АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том X 1964 Вып. 3

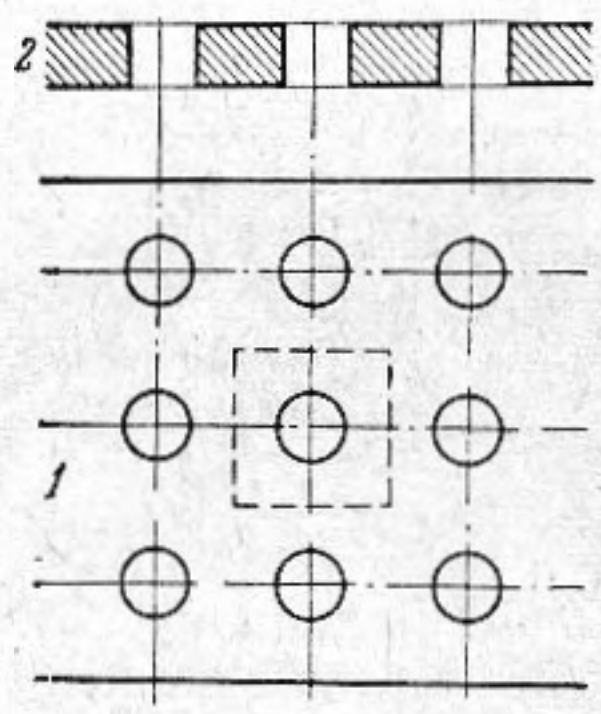
УДК 534.845

АКУСТИЧЕСКИЕ ПАРАМЕТРЫ ЛЕГКОГО ПОДВИЖНОГО ЭКРАНА С ОТВЕРСТИЯМИ

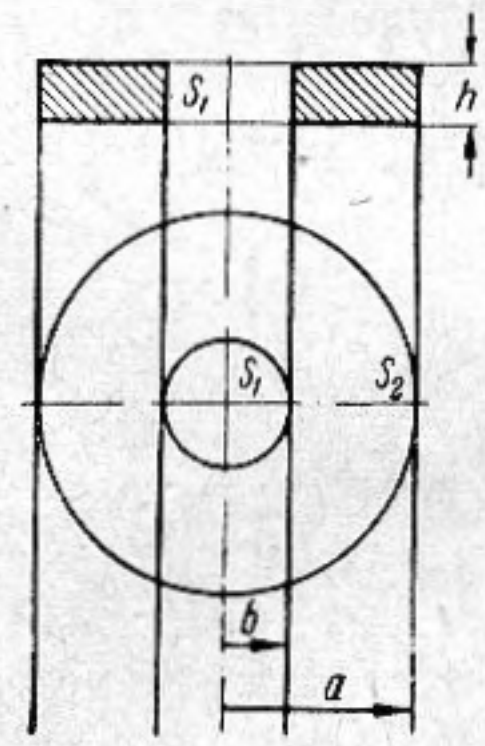
И. В. Лебедева, В. С. Нестеров

Рассчитаны сопротивление и инерционность системы, представляющей собой тонкий слой легкого материала с регулярно расположенными отверстиями при нормальном падении звука. Принято во внимание взаимодействие воздушной «пробки» в отверстии и легкого скелета, обладающего массой и упругостью. Полученные формулы проверены на образцах тканей и мелкоперфорированных пленок.

В архитектурной акустике в качестве звукопоглотителей часто употребляют ткань, которую в первом приближении можно считать тонким легким экраном, пронизанным большим количеством мелких отверстий (фиг. 1, где *1* — план, *2* — разрез). Вследствие малой массы и слабого натяжения ткань под действием падающей звуковой волны приходит в



Фиг. 1



Фиг. 2

движение. Если отверстия одинаковы и равномерно расположены, то при нормальном падении звука в силу симметрии можно выделить одно из отверстий и приходящийся на его долю участок экрана, образующий единичную ячейку, отмеченную на фиг. 1 штриховыми линиями. Для вычисления импеданца отдельной ячейки используем приемы, описанные в книге Крендалла [1] и в работе Нестерова [2] *. Заменим в пределах ячейки квадратный участок экрана равным ему по площади круглым (фиг. 2). Правомочность такой замены вытекает из работы [3]. Обозначим: a — ра-

* Задача о легком пористом экране была решена Г. Д. Малюжинцем в предположении справедливости закона Дарси — Пуазейля и без учета натяжения экрана [7]. Поэтому полученные им формулы справедливы в ограниченном диапазоне низких и средних звуковых частот. Для самых низких ($\omega \to 0$) и более высоких частот формулы Малюжинца теряют силу. Границы применимости к тканям результатов работы [7] могут быть оценены на основе нижеизложенных соображений.

диус ячейки, b — радиус отверстия, S, S_1, S_2 — площади ячейки, отверстия и экрана соответственно $S = S_1 + S_2$, h — толщина экрана, и введем цилиндрическую систему координат (z, r).

При малой толщине экрана воздух в пределах отверстия можно считать несжимаемым; тогда уравнение движения воздуха будет

$$\rho_1 \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial t^2} - \mu \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \xi_1}{\partial r}\right)\right] = -\frac{\partial p}{\partial z} e^{i\omega t}, \tag{1}$$

где $\xi_1(r)$ — вектор смещения частиц воздуха, ρ_1 и μ — плотность и коэффициент вязкости воздуха, ω — частота падающей волны, $\partial p / \partial z = \Delta p / h$ (Δp — разность звукового давления по обе стороны экрана). На границе отверстия смещения воздушной «пробки» и экрана равны, т. е. $\xi_1(r)|_{r=b} = \xi_2$, где ξ_2 — осевое смещение экрана. Скорость на оси отверстия конечна. Решение уравнения (1) при этих условиях имеет вид

$$\xi_1(r) = \frac{1}{\omega^2 \rho_1}\frac{\partial p}{\partial z} + \left(\xi_2 - \frac{1}{\omega^2 \rho_1}\frac{\partial p}{\partial z}\right)\frac{J_0(\gamma r)}{J_0(\gamma b)}, \tag{2}$$

где $\gamma = \sqrt{-i\omega\rho_1 / \mu}$ — волновое число вязких волн, J — символ функции Бесселя.

При синусоидальных колебаниях и учете упругости экрана и вязкости воздуха уравнение движения экрана будет

$$-\omega^2\left(m_2 - \frac{\varepsilon_2}{\omega^2}\right)\xi_2 = -S_2 h \frac{\partial p}{\partial z} + i2\omega\pi b\mu h\gamma\left(\xi_2 + \frac{1}{\omega^2\rho_1}\frac{\partial p}{\partial z}\right)\Psi, \tag{3}$$

где m_2, ε_2 — масса и упругость экрана в пределах ячейки и для сокращения введено обозначение $\Psi = J_1(\nu b) / J_0(\gamma b)$. Последний член в формуле (3) представляет собой вязкую силу, действующую со стороны воздушной пробки на экран. Потери в материале экрана в формуле (3) не учтены. Из уравнения (3) находим

$$\xi_2 = h\frac{\partial p}{\partial z}\frac{S_2 + (2\pi b / \gamma)\Psi}{\omega^2[m_2 - (\varepsilon_2 / \omega^2) + (2\pi b h \rho_1 / \gamma)\Psi]}. \tag{4}$$

Объемный поток по всему сечению ячейки равен

$$V = S_2\dot{\xi}_2 + 2\pi\int_0^b \dot{\xi}_1(r) r\, dr.$$

Подставив сюда выражения для $\dot{\xi}_1$ и $\dot{\xi}_2$ и проинтегрировав, получим

$$V = \frac{ih}{\omega}\frac{\partial p}{\partial z}\left[\frac{(S_2 + (2\pi b / \gamma)\Psi)^2}{m_2 - (\varepsilon_2/\omega^2) + (2\pi b h \rho_1/\gamma)\Psi} + \frac{S_1 - (2\pi b / \gamma)\Psi}{\rho_1 h}\right]. \tag{5}$$

На основании выражения (5) находим удельный импеданц на единицу толщины слоя

$$Z = \frac{i\omega S\rho_1[m_2 - (\varepsilon_2 / \omega^2) + (2\pi b h \rho_1 / \gamma)\Psi]}{\rho_1 h[S_2 + (2\pi b/\gamma)\Psi^2 + [m_2 - (\varepsilon_2/\omega^2) + (2\pi b h \rho_1/\gamma)\Psi][S_1 - (2\pi b/\gamma)\Psi]} \tag{6}$$

На частоте $\omega_0 = \sqrt{\varepsilon_2 / m_2}$ экран резонирует. Для тканей (даже натянутых) собственная частота весьма низка — порядка 10 *гц*. При $\omega \gg \omega_0$ упругостью экрана можно пренебречь и из выражения (6) получим выражение для комплексной плотности системы «экран + воздух в отверстиях»

$$\bar{\rho} = S\rho_1 \frac{S_2\rho_2 + S_1\rho_1(2\Psi / \gamma b)}{S_2(S_1\rho_2 + S_2\rho_1) + S_1(S_1\rho_1 - S_2\rho_2 + 2S_2\rho_1)(2\Psi / \gamma b)}, \tag{7}$$

где ρ_2 — плотность материала экрана, поэтому $m_2 = \rho_2 S_2 h$. Комплексная величина $2\Psi / \gamma b$ определяет частотную зависимость плотности и активные потери, обусловленные вязкими силами.

Выражение для $\bar{\rho}$ можно представить в виде $\rho = \rho' - i\rho''$, причем вещественная часть ρ' характеризует инерционность, а мнимая ρ'' — активные потери, возникающие из-за вязкости воздуха в отверстии при наличии относительного движения воздуха и экрана.

Для характеристики активных потерь в теории пористых материалов употребляется так называемое «сопротивление продуванию» r *мех · ом/см*^{3}. Между величиной ρ'' и r существует зависимость: $\rho'' = r / \omega$. Поэтому, исследовав теоретически поведение ρ'' в функции частоты, геометрических размеров и плотности материала экрана, можно получить представление о зависимости r от тех же величин.

Произведя очевидные преобразования в формуле (7) и выразив $2\Psi / \gamma b$ в виде $2\Psi / \gamma b = A + iB$, получим

$$\rho' = \Delta_1 \frac{\Delta_2\Delta_4 + A(\Delta_2\Delta_5 + \Delta_3\Delta_4) + (A^2 + B^2)\Delta_3\Delta_5}{(\Delta_4 + A\Delta_5)^2 + B^2\Delta_5^2},$$

$$\rho'' = B\Delta_1 \frac{\Delta_2\Delta_5 - \Delta_3\Delta_4}{(\Delta_4 + A\Delta_5)^2 + B^2\Delta_5^2}, \tag{8}$$

где

$$\Delta_1 = S\rho_1, \quad \Delta_2 = S_2\rho_2, \quad \Delta_3 = S_1\rho_1, \quad \Delta_4 = S_2(S_1\rho_2 + S_2\rho_1),$$

$$\Delta_5 = S_1(S_1\rho_1 - S_2\rho_2 + 2S_2\rho_1).$$

Частотная зависимость компонент плотности (8) может быть вычислена при помощи таблиц функций *ber* и *bei*. В предельных случаях низких и высоких частот, когда диаметр отверстий значительно меньше или больше длины вязкой волны, выражения для ρ' и ρ'' сильно упрощаются.

1. Пусть $|\gamma b| \ll 1$ (низкие частоты, узкие отверстия). Разлагая цилиндрические функции в ряды и ограничиваясь членами низших порядков (до 4-го), получим

$$2\Psi / \gamma b = 1 - i(\omega\rho_1 / 8\mu) b^2. \tag{9}$$

Подставляя $A = 1$, $B = -\omega\rho_1 / 8\mu b^2$ в формулу (8) и произведя необходимые преобразования, находим выражение для эффективной плотности на низких частотах

$$\bar{\rho}_{\text{н. ч}} = \frac{S_1\rho_1 + S_2\rho_2}{S} - i\,\frac{1}{8}\,\frac{\omega b^2}{\mu}\,\frac{S_1 S_2^2(\rho_2 - \rho_1)^2}{S^3}, \tag{10}$$

при этом

$$r_{\text{н. ч}} = 1 / 8(\omega^2 b^2 / \mu)\,[S_1 S_2^2(\rho_2 - \rho_1)^2 S^3].$$

Таким образом, на низких частотах за счет действия вязких сил воздушная пробка и экран движутся почти как одно целое, причем их массы складываются арифметически. Вследствие существования очень небольшого относительного движения воздушных слоев, составляющих пробку, динамическая плотность при этом имеет весьма малую мнимую компоненту, пропорциональную частоте. Формулы справедливы при выполнении условия $\omega \gg \omega_0$.

2. Пусть теперь $|\gamma b| > 10$ (высокие частоты, широкие отверстия). Тогда $2\Psi / \gamma b = \sqrt{2\mu / \omega\rho_1 b^2}\,(1 - i)$, $A = -B = \sqrt{2\mu / \omega\rho_1 b^2}$. Отсюда мы получаем

$$\bar{\rho}_{\text{в. ч}} = \frac{S\rho_1\rho_2}{S_1\rho_2 + S_2\rho_1} - i\sqrt{\frac{2\mu}{\omega\rho_1 b^2}}\,\frac{S_1\rho_1 S(\rho_2 - \rho_1)^2}{(S_1\rho_2 + S_2\rho_1)^2},$$

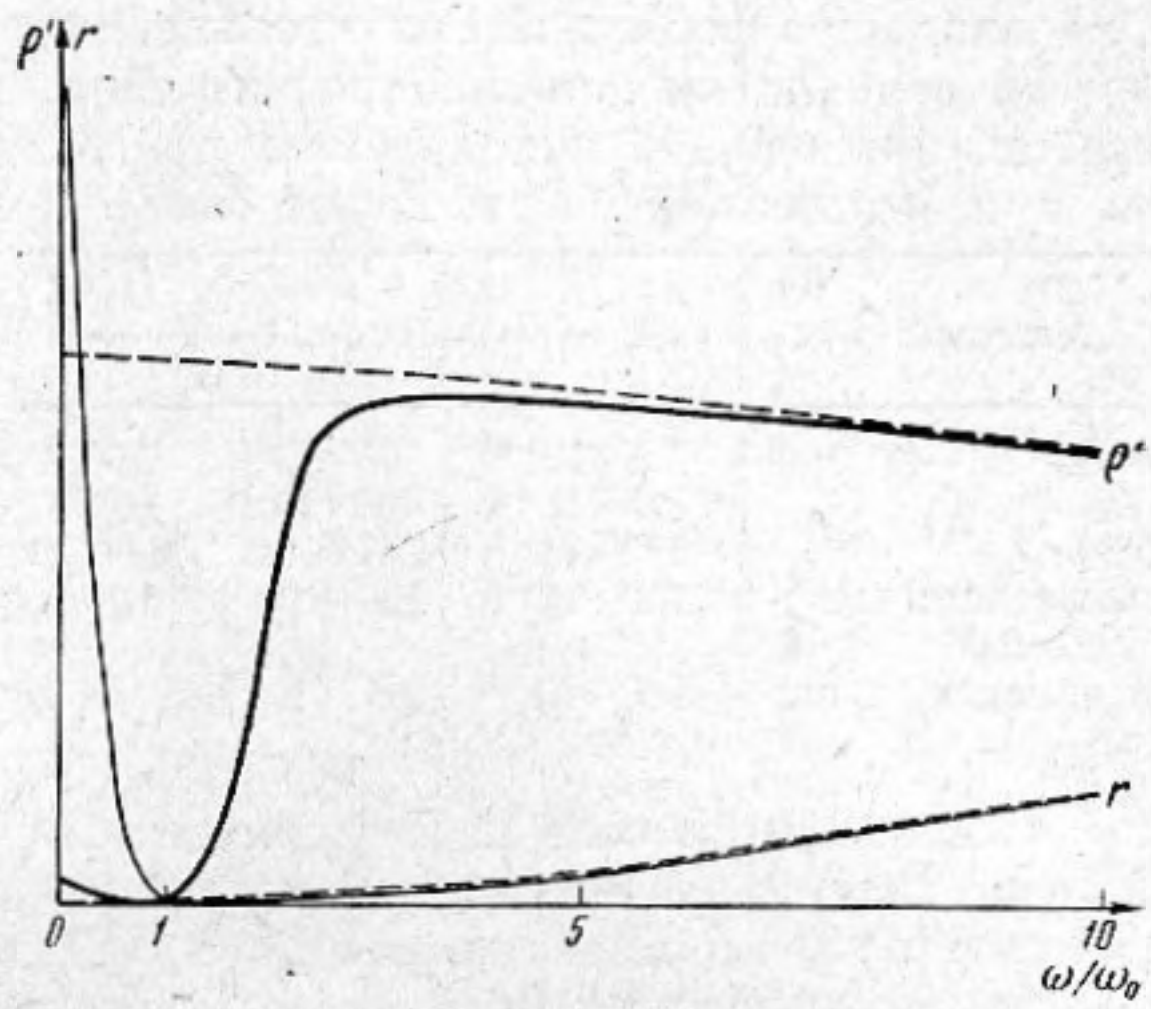
$$r_{\text{в. ч}} = \sqrt{2\mu\omega / \rho_1} b^2 [S_1\rho_1 S(\rho_2 - \rho_1)^2 / (S_1\rho_2 + S_2\rho_1)^2]. \qquad (11)$$

В этом случае воздушная пробка и экран движутся практически независимо друг от друга, и общая масса получается путем сложения обратных масс с учетом акустической трансформации масс с площадей S_1 и S_2 на S.

Поскольку для ткани и воздуха $\rho_2 \gg \rho_1$, по формулам (10) и (11) можно произвести оценку предельных значений плотности на низких (но таких, что $\omega \gg \omega_0$) и высоких частотах

$$S'_{\text{н. ч}} \simeq \rho_2(1 - P), \qquad (12)$$
$$\rho'_{\text{в. ч}} \simeq \rho_1 / P,$$

где P — коэффициент перфорации.



Фиг. 3

В промежуточной области плотность быстро уменьшается с частотой, причем разница между низко- и высокочастотной плотностью достигает очень большой величины. Одновременно изменяется сопротивление r: в области низких частот оно пропорционально ω^2, а при значительном повышении частоты сопротивление становится пропорциональным $\sqrt{\omega}$.

На самых низких частотах формула (10) теряет силу. В диапазоне от $\omega = 0$ до частот, немного превышающих ω_0, в выражении для импеданца единицы объема нужно учитывать упругость экрана по формуле (6).

На резонансной частоте экрана ρ' и r имеют весьма малые значения, выражаемые формулами:

$$\rho'_{\omega=\omega_0} = \rho_1 P, \quad r_{\omega=\omega_0} = (0{,}125)(\omega^2\rho_1^2 b^2 / \mu)(S_1 S_2^2 / S^3). \qquad (13)$$

Минимальные значения плотности и сопротивления достигаются на частотах $\omega_{\min}$, несколько отличных от резонансной частоты экрана ω_0. Для ρ'

$$\omega_{\min} = \sqrt{\varepsilon_2 / (m_2 + m_1)}$$

и для r

$$\omega_{\min} = \sqrt{\varepsilon_2 / m_2 - (S_2 / S_1) m_1}.$$

При $\omega \to 0$ упругость экрана начинает играть преобладающую роль. Учитывая в разложении цилиндрических функций члены более высокого порядка, из формулы (6) получим

$$\rho'_{\omega=0} = (4/3)\rho_1 / P, \qquad r_{\omega=0} = 8\mu / Pb^2. \qquad (14)$$

Формулы (14) идентичны формулам, выведенным для трубы с неподвижными стенками ([1], стр. 159, формула (J)), причем выражение для активного сопротивления совпадает с известным результатом, вытекающим из закона Пуазейля для стационарного потока.

Ход кривых плотности и сопротивления в диапазоне низких частот, начиная с $\omega = 0$, для тонкого экрана показан сплошными линиями на фиг. 3. Для сравнения здесь же штриховыми линиями показаны ρ' и r для этого экрана, вычисленные без учета его упругости. В области низ-

ких частот кривые для упруго-инерционного и чисто инерционного экранов резко различны, однако выше собственной частоты ω_0, как, впрочем, и следовало ожидать, роль собственной упругости экрана становится ничтожной. Поэтому кривые ρ' и r могут рассчитываться по формулам для чисто инерционного экрана.

Если предположить, что $\rho_2 \gg \rho_1$, то на высоких частотах получим в пределе

$$r_{\text{в. ч}} \simeq \sqrt{2\mu\omega\rho_1}(1 / Pb), \tag{15}$$

что совпадает с формулой Гельмгольца.

При решении задачи не принято во внимание сужение потока в отверстии, приводящее к появлению присоединенной массы. Оценка влияния присоединенной массы может быть сделана согласно работе [4]. При

Материал	S, *см*^{2}	S_1, *см*^{2}	b, *см*	h, *см*	ρ_2, *г/см*^{3}	P, %	χ
Сатин	$755 \cdot 10^{-6}$	$65 \cdot 10^{-6}$	$4{,}5 \cdot 10^{-3}$	$25 \cdot 10^{-3}$	0,595	8,6	0,17
Бязь	$1575 \cdot 10^{-6}$	$65 \cdot 10^{-6}$	$4{,}5 \cdot 10^{-3}$	$23 \cdot 10^{-3}$	0,621	4,1	0,22
Ситец	$1575 \cdot 10^{-6}$	$150 \cdot 10^{-6}$	$6{,}9 \cdot 10^{-3}$	$16 \cdot 10^{-3}$	0,662	9,5	0,40
Стеклоткань марки Э-0,06	$2750 \cdot 10^{-6}$	$120 \cdot 10^{-6}$	$6{,}2 \cdot 10^{-3}$	$6 \cdot 10^{-3}$	1,168	4,4	1,14
Лавсановая пленка	$4900 \cdot 10^{-6}$	$180 \cdot 10^{-6}$	$7{,}6 \cdot 10^{-3}$	$7 \cdot 10^{-3}$	1,542	3,7	1,14

этом существенную роль играет относительная величина концевой поправки δh по сравнению с толщиной экрана h, т. е. параметр $\chi = \delta h / h$. У наших материалов χ имеет значение от 0,17 до 1,14 (см. таблицу).

Задача о присоединенной массе отверстия, находящегося в движущемся экране, решена Ржевкиным [5], причем было предположено поршневое движение воздуха в отверстии. В этом случае присоединенная масса обладает кинетической энергией, которая пропорциональна относительной скорости движения $\xi_1 - \xi_2$ воздушной пробки и экрана.

Поскольку на низких частотах воздушная пробка и экран движутся почти как одно целое, доля инерционного сопротивления, вносимая присоединенной массой, будет ничтожно малой. Наоборот, на высоких частотах, когда экран в силу своей большой массы находится приблизительно в покое ($\xi_2 = 0$), поправка составляет более заметную величину.

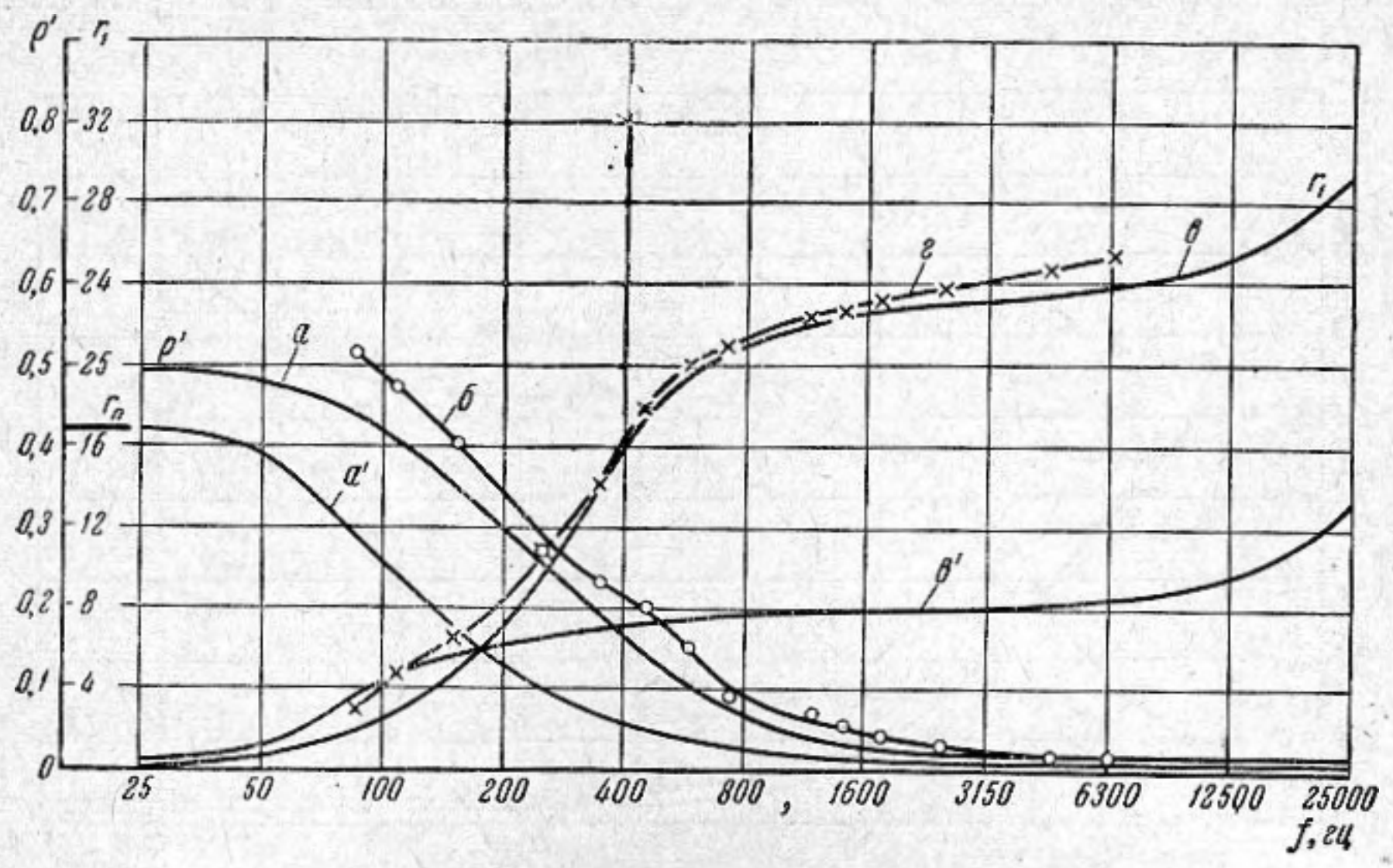
Изложенные теоретические соображения были проверены путем измерения импеданца слоя ткани методом акустического интерферометра при нормальном падении звуковых волн. Ткань помещалась на некотором расстоянии от твердого дна трубы. На резонансной частоте системы «воздушный слой + ткань» упругая компонента импеданца, обусловленная слоем воздуха, компенсирует инерционное сопротивление экрана. Изменяя глубину воздушного промежутка, находим эффективную плотность и потери в ткани на разных частотах. Для расширения диапазона частот измерения производились на трех интерферометрах с диаметрами 25, 12, 2,3 *см*.

Геометрические параметры определялись сначала под микроскопом. Следует отметить, что структура реальных тканей значительно отличается от теоретической схемы, так как отверстия образуются переплетенными нитями и не имеют правильной формы. Наибольшую трудность представляет определение эквивалентного радиуса отверстия и толщины ткани. Размеры ячейки определяются точнее. Так как активное сопротивление сильно зависит от размера отверстий, то был опробован косвенный метод более точного определения эффективного радиуса. Для этого использовались значения сопротивления продуванию постоянному потоку $r_{\text{п}}$, измеренные на известной установке, описанной в работе [6], и по формуле Пуазейля определялся эффективный радиус отверстий

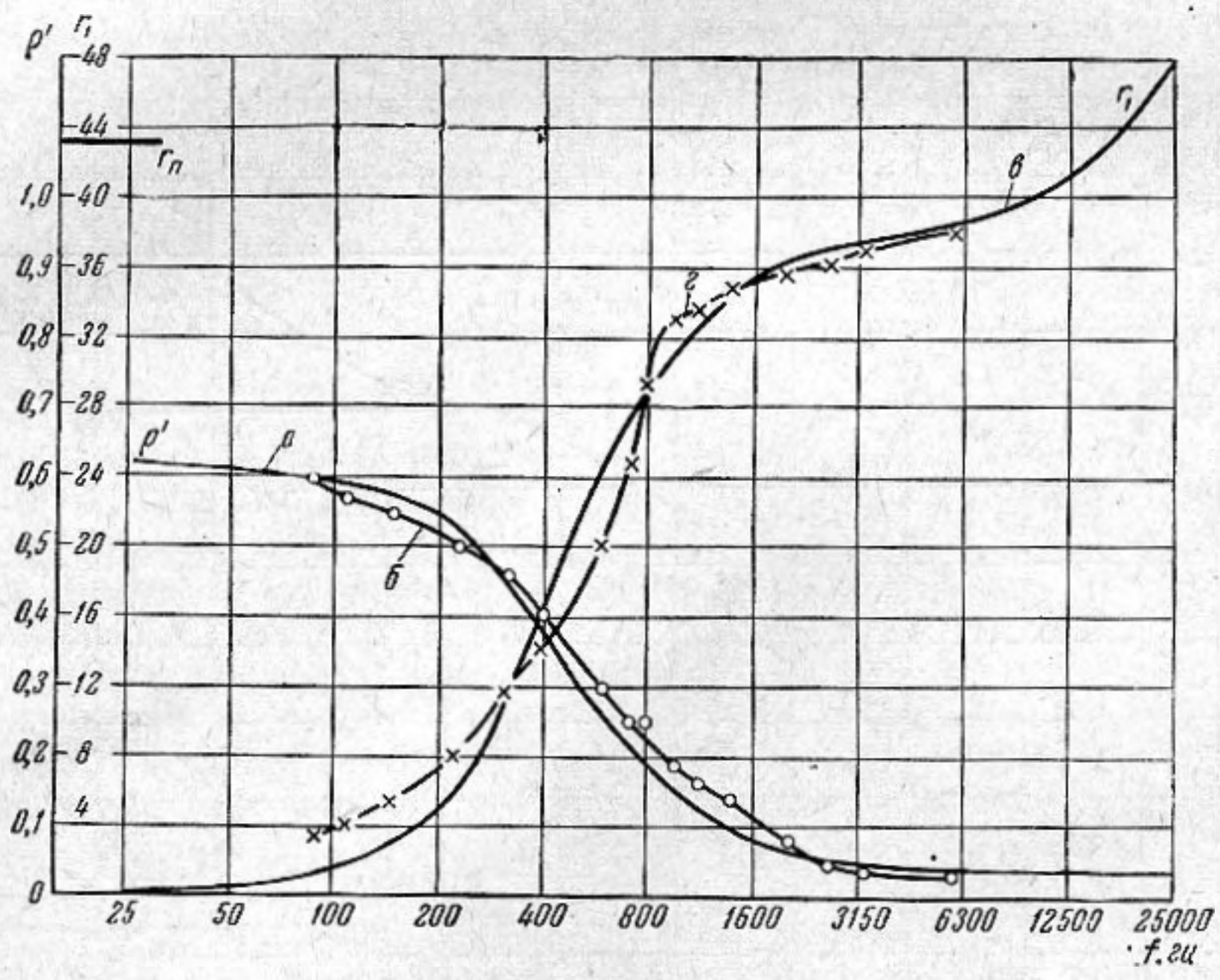
$$b = \sqrt[4]{8\mu S / \pi r_{\text{п}}}, \tag{16}$$

который в дальнейшем использовался в расчетах.

Кроме того, была предпринята попытка изготовить образцы с более правильной структурой. Для этого лавсановая пленка толщиной 25 и 70 μ перфорировалась при помощи игольчатого штампа. Однако при прокалывании пленки получаются воронкообразные отверстия с рваными краями.



Фиг. 4

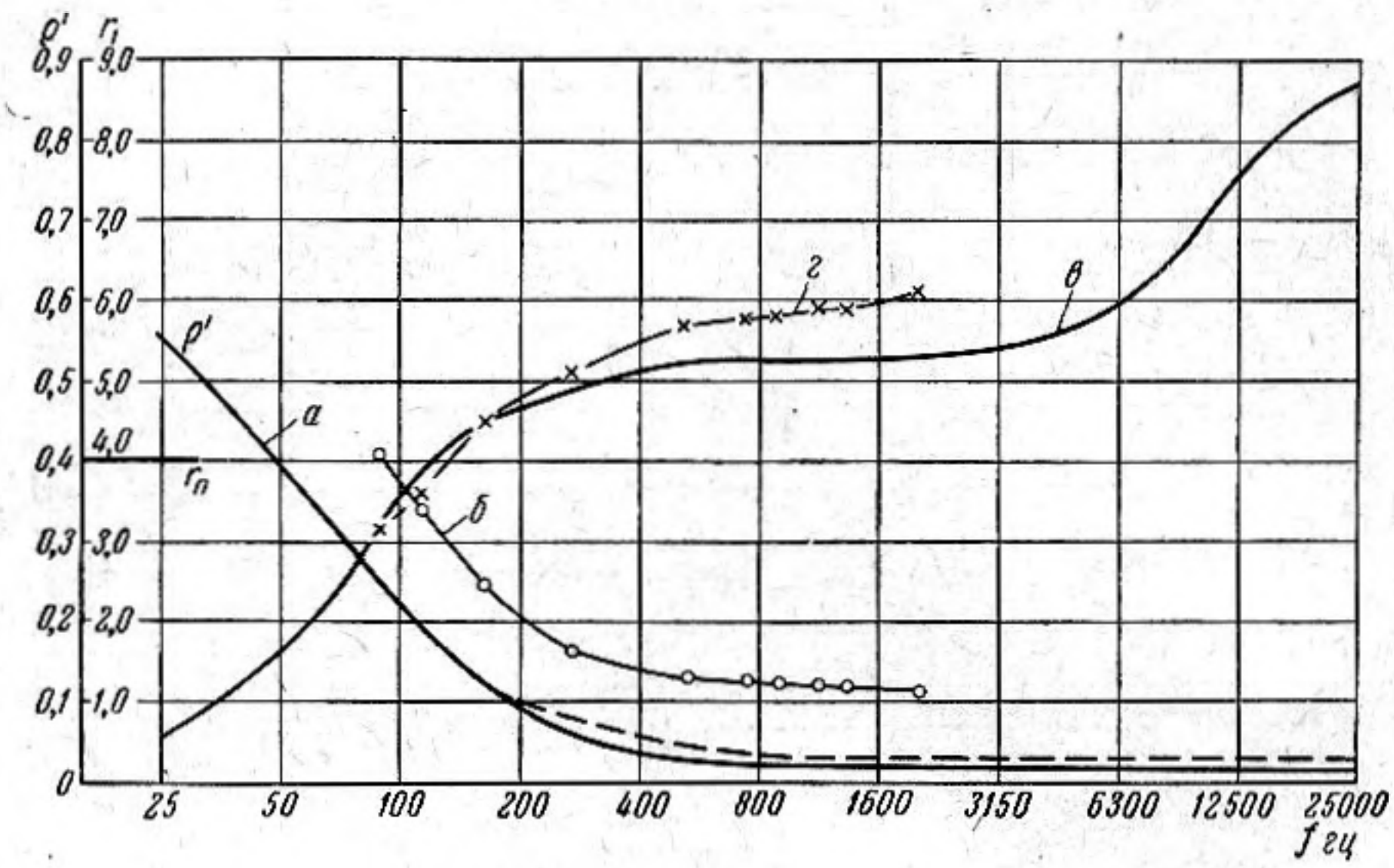


Фиг. 5

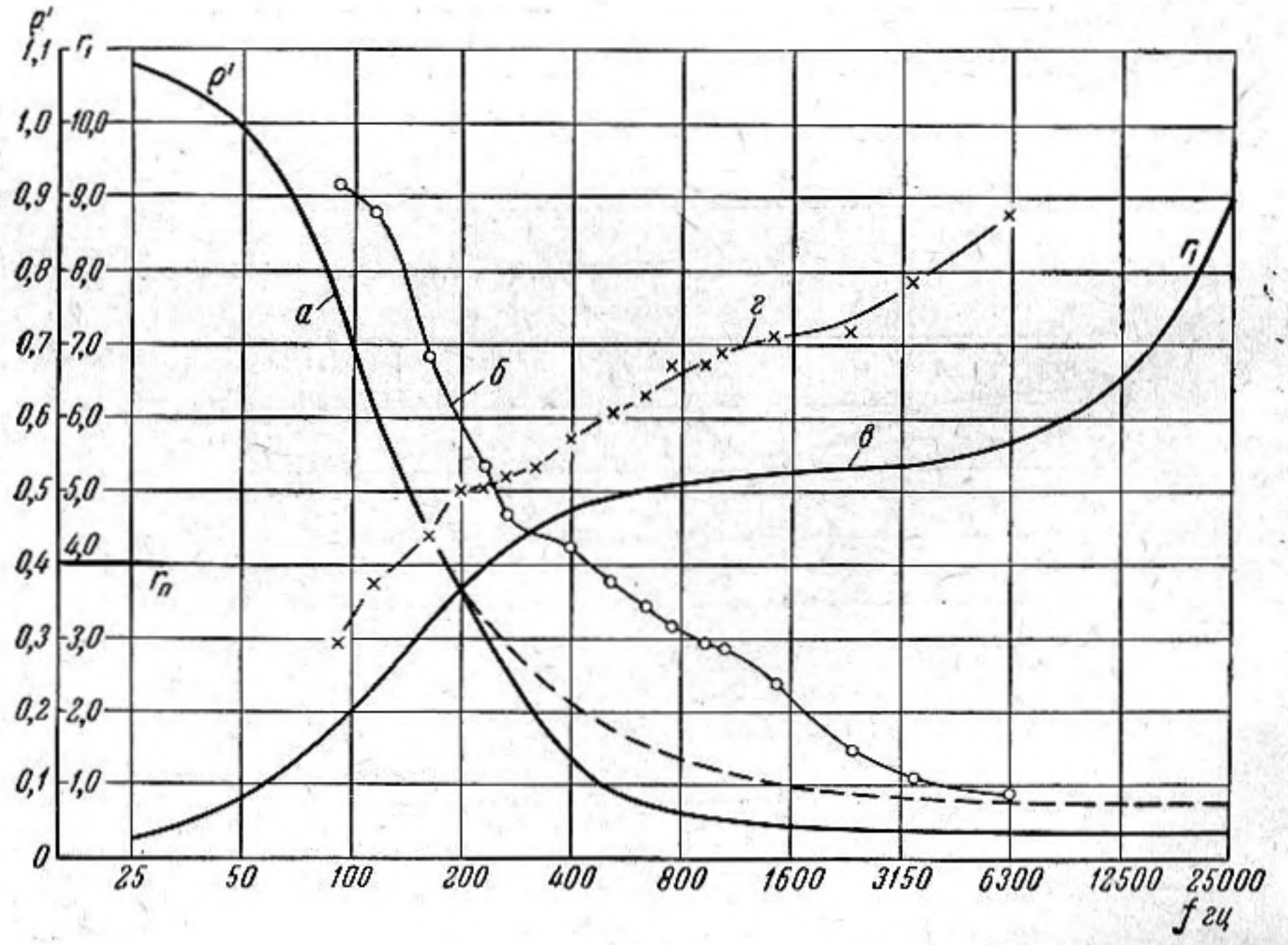
Поэтому геометрические параметры таких образцов также определяются недостаточно надежно.

В таблице приведены параметры некоторых изученных материалов; точность определения геометрических параметров составляет 10—15%. Размеры отверстий у всех тканей таковы, что во всей области звуковых частот $0{,}1 < |\gamma b| < 10$. Поэтому теоретический расчет производился по полным формулам (8). На фиг. 4—8 приведены графики зависимости

эффективной плотности материала ρ' *г/см*^{3} (*а* — теоретическая кривая, *б* — экспериментальные значения) и сопротивления материала данной толщины $r_1 = rh$ *мех · ом/см*^{2} (*в* — теоретическая кривая, *г* — экспериментальные значения) от частоты. Для сравнения на оси ординат отмечены измеренные значения сопротивления продуванию $r_п$ *мех · ом/см*^{2}.



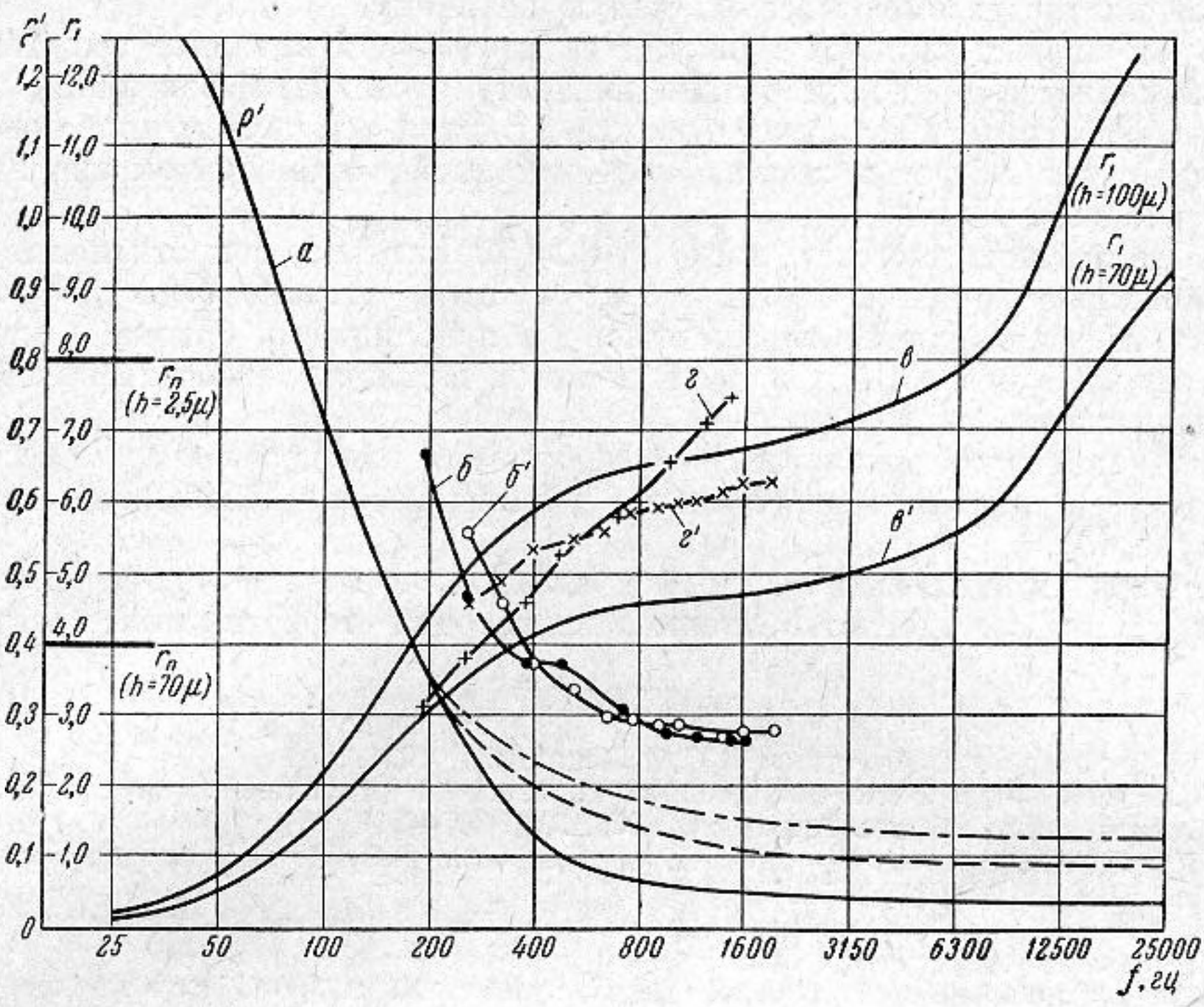
Фиг. 6



Фиг. 7

Кривые *а'* и *в'* на фиг. 4 рассчитаны для параметров сатина, определенных с помощью микроскопа, а кривые *а* и *в* для того значения радиуса отверстий *в*, которое было найдено по формуле (16). Экспериментальные точки лучше совпадают с кривыми *а* и *в*. Наиболее хорошее совпадение опыта и теории получено для бязи (фиг. 5). На фиг. 6 приведены данные для ситца: экспериментальные значения r_1 весьма близки к теоретически

рассчитанным, значения ρ' совпадают качественно, по характеру хода кривых. Так как для ситца $\chi = 0{,}4$, на высоких частотах необходимо вводить поправку на присоединенную массу. Исправленные кривые для ρ' нанесены на графиках пунктирными линиями. Для ситца (фиг. 6) эта поправка изменяет ход кривой несущественно. Более заметную величину она составляет у стеклоткани марки Э-0,06 ($\chi = 1{,}4$, фиг. 7). Потери в стеклоткани превышают расчетные данные сильнее, чем у других мате-



Фиг. 8

риалов. Здесь могут играть роль дополнительные потери в системе тонких волокон, из которых состоят нити ткани.

Как мы указывали, параметры перфорированных пленок определяются с наименьшей точностью. На графике фиг. 8 приведены экспериментальные кривые для лавсановых пленок толщиной 25 μ (ρ' — кривая *б*, r_1 — кривая *г*) и 70 μ (ρ' — кривая *б'*, r_1 — кривая *г'*). Оба образца перфорировались одним и тем же штампом, но у более тонкой пленки выдавленная «воронка» имеет бо́льшую высоту и более правильную форму. Можно считать, что длина канала у этой пленки становится приблизительно 100 μ. Как видно из графика, удельные эффективные плотности у обоих образцов близки друг к другу, однако отличаются от теоретически рассчитанной. Поправка на присоединенную массу (для $h = 70$ μ, $\chi = 1{,}14$) уменьшает расхождение кривых. Так как на высоких частотах основной вклад в эффективную плотность дает масса воздуха в отверстии, вторая поправка на высоких частотах появляется за счет удлинения канала — «воронки» (штрих-пунктирная линия на фиг. 8). Наличие большой воронки у тонкой пленки искажает ход кривой сопротивления и дает большой подъем на высоких частотах.

Выводы

1. В случае легкого подвижного экрана с отверстиями, например ткани, сопротивление постоянному потоку не может быть непосредственно использовано для описания активных потерь в широкой области частот.

Активное сопротивление и эффективная плотность такого экрана сильно зависят от частоты.

2. В области самых низких частот, удовлетворяющих неравенствам $\omega \ll \omega_0$ и $|\gamma b| \ll 1$, активное сопротивление определяется по формуле Пуазейля, а плотность на $^1/_3$ превышает плотность воздуха в отверстиях, пересчитанную с площади отверстий на общую площадь ткани.

3. На собственной частоте экрана активное сопротивление и эффективная плотность имеют весьма малую величину.

4. На низких частотах при $\omega \gg \omega_0$ и $|\gamma b| \ll 1$ активное сопротивление изменяется пропорционально квадрату частоты, эффективная плотность равна сумме плотностей воздуха и экрана и в первом приближении совпадает с плотностью экрана, пересчитанной с площади экрана на общую площадь ткани.

5. На высоких частотах, когда $|\gamma b| > 10$, активное сопротивление пропорционально корню квадратному из частоты согласно формуле Гельмгольца, эффективная плотность в первом приближении близка к плотности воздуха в отверстиях, пересчитанной с площади отверстий на общую площадь ткани.

6. Активное сопротивление и эффективная плотность в весьма широкой области промежуточных частот должны рассчитываться по точной формуле (8).

7. Эксперимент, выполненный с тканями и тонкими перфорированными пленками, удовлетворительно подтвердил теоретические расчеты.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. Б. Крендалл. Акустика, ВЭТА, Ленинград, 1934.
2. В. С. Нестеров. Вязко-инерционная дисперсия и затухание звука в суспензии высокой концентрации. Акуст. ж., 1959, 5, 3, 337—344.
3. U. Ingard. On the theory and design of acoustic resonators. J. Acoust. Soc. America, 1953, 25, 6, 1037—1067.
4. В. С. Нестеров. Резонансные звукопоглощающие системы (канд. диссертация). Физический институт АН СССР, 1943.
5. K. M. Iwanov-Schitz, C. N. Rschevkin, K. A. Welischanina. Über die Wirkung des Schallabsorbers der eine schwingenbe. Oberfläche bedect auf die Schallabstrahlung. Acustica, 1963, 13, 6, 403—406.
6. С. Н. Ржевкин, С. С. Туманский. К вопросу об измерении коэффициента трения воздуха в пористых материалах в постоянном потоке и при звуковых колебаниях. Ж. техн. физ., 1947, 17, 6, 681—691.
7. Г. Д. Малюжинец. Слоистые звукопоглощающие конструкции. Инф.-тех. бюллетень СДС, 1941, 5—6, 32—43.

Кафедра акустики
Московского государственного университета

Поступила в редакцию
5 июля 1963 г.