphi_-, \qquad \psi_{0-} - \psi_{0+} = \psi_+ - \psi_- \tag{23}$$

и подставляя их в остальные четыре равенства (учитывая уравнения (12), которым удовлетворяют φ_0, ψ_0), получаем условия (20) непрерывности смещения и напряжения при $z = z_0$.

Таким образом, рассмотрение нулевых потенциалов позволяет записать условия на «слабой» границе в симметричном виде (21). Поскольку плотность не входит явно в запись граничных условий, то предположение о непрерывности ρ излишне и выводы сохраняют силу, когда ρ имеет конечный разрыв при $z = z_0$. Можно использовать запись граничных условий в виде равенств (21) и в тех случаях, когда первые производные λ, μ непрерывны, а более высокие производные разрывны.

ЛИТЕРАТУРА

1. I. Keller, F. Karnel. Elastic Wave Propagation in Homogeneous and Inhomogeneous and Inhomogeneous Media. JASA, 31, 6, 1959.
2. I. F. Hook. Separation of the Vector Wave Equation of Elasticity for Certain Types of Inhomogeneous, Isotropic Media. JASA, 33, 3, 1961.
3. W. M. Ewing, W. S. Iardetzky, F. Press. Elastic Waves in Layer Media, 1957.
4. R. Stoneley. The Transmission of Rayleigh Waves in a Heterogeneous Medium. Monthly Notices Roy. Astron. Soc. Geophys. Suppl., v. 3, 1934.
5. В. Ю. Завадский. Волны в упругой слоисто-неоднородной среде со степенным изменением плотности и параметров Ламе. Акуст. ж., 10, 1964, 1, 119—122.
6. Э. Камке. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Изд. ИЛ, М., 1951.
7. Н. В. Цепелев. Об отражении упругих волн в неоднородной упругой среде. Изв. АН СССР, сер. геофизич. 1, 1959.
8. Б. С. Чекин. Отражение и преломление сейсмических волн на слабой границе раздела. Изв. АН СССР, сер. геофизич., 1, 1959.
9. Г. Кольский. Волны напряжения в твердых телах, 1955.

Акустический институт АН СССР
Москва

Поступила в редакцию
20 марта 1964 г.