АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XI 1965 Вып. 1

УДК 534.26

ДИФРАКЦИЯ ВОЛН НА СИНУСОИДАЛЬНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

И. А. Урусовский

На основе полученного ранее общего решения задачи дифракции гармонических волн на произвольной периодической поверхности рассматривается дифракция волн на неровной поверхности синусоидальной формы. Исследуются коэффициенты системы алгебраических уравнений, к которой сводится задача и приводится представление этих коэффициентов в виде ряда по элементарным функциям. Излагается метод решения этой системы, удобный, в частности, для пологой поверхности, когда на периоде неровностей укладывается много длин волн. Приводятся некоторые примеры и численные результаты.

В работе [1] задача о дифракции волн на периодически неровной поверхности была сведена к решению системы алгебраических уравнений с коэффициентами, представленными в виде некоторых двойных интегралов. Здесь мы приведем эти коэффициенты к удобному для расчета виду для случая синусоидальной поверхности, а также дадим некоторые численные результаты. Будем придерживаться обозначений, принятых в работе [1], а ссылки на формулы этой статьи отмечать дополнительным знаком 1.

Прежде всего, представим функции $\alpha_n(u)$, выражаемые по формуле (9.1) в виде ряда, члены которого — элементарные функции. Положим $\zeta(x) = a\cos qx$, где a — амплитуда неровностей поверхности. При этом входящая в формулу (4.1) функция r имеет вид

$$r = \sqrt{\tau^2 + 4a^2\sin^2(q\tau/2)\sin^2[q(x+\tau/2)]}.$$

Поскольку эта функция периодична по x при фиксированном τ, то и функции $H_0^{(1)}(kr)$, $H_1^{(1)}(kr)/(kr)$ также периодичны по x. Заменим в формуле (4.1) эти последние, а также функцию $\eta(x)/n_z(x)$ разложениями в ряды Фурье, умножим результат на $\exp(-inqx)$ и проинтегрируем по x в интервале $(0, d)$. Учитывая ортогональность функций $\exp(inqx)$, $\exp(imqx)$ на этом интервале при $m \neq n$, получим

$$K_n(\tau) = \frac{k}{2}\sum_l \eta_{n-l} v_l(\tau) +$$

$$+ i\frac{k^2 a}{4}[(e^{iq\tau} - 1 - iq\tau)w_{n-1}(\tau) + (e^{-iq\tau} - 1 + iq\tau)w_{n+1}(\tau)], \qquad (1)$$

где

$$v_l(\tau) = \frac{1}{d}\int_0^d H_0^{(1)}(kr)e^{-ilqx}dx, \qquad w_l(\tau) = \frac{1}{d}\int_0^d \frac{H_1^{(1)}(kr)}{kr}e^{-ilqx}dx, \qquad (2)$$

$$\eta_l = \frac{1}{d}\int_0^d [\eta(x)/n_z(x)]e^{-ilqx}dx.$$

В известном разложении [2]

$$(1+h)^{-\nu/2}H_\nu^{(1)}(z\sqrt{1+h})=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!}\left(\frac{hz}{2}\right)^m H_{\nu+m}^{(1)}(z), \tag{3}$$

абсолютно сходящемся при $|h|<1$, положим $z=k|\tau|$ и $h=(2a/\tau)^2\times\times\sin^2(q\tau/2)\sin^2[q(x+\tau/2)]$, так что $z\sqrt{1+h}=kr$. Тогда для $\nu=0$ и $\nu=1$ формула (3) представит соответственно функции $H_0^{(1)}(kr)$ и $H_1^{(1)}(kr)/(kr)$ в виде рядов по степеням h. Подставляя эти ряды в формулу (2) и заменяя зависящий от x множитель в выражении для h^m согласно тождеству

$$\sin^{2m}\alpha=\frac{(2m)!}{2^{2m}}\sum_{n=-m}^{m}\frac{(-1)^n}{(m+n)!(m-n)!}e^{i2n\alpha} \tag{4}$$

при $\alpha=q(x+\tau/2)$, получим после интегрирования по x

$$v_{2l+1}(\tau)=w_{2l+1}(\tau)\equiv 0,$$

$$v_{2l}(\tau)=\sum_{m=|l|}^{\infty}c_{l,m}\sin^{2m}\frac{q\tau}{2}\cdot(k|\tau|)^{-m}H_m^{(1)}(k|\tau|)e^{ilq\tau},$$

$$w_{2l}(\tau)=\sum_{m=|l|}^{\infty}c_{l,m}\sin^{2m}\frac{q\tau}{2}\cdot(k|\tau|)^{-m-1}H_{m+1}^{(1)}(k|\tau|)e^{ilq\tau},$$

где $c_{l,m}=(-1)^{m+l}(2m)!(ka)^{2m}/[2^m\cdot m!(m+l)!(m-l)!]$. Подставляя эти выражения и выражение (1) в формулу (9.1), находим

$$a_{2s}(u)=\sum_l\eta_{2(s-l)}V_l(u), \tag{5}$$

$$a_{2s+1}(u)=ika[W_s^+(u)-W_{s+1}^-(u)]+\sum_l\eta_{2(s-l)+1}V_l(u), \tag{6}$$

где

$$V_l(u)=\sum_{n=|l|}^{\infty}c_{l,n}\varkappa_n(u+lq),\qquad W_l^{\pm}(u)=\sum_{n=|l|}^{\infty}c_{l,n}\Big[p\mu_n(u+lq)-$$
$$-\lambda_n\Big(u+lq\pm\frac{q}{2}\Big)\Big],$$

$$\left.\begin{aligned}
\varkappa_n(u)&=\int_0^\infty H_n^{(1)}(z)\cdot z^{-n}\cdot\sin^{2n}(pz)\cdot\cos\frac{uz}{k}dz,\\
\lambda_n\Big(u+\frac{q}{2}\Big)&=\int_0^\infty H_{n+1}^{(1)}(z)\cdot z^{-n-1}\cdot\sin^{2n+1}(pz)\cdot\sin\Big(\frac{uz}{k}+pr\Big)dz,\\
\mu_n(u)&=\int_0^\infty H_{n+1}^{(1)}(z)\cdot z^{-n}\cdot\sin^{2n}(pz)\cdot\sin\frac{uz}{k}dz,\qquad p=\frac{q}{2k}
\end{aligned}\right\}. \tag{7}$$

Заметим, что функции μ_n, $\varkappa_n$ связаны с функциями λ_{n-1} соотношениями

$$\left.\begin{aligned}
\mu_n(u)&=\frac{u}{k}\varkappa_n(u)+np\Big[\lambda_{n-1}\Big(u+\frac{q}{2}\Big)+\lambda_{n-1}\Big(u-\frac{q}{2}\Big)\Big],\\
\varkappa_n(u)&=\frac{1}{2}\Big[\lambda_{n-1}\Big(u+\frac{q}{2}\Big)-\lambda_{n-1}\Big(u-\frac{q}{2}\Big)\Big],
\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

которые легко получить, интегрируя по частям и проводя простые тригонометрические преобразования подынтегральных функций в выражении (7). Этими формулами удобно пользоваться для численных расчетов при $n \geqslant 1$.

Правые части в формуле (7) можно вычислить, воспользовавшись известными значениями интегралов Сонина — Гегенбауэра [2] вида

$$\int_0^\infty z(z^2+h^2)^{-(\nu+1)/2}\sin(vz)\cdot H_{\nu+1}^{(1)}(\sqrt{z^2+h^2})\,dz =$$

$$=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,v\left(\frac{\sqrt{1-v^2}}{h}\right)^{\nu-1/2} H_{\nu-1/2}^{(1)}(h\sqrt{1-v^2}),$$

$$\int_0^\infty (z^2+h^2)^{-\nu/2}\cdot\cos(vz)\cdot H_\nu^{(1)}(\sqrt{z^2+h^2})\,dz =$$

$$=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sqrt{1-v^2}}{h}\right)^{\nu-1/2} H_{\nu-1/2}^{(1)}(h\sqrt{1-v^2}),$$

где $\operatorname{Re}\nu > -1/2$, $h > 0$; $\operatorname{Re}, \operatorname{Im}\sqrt{1-v^2} \geqslant 0$. Заменяя в формуле (7) функцию $\sin^{2n} pz$ разложениями вида (4) и представляя правые части формулы (7) как линейную комбинацию интегралов Сонина — Гегенбауэра при $h \to 0$, получим

$$\varkappa_n(u) = \frac{n!}{2^n}\sum_{m=-n}^{n}\frac{(-1)^m}{(n+m)!\,(n-m)!}\left[1-\left(\frac{u}{k}+2mp\right)^2\right]^{n-1/2},$$

$$\lambda_n\left(u+\frac{q}{2}\right) = \frac{n!}{2^{n+1}}\sum_{m=-n}^{n+1}\frac{(-1)^m}{(n+m)!\,(n+1-m)!}\left[1-\left(\frac{u}{k}+2mp\right)^2\right]^{n+1/2},$$

$$\mu_n(u) = \frac{n!}{2^n}\sum_{m=-n}^{n}\frac{(-1)^m}{(n+m)!\,(n-m)!}\left(\frac{u}{k}+2mp\right)\left[1-\left(\frac{u}{k}+2mp\right)^2\right]^{n-1/2}.$$

Подставив полученные выражения в формулы (5) и (6), мы приходим к искомому разложению функций $\alpha_n(u)$ в ряд по элементарным функциям. Ограничиваясь ради краткости записи формул случаем однородной поверхности, когда $\eta_n = 0$ при $n \neq 0$, группируя члены, содержащие одинаковые степени ka и учитывая соотношения (8), находим

$$\alpha_0(u) = \eta_0\left\{\frac{1}{\sqrt{1-v^2\gamma^2}} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!}{(n!)^2}\times\right.$$

$$\left.\times\left(\frac{ka}{2}\right)^{2n}[L_{n-1}(v)-L_{n-1}(v-1)]\right\}, \tag{9}$$

$$\alpha_{2s}(u) = \eta_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n+2s-1)!}{n!\,(n+2s)!}\times$$

$$\times\left(\frac{ka}{2}\right)^{2(n+s)}[L_{n+s-1}(v+s)-L_{n+s-1}(v+s-1)] \tag{10}$$

при $s = 1, 2, 3, \ldots$

$$a_{2s+1}(u) = i\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n+2s)!}{(n+2s)!n!}\left(\frac{ka}{2}\right)^{2n+2s+1}\times$$

$$\times\left[N_{n+s}(v+s)-\frac{n}{n+2s+1}N_{n+s}(-v-s-1)\right] \qquad (11)$$

при $s = 0, 1, 2, 3, \ldots$ Здесь приняты следующие обозначения:

$$L_n(v) = \sum_{m=0}^{n}\frac{(-1)^m}{(n+m+1)!(n-m)!}\times$$

$$\times\{[1-(v-m)^2\gamma^2]^{n+1/2}-[1-(v+m+1)^2\gamma^2]^{n+1/2}\}, \qquad (12)$$

$$v = u/q, \qquad \gamma = q/k, \qquad (\mathrm{Re},\ \mathrm{Im}\sqrt{1-v^2\gamma^2}) \geqslant 0,$$

$$N_n(v) = (\gamma^2/2)M_n(v) - L_n(v), \qquad (13)$$

$$M_0(v) = 2v/\sqrt{1-v^2\gamma^2},$$

$$M_n(v) = \left(1+\frac{v}{n}\right)L_{n-1}(v)+\left(1-\frac{v}{n}\right)L_{n-1}(v-1). \qquad (14)$$

Из выражений (12) и (14) видно, что $L_n(-v) = -L_n(v-1)$, $M_n(-v) = -M_n(v)$. Значения функций $a_s(u)$ при $s < 0$ мы найдем по формулам (10), (11), исходя из тождества $a_s(u) \equiv a_{-s}(-u)$.

Функции $a_s(u)$ стремятся к нулю как при $s \to \pm\infty$, так и при $u \to \pm\infty$, причем, как видно из формул (9) — (14), чем положе рассеивающая поверхность, тем быстрее убывают $|a_s(u)|$ при возрастании $|s|$. Чтобы выяснить характер убывания $|a_s(u)|$ при $u \to \pm\infty$, рассмотрим поведение функций $L_n(v)$ при больших значениях аргумента. Воспользовавшись биномиальным разложением для выражений, содержащихся в фигурной скобке в выражении (12), находим, что при $(v-n)\gamma > 1$

$$L_n(v) = iS_n + i\sum_{m=0}^{n}\frac{(-1)^m(2n+1)!!}{(n+m+1)!(n-m)!}\sum_{k=1}^{\infty}|2k-3|!!l_{n,-k}(v, m), \qquad (15)$$

где

$$l_{n,k}(v, m) = [\gamma^{2k+1}2^{k-n}/(n-k)!][(v+m+1)^{2k+1}-(v-m)^{2k+1}], \qquad (16)$$

$$S_n = \sum_{m=0}^{n}\frac{(-1)^m(2n+1)!!}{(n+m+1)!(n-m)!}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)!!}l_{n,k}(v, m). \qquad (17)$$

Изменим в формуле (17) порядок суммирования и представим выражение (16) в виде биномиального разложения по степеням v. Тогда мы получим

$$S_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{n+k+1}(2n+1)!!\gamma^{2k+1}}{(n-k)!2^{n-k}(2k+1)!!}\sum_{l=0}^{2k+1}\frac{(2k+1)!\,v^{2k+1-l}}{l!(2k+1-l)!}s_{n,l}, \qquad (18)$$

где

$$s_{n,l} = \sum_{m=0}^{2n+1}(-1)^{m+1}(m-n)^l/[(2n+1-m)!m!].$$

Правую часть последней формулы можно записать в виде

$$s_{n,l} = [2^{2n+1-l}/(2n+1)!]\frac{d^l}{dx^l}(e^x\,\mathrm{sh}^{2n+1}x) \quad \text{при } x = 0, \qquad (19)$$

в чем легко убедиться, заменив $e^x \operatorname{sh}^{2n+1} x$ разложением по степеням e^x. Отсюда следует

$$s_{n,l} = 0 \text{ при } 0 \leqslant l \leqslant 2n, \quad s_{n,2n+1} = 1. \tag{20}$$

Подставляя эти результаты в формулу (18), получим $S_n = -\gamma^{2n+1}$. Таким образом, как видно из формулы (15), $L_n(v) \to -i\gamma^{2n+1}$ при $v \to \infty$, поскольку $l_{n,-k}(v, m) \to 0$ при $v \to \infty$, $k \geqslant 1$.

Представление функций $L_n(v)$ в виде ряда по обратным степеням v мы получим, заменив в правой части выражения (16) функции вида $(v+s)^{2k+1}$ их биномиальными разложениями и подставив результат в формулу (15). Проведя эти элементарные преобразования и учитывая (20), найдем

$$L_n(v) = -i\gamma^{2n+1} + i(-1)^n \frac{(2n+1)!!}{2^n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|2k-1|!!}{(n+k+1)!\,2^{k+1}\gamma^{2k+1}} \times$$

$$\times \sum_{l=2n+1}^{\infty} \frac{(2k+l)!\, s_{n,l}(-1)^l}{l!\,(2k)!\,v^{2k+1+l}}. \tag{21}$$

Опуская элементарные, но громоздкие выкладки, выпишем несколько первых не равных нулю коэффициентов $s_{n,l}$: $s_{n,2n+1} = 1$, $s_{n,2n+2} = n+1$, $s_{n,2n+3} = (n+1)(n+2)(2n+3)/6$, $s_{n,2n+4} = (2n+3)(n+2)(n+1)^2/6$. Подставляя эти значения в формулу (21) и группируя члены при одинаковых степенях v, получим

$$L_n(v) = -i\gamma^{2n+1} - i(-1)^n \frac{(2n+1)!!}{2^{n+1}\gamma(n+1)!\,v^{2n+2}} \Big\{ 1 - \frac{n+1}{v} +$$

$$+ \left[\frac{n+2}{3} + \frac{1}{(n+2)\gamma^2}\right] \frac{(2n+3)(n+1)}{2v^2} -$$

$$- \left[\frac{(n+2)(n+1)}{3} + \frac{1}{\gamma^2}\right] \frac{(2n+3)(n+1)}{2v^3} + \ldots \Big\}.$$

Учитывая соотношения (13), (14), найдем отсюда

$$N_0(v) = -\frac{i}{2\gamma|v^3|}\left[1 - \frac{1}{v} + \frac{1+3/(2\gamma^2)}{v^2} - \frac{1+5/(2\gamma^2)}{v^3} + \ldots\right],$$

$$N_1(v) = i\frac{3}{4\gamma|v^5|}\left[1 - \frac{5}{3v} + \ldots\right],$$

$$N_n(v) = i(-1)^{n+1} \frac{(2n+1)!!}{2^{n+1}\cdot n!\gamma|v^{2n+3}|}\left[1 + O\left(\frac{1}{v}\right)\right].$$

Подставляя найденные выражения в формулы (9)—(11), мы приходим к искомым асимптотическим представлениям:

$$\alpha_0(u) = (\eta_0/\sqrt{1-v^2\gamma^2}) - i\eta_0\left(\frac{ka}{2}\right)^2 \gamma^{-1}|v|^{-3}[1 + O(v^{-2})], \tag{22}$$

$$\alpha_{2s}(u) = i\eta_0(-1)^{s+1}\left(\frac{ka}{2}\right)^{2s} \frac{(2s-1)!!}{2^s\cdot s!\cdot\gamma|v^{2s+1}|}[1 + O(v^{-2})] \tag{23}$$

при $s \geqslant 1$,

$$\alpha_{2s+1}(u) = (-1)^s\left(\frac{ka}{2}\right)^{2s+1} \frac{(2s+1)!!}{2^{s+1}\cdot s!\cdot\gamma|v^{2s+3}|}[1 + O(v^{-1})] \tag{24}$$

при $s \geqslant 0$.

Формулы для функций $a_n(u)$, аналогичные формулам (9)—(11) и (22)—(24), легко получить из найденных выражений для $\alpha_n(u)$, учитывая, что $a_n(u) = \lim \alpha_n(u) / \eta_0$ при $|\eta_0| \to \infty$. Отсюда имеем $a_{2s+1}(u) \equiv 0$, а искомые выражения для $a_0(u)$, $a_{2s}(u)$ представляют собой частные от деления на η_0 соответственно правых частей формул (9), (22) и (10), (23).

Приведем некоторые численные примеры для амплитуд дифрагированных спектров A_l, рассчитанных по формулам (11) и (20.1), (32.1), (38.1) при $\zeta(x) = a \cos qx$, $\eta(x) \equiv 0$, $ka = q / k = 1/2$ и различных углах падения θ плоской волны ($k_x^0 = k \sin \theta$). Для сравнения здесь же укажем значения $A_l^{(k)}$ амплитуд тех же спектров, рассчитанных в приближении Кирхгофа, согласно теории Бреховских [3]. Заметим, что при $\zeta(x) = a \cos qx$ функция $C_n(x)$, входящая в указанные формулы, сводится к виду $C_n(\varkappa) = i^{-n} J_n(ka)$.

При нормальном падении волны ($\theta = 0$) амплитуды однородных спектров равны: $A_0 = 0{,}903 + i\,0{,}148$, $A_0^{(k)} = 0{,}765$, $A_1 = -0{,}124 - i\,0{,}257$, $A_1^{(k)} = -i\,0{,}482$, $A_2 = -2{,}439 - i\,2{,}094$, $A_2^{(k)} = -\infty$, причем в силу симметрии здесь $A_l = A_{-l}$.

При $\theta = \arcsin 1/4 = 14°29'$ имеется четыре однородных спектра с амплитудами $A_{-1} = -i\,0{,}560$, $A_{-1}^{(k)} = -i\,0{,}505$, $A_0 = 0{,}739$, $A_0^{(k)} = 0{,}779$, $A_1 = -i\,0{,}472$, $A_1^{(k)} = -i\,0{,}458$, $A_2 = -0{,}157$, $A_2^{(k)} = -0{,}133$.

При $\theta = \arcsin 3/4 = 48°35'$ амплитуды однородных спектров таковы: $A_0 = 0{,}877$, $A_0^{(k)} = 0{,}894$, $A_1 = -i\,0{,}380$, $A_1^{(k)} = -i\,0{,}343$, $A_2 = -0{,}108$, $A_2^{(k)} = -0{,}0909$, $A_3 = i\,0{,}0187$, $A_3^{(k)} = i\,0{,}0133$.

Если крутизна неровностей и степень неоднородности поверхности не слишком велики ($|\zeta'| \lesssim 1$, $|\eta'| \lesssim 1$), то при решении исходной системы уравнений методом редукции бесконечные определители можно с достаточной степенью точности аппроксимировать редуцированными определителями, порядок которых приблизительно равен числу однородных дифрагированных спектров. В приведенных выше численных примерах точность вычислений с тремя значащими цифрами достигается при замене бесконечных определителей редуцированными определителями седьмого порядка.

При малых q / k, когда число однородных спектров велико, метод редукции становится менее эффективным. В связи с этим укажем еще на один способ решения системы, пригодный при любых q / k и удобный для пологих и достаточно однородных поверхностей. Вводя обозначение $Y_n(u + nq) = \gamma_n(u)$, запишем формулу (11.1) в виде

$$\gamma_n(u) = \delta_n + \sum_{m \neq 0} \beta_m(u) \gamma_{n-m}(u + mq). \tag{25}$$

Заменяя функции $\gamma_{n-m}(u + mq)$ их представлением по этой же формуле и группируя в формуле (25) члены при одинаковых сомножителях γ_s, получим преобразованную систему

$$\gamma_n(u) = \delta_n^{(1)}(u) + \sum_{m \neq 0} \beta_m^{(1)}(u) \gamma_{n-m}(u + mq), \tag{26}$$

где

$$\delta_0^{(1)}(u) = 1/r(u), \qquad \delta_n^{(1)}(u) = \beta_n(u)/r(u) \quad \text{при} \quad n \neq 0, \tag{27}$$

$$\beta_m^{(1)}(u) = \frac{1}{r(u)} \sum_{s \neq 0,\, m} \beta_s(u) \beta_{m-s}(u + sq), \tag{28}$$

$$r(u) = 1 - \sum_{s \neq 0} \beta_s(u) \beta_{-s}(u + sq). \tag{29}$$

Система (26) имеет такую же структуру, что и система (25), и мы

можем применить указанное преобразование последовательно любое число раз. При этом после ν-го шага получаем

$$\gamma_n(u) = \delta_n^{(\nu)}(u) + \sum_{m\neq 0} \beta_m^{(\nu)}(u)\gamma_{n-m}(u+mq), \tag{30}$$

$$\delta_n^{(\nu+1)}(u) = \frac{1}{r^{(\nu)}(u)}\left[\delta_n^{(\nu)}(u) + \sum_{s\neq 0} \beta_s^{(\nu)}(u)\delta_{n-s}^{(\nu)}(u+sq)\right], \tag{31}$$

$$\beta_m^{(\nu+1)}(u) = \frac{1}{r^{(\nu)}(u)} \sum_{s\neq 0,\, m} \beta_s^{(\nu)}(u)\beta_{m-s}^{(\nu)}(u+sq), \tag{32}$$

$$r^{(\nu)}(u) = 1 - \sum_{s\neq 0} \beta_s^{(\nu)}(u)\beta_{-s}^{(\nu)}(u+sq). \tag{33}$$

Поскольку функции $\beta_s(u)$ достаточно быстро убывают с ростом $|u|$ или $|s|$, а $\beta^{(\nu+1)}$ выражаются через парные произведения функций $\beta^{(\nu)}$, разнесенных по нижнему индексу и аргументу, то при увеличении ν функции $\beta_m^{(\nu)}(u)$ стремятся к нулю для всех u и m и решение системы имеет вид

$$\gamma_n(u) = \lim \delta_n^{(\nu)}(u) \quad \text{при} \quad \nu\to\infty. \tag{34}$$

В частном случае, когда описывающие поверхность функции $\zeta(x)$, $\eta(x)$ четные, имеем $\beta_{-s}(u) = \beta_s(-u)$. Отсюда и из формул (27) — (34) следует

$$\left.\begin{aligned} r(u) = r(-u), \quad r^{(\nu)}(u) = r^{(\nu)}(-u), \quad \beta_{-s}^{(\nu)}(u) = \beta_s^{(\nu)}(-u), \\ \delta_{-n}^{(\nu)}(u) = \delta_n^{(\nu)}(-u), \qquad \gamma_{-n}(u) = \gamma_n(-u). \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

В другом частном случае, когда $\eta(x) \equiv 0$ и все четные коэффициенты Фурье ζ_{2n} функции $\zeta(x)$ равны нулю, $\beta_{2n}(u) \equiv 0$. Отсюда, а также из формул (27) — (34), вытекает, что

$$\left.\begin{aligned} &\beta_{2n+1}^{(\nu)}(u) \equiv 0 \quad \text{при} \quad \nu \geqslant 1, \qquad \delta_{2n\neq 0}^{(1)}(u) \equiv 0, \\ &\delta_0^{(2)}(u) = 1/[r(u)r^{(1)}(u)], \qquad \delta_{2n\neq 0}^{(2)}(u) = \beta_{2n}^{(1)}(u)/[r(u+2nq)r^{(1)}(u)]. \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

Легко видеть, что в этом случае система (30) распадается на две, одна из которых связывает между собой функции γ_n с четными индексами, а другая — с нечетными. Аналогично, формула (31) связывает между собой функции $\delta_n^{(\nu+1)}$ и $\delta_m^{(\nu)}$, имеющие нижние индексы одинаковой четности. Зная функции γ_{2n}, функции γ_{2n+1} удобно находить по формуле (25), выражающей γ_n через функции γ_{n-2m-1}. Очевидно, каждый из отмеченных частных случаев охватывает и случай $\zeta(x) = a\cos qx$, $\eta(x) \equiv 0$, для которого справедливы и формулы (35), и формулы (36).

Определяемый выражениями (25) — (34) алгорифм особенно быстро сходится, если рассеивающая поверхность достаточно пологая и однородная. В этом случае функция $\beta_s(u)$ — малые величины всюду, кроме, быть может, окрестностей точек $u = \pm k$, и, вообще говоря, $\beta^{(1)}$ составляют малые величины порядка β^2, $\beta^{(2)} \sim \beta^4, \ldots, \beta^{(\nu)} \sim \beta^{2^\nu}$.

Для пологой и однородной поверхности приближенное решение, описывающее все характерные черты точного решения, мы получим, если положим $\gamma_n(u) \approx \delta_n^{(4)}(u)$, а в бесконечных суммах, фигурирующих в формулах (27) — (33), будем учитывать лишь конечное число наиболее существенных слагаемых. Так, в случае однородной пологой синусоидальной поверхности, когда $a^2q^2 \ll 1$, и $a^2qk \ll 1$, будем учитывать в правой части формулы (9) лишь первое слагаемое, а в правой части формулы (11) — два первые слагаемые для $s = 0$, одно первое слагаемое для

$s = 1$ и пренебрегать величинами α_{2s+1} при $s \geqslant 2$. Учитывая, что $\beta_n(u) = \alpha_n(u) / [1 - \alpha_0(u)]$, тогда получим:

$$\beta_1(u) \approx i\frac{ka}{2}\left\{N_0(v) - \left(\frac{ka}{2}\right)^2 [2N_1(v) - N_1(-v-1)]\right\} \Big/ [1 - \eta_0/\rho(v)], \quad (37)$$

$$\beta_3(u) \approx i\left(\frac{ka}{2}\right)^3 N_1(v+1) \Big/ [1 - \eta_0/\rho(v)], \quad (38)$$

где

$$\rho(v) = \sqrt{1 - v^2\gamma^2}, \qquad v = u / q, \qquad \gamma = q / k,$$

$$N_0(v) = [v\gamma^2/\rho(v)] + \rho(v+1) - \rho(v),$$

$$N_1(v) = \frac{\gamma^2}{2}[2v\rho(v) - (v+1)\rho(v+1) - (v-1)\rho(v-1)] -$$

$$- \frac{1}{2}[\rho^3(v) - \rho^3(v+1)] + \frac{1}{6}[\rho^3(v-1) - \rho^3(v+2)].$$

Абсолютная погрешность в формулах (37), (38) составляет величину порядка α^5, где $\alpha = a\sqrt{qk} / 2$. Функции $\beta_{2s+1}(u)$ при $s \geqslant 2$ имеют порядок $\alpha^{2s+1} \cdot 4s^{s+1/2} / [(2s+1)!(1 + |\eta_0|\sqrt{q/k})]$ и в принятом приближении их следует считать равными нулю. Максимальные абсолютные значения функций $\beta_{2s}(u)$ при $s \geqslant 1$ имеют порядок $\varepsilon_s = \alpha^{2s}|\eta_0| s^{s-1/2} / [(2s)!(|\eta_0| + \sqrt{q/k})]$. Пренебрегая величинами ε_s при $s \geqslant 2$, функции $\beta_{2s}(u)$ при $s \geqslant 2$ следует считать равными нулю, а $\beta_2(u)$ с погрешностью порядка ε_2 запишется согласно формуле (10) в виде $\beta_2(u) \approx \eta_0(ka/2)^2[\rho(v) - (1/2)\rho(v+1) - (1/2)\rho(v-1)] \cdot [1 - \eta_0/\rho(v)]^{-1}$. При этом в выражении (29) мы будем учитывать лишь члены ряда с $s = \pm 1$. В принятом приближении правые части выражений (27)—(33) содержат лишь конечное число слагаемых и позволяют найти функции $\gamma_n(u)$ с малой относительной либо абсолютной ошибкой, порядок которой не превышает α^2.

В большинстве случаев здесь достаточно учитывать лишь первое слагаемое в фигурной скобке в формуле (37) и пренебрегать функциями $\beta_n(u)$ при $|n| \geqslant 2$. В частности, при $\eta_0 = 0$ такое приближение пригодно для значений u, удовлетворяющих при всех целых n условию:

$$|u - nq \pm [k + q\alpha^4 / (4 + 2\gamma)]| \geqslant \alpha^6. \quad (39)$$

При этом оказываются отличными от нуля лишь те функции $\beta_m^{(\nu)}(u)$, для которых $|m| = 2^\nu$, а $\delta_m^{(\nu)}(u) \equiv 0$ для всех $|m| \geqslant 2^\nu$. Здесь достаточно принять $\gamma_n(u) \approx \delta_n^{(3)}(u)$.

Выражения для поля на поверхности и над ней мы получим, заменив в соответственных формулах в [1] $X_n(u + nq)$ на $\gamma_n(u)$. В частности, амплитуды A_l дифрагированных спектров в случае падения плоской волны (16.1) на однородную поверхность формы $\zeta(x) = a\cos qx$, согласно формулам (18.1), (32.1), (35.1), равны

$$A_l = \frac{1}{2}\sum_n i^{-n} p_{l-n}(k_x^0)\left[1 + \eta_0\frac{k}{k_z^l} + nq\frac{k_x^l}{(k_z^l)^2}\right] J_n(k_z^l a),$$

где

$$p_n(k_x^0) = 2\sum_m i^{-m} J_m(k_z^0 a)\gamma_{n-m}(-k_x^n) / [1 - \alpha_0(-k_x^m)].$$

В заключение приведем рассчитанные по указанным приближенным формулам значения амплитуд спектров для случая $\eta_0 = 0$, $\zeta(x) = a\cos kx$ ($\gamma = 1$) при двух специально выбранных углах падения плоской волны, при которых условие (39) не соблюдается.

1. $k_x^0 = k\alpha^4[1 - \alpha^2 \cdot 5(3 - 5/\sqrt{6}) + O(\alpha^4)] / 6$, где $\alpha = ka/2$. Соответственный угол падения θ волны равен $\theta = \arcsin(k_x^0 / k)$. (При

выбранном значении k_x^0 правая часть выражения (29) в точке $u = k_x^0 + 2k$ достигает по абсолютной величине минимума: $r(k_x^0 + 2k) = -i\alpha^2\sqrt{3}/2 + O(\alpha^4)$. Амплитуды однородных спектров будут $A_0 = -1 - i(\alpha^2/\sqrt{3}) + O(\alpha^4)$. $A_{-1} = \alpha \cdot 3(1+i)/2 + O(\alpha^3)$. Среди неоднородных спектров выделяется интенсивный спектр первого номера с амплитудой $A_1 = -2i/\alpha + O(\alpha)$.

2. $k_x^0 = k\{1 - \alpha^4[1 - \alpha^2 \cdot 5(3 - 5/\sqrt{6})]/6 + O(\alpha^8)\}$, соответственный угол скольжения равен $\pi/2 - \theta = (\alpha^2/\sqrt{3})[1 - \alpha^2(5/2)(3 - 5/\sqrt{6})] + O(\alpha^6)$. Амплитуды однородных спектров здесь таковы:

$$A_0 = i + O(\alpha^2), \quad A_{-1} = \alpha^3[1 - 1/\sqrt{3} + i(1/\sqrt{3} - 1/3)] + O(\alpha^5).$$

Из приведенных примеров видно, что при малых α зеркально отраженные спектры существенно отличаются по фазе от волны, отраженной от плоской поверхности. В частности, первый пример показывает, что при почти нормальном падении плоской волны на акустически жесткую пологую синусоидальную поверхность малой амплитуды поверхность может практически отражать как абсолютно мягкая плоскость.

Пользуюсь случаем выразить благодарность В. П. Бажничкиной и И. И. Левицкой, выполнивших численные расчеты, результаты которых приведены в настоящей статье.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. А. Урусовский. Дифракция волн на периодической поверхности. Акуст. ж., 1964, **10**, 3, 338—346.
2. Г. Н. Ватсон. Теория бесселевых функций, ч. 1. М., ИЛ, 1949.
3. Л. М. Бреховских. Дифракция волн на неровной поверхности. Ж. эксп. и теор. физ., 1952, **23**, 275—304.

Акустический институт АН СССР
Москва

Поступила в редакцию
9 марта 1964 г.

ИСПРАВЛЕНИЯ К СТАТЬЕ [1]

Стр.	Строка	Напечатано	Следует читать
338	1 снизу	кривой	которой
340	19 сверху	$\sqrt{k^2 - (u - nq)^2}$	$\sqrt{k^2 - (u + nq)^2}$
340	11 снизу	d	q
341	1 »	$m \neq n$	$\sum\limits_{m \neq n}$
342	10 сверху	Z	z
342	9 снизу	$\delta_m \pm$	$\delta_m \mp$
343	2 »	$e^{\pm \varkappa_z z}$	$e^{\mp i\varkappa_z Z}$
344	17 »	$2C_0(-\varkappa_z)$	$2C_0(\varkappa_z)$
346	1 сверху	$+\tilde{\alpha}_0(u) \ldots \tilde{\alpha}_0(u)$	$+\tilde{a}_0(u) \ldots \tilde{a}_0(u)$
346	3 сверху	$\lvert r \rvert$	$\lvert \tau \rvert$